EXAMEN INTEGRADOR

2 de julio de 2014 (1ra. Oportunidad)

Sugerencias y respuestas para el tema 1

EJERCICIO 1:

Sea $A \in R^{3x3}$ tal que: $A\,[1\ \ 0\ \ i\,]^T = [2i\ \ 0\ \ -2]^T$ y $Nul(A) = gen\{\,[0\ \ 1\ \ 0]^T\,\}$.

a) Resolver el sistema $\begin{cases} X'(t) = A\,X(t) \\ X(\pi) = [2\ \ 0\ \ 0]^T \end{cases}$

b) Sea $T: R^3 \longrightarrow R^3$ tal que $T(x) = Ax$. Analizar si T es diagonalizable.

Sugerencia: no es necesario hallar A.

a) Como A tiene elementos reales y 2i es autovalor de A asociado a $[1\ \ 0\ \ i\,]^T$, se deduce que -2i es autovalor de A asociado a $[1\ \ 0\ -i\,]^T$.

Solución general: $X(t) = C_1e^{2it}\,[1\ \ 0\ \ i\,]^T + C_2e^{-2it}\,[1\ \ 0\ -i\,]^T + C_3\,[0\ \ 1\ \ 0]^T$

Para la condición inicial dada: $C_1 = C_2 = 1\ ,\ C_3 = 0$

b) T no es diagonalizable porque no existe una base de R^3 formada por autovectores de T.

EJERCICIO 2:

Sea la forma cuadrática $Q: R^2 \longrightarrow R\ ,\ Q(x) = x_1^2 - 4x_1x_2 + \alpha x_2^2$

Sabiendo que $mín\,\{\,Q(x)\text{: } \|x\| = 3\,\} = -9$, diagonalizar Q y graficar las curvas de nivel 0 y 1.

La matriz de la forma cuadrática es $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & \alpha \end{pmatrix}$

Del valor mínimo se deduce que $\lambda = -1$ es autovalor de A, por lo tanto $\alpha = 1$.

Las curvas de nivel 0 y 1 son un par de rectas y una hipérbola, respectivamente.

EJERCICIO 3:

Analizar la validez de las siguientes afirmaciones:

a) Si $A \in R^{nxn}$ es ortogonalmente diagonalizable, entonces $\alpha A + \beta I$ es ortogonalmente diagonalizable para todo $\alpha, \beta \in R$.

b) Si $P \in R^{nxn}$ es ortogonal, entonces sus únicos posibles autovalores son 1 o bien -1 .

a)Verdadera.

b)Falsa: $R = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ es ortogonal y sus autovalores son $\pm\, i$.

EJERCICIO 4:

Sea la matriz $A \in R^{4\times 3}$ tal que:

(i) $Nul(A) = gen\{[1\ \ 0\ \ 0]^T\}$
(ii) $Col(A) = \{x \in R^4 : x_1 + x_4 = 0,\ x_2 - x_3 = 0\}$
(iii) los valores singulares no nulos de A son 2 y $\sqrt{2}$.

Hallar la solución por cuadrados mínimos de norma mínima del sistema $Ax = [0\ 0\ 0\ 1]^T$

De acuerdo con los datos, puede armarse una DVS reducida de A y obtener la seudoinversa A^+ .

La solución por cuadrados mínimos de norma mínima es:

$$\tilde{x} = A^+ b = \left[\, 0 \quad \frac{-1}{2\sqrt{2}} \quad 0 \,\right]^T$$

EJERCICIO 5:

Sea $f \in \mathcal{L}(\mathcal{P}_2)$ tal que

$$f(a_0 + a_1 t + a_2 t^2) = 2a_0 + 5a_1 + 2a_2 + (5a_0 + 2a_1 + ka_2)t - 3a_2 t^2.$$

Hallar los valores de $k \in R$ para los cuales existe una base B de $\mathcal{P}_2$ tal que $[f]_B$ es diagonal. Obtener dicha base B y la matriz $[f]_B$.

f es diagonalizable sii la matriz asociada a f en una base (cualquiera) de P_2 es diagonalizable (en $\mathbb{R}$).

Considerando $[f]_E$ con $E = \{1, t, t^2\}$ se obtiene que f es diagonalizable sii $k = 2$.

Una base de autovectores es $B = \{1 - t\ , 2t - 5t^2, 1 + t\ \}$ y la matriz asociada correspondiente es $[f]_B = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$.
