

[illegible]

Delaciones

Producto cartesiano: Sean $A, B, C \subseteq U$

$$A \times B = \{ (x, y) / x \in A \wedge y \in B \}$$

$$E_j: A = \{0, 1, 2\} \quad B = \{0, 4\}$$

$$A \times B = \{ (0,0), (0,4), (1,0), (1,4), (2,0), (2,4) \}$$

$$B \times A = \{(0,0), (0,1), (0,2), (4,0), (4,1), (4,2)\}$$

$$A \times B \neq B \times A$$

Relación: Sean $A, B \subseteq U$, una relación de A en B es un subconjunto del producto cartesiano $A \times B$.

Eg: $R_1: A \rightarrow B$ $R_2: \{(0,0), (0,4)\}$ $\circ R_1, 0 \equiv (0,0) \in R_1$
 $\circ R_2, 4 \equiv (0,4) \in R_2$

Sea $A \subseteq U$, una relación en A es un subconjunto del producto cartesiano $A \times A$ ($= A^2$).

Eg: $A = \{1, 2, 3\}$, $R = \{(1,1), (2,2), (3,3), (1,2), (1,3)\}$

Propiedades de relación en A:

- Reflexiva: R es reflexiva si: $\forall x \in A \ (x, x) \in R$
- Simétrica: R es simétrica si: $\forall x, y \in A \ ((x, y) \in R \rightarrow (y, x) \in R)$
- Transitiva: R es transitiva si: $\forall x, y, z \in A \ (xRy \wedge yRz \rightarrow xRz)$
- Antisimétrica: R es antisimétrica si: $\forall x, y \in A \ (xRy \wedge yRx \rightarrow x = y)$

Relaciones de equivalencia

Sea R una relación en A , se dice que es una relación de equivalencia si verifica ser reflexiva, simétrica y transitiva.

$$Ej: R = \left\{ (x, y) \mid \frac{x-y}{3} \in \mathbb{Z} \right\} \quad R \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$

$$\exists k \in \mathbb{Z} : x - y = 3k \quad (x - y \in 3 \text{ pertenece a múltiplo de } 3)$$

$$\text{Reflexiva? Sea } x \in \mathbb{Z} : x - x = 0 = 3 \cdot 0 \xrightarrow{0 \in \mathbb{Z}} (x, x) \in R \quad \checkmark$$

$$\text{Simétrica? Sea } x, y \in \mathbb{Z} : x R y \rightarrow x - y = 3k : -(x - y) = -3k \\ y - x = 3(-k) \quad \checkmark$$

$$\text{Transitiva? Sea } x, y, z \in \mathbb{Z} : x R y \wedge y R z \rightarrow x - y = 3k \wedge y - z = 3k' : \\ (x - y) + (y - z) = 3k + 3k' \Rightarrow x - z = 3(k + k') \quad \checkmark \therefore x R z$$

Clases de equivalencia

A_1, A_2 son clases de equivalencia de la relación R en A si y solo si verifican:

$$\text{I. } A_i \cap A_j \neq \emptyset \quad i \neq j$$

$$\text{II. } \cup A_i = A \quad (\text{la unión de todas las clases de } A)$$

$$Ej: \text{clase del cero: } \bar{0}$$

$$x - 0 = 3k \Rightarrow x = 3k \Rightarrow \bar{0} = \{x / x = 3k\} \quad (\dots, -6, -3, 0, 3, 6, \dots)$$

$$\text{clase del uno: } \bar{1}$$

$$x - 1 = 3k \Rightarrow x = 3k + 1 \Rightarrow \bar{1} = \{x / x = 3k + 1\} \quad (\dots, -2, 1, 4, 7, \dots)$$

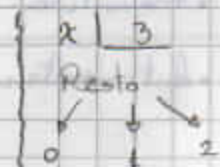
$$\text{clase del dos: } \bar{2}$$

$$x - 2 = 3k \Rightarrow x = 3k + 2 \Rightarrow \bar{2} = \{x / x = 3k + 2\} \quad (\dots, -1, 2, 5, \dots)$$

$$\bullet \bar{0} \cup \bar{1} \cup \bar{2} = \mathbb{Z}$$

$$\bullet \bar{0} \cap \bar{1} = \emptyset, \bar{0} \cap \bar{2} = \emptyset, \bar{1} \cap \bar{2} = \emptyset$$

$$\Rightarrow \mathbb{Z}/R = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}\} \quad \text{conjunto cociente}$$



Relaciones de Orden

Sea R una relación en A , se dice que es una relación de orden si verifica ser reflexiva, antisimétrica y transitiva.

Diagramas de Hasse

A los grafos les:

- elimina los bucles de reflexividad. 
- elimina atajos de transitividad. 
- elimina las orientaciones, ubicando los puntos de tal forma que se lee de abajo hacia arriba. 

Orden Total: $\forall x, y \in A : xRy \vee yRx$. En el diagrama de Hasse se ve cuando es una línea recta.

Orden Parcial: $\exists x, y \in A : (xRy \wedge y \not Rx)$



$A = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$

$$R = \left\{ \begin{array}{cccccccccc} (a,a) & (b,b) & (c,c) & (d,d) & (e,e) & (f,f) & (g,g) & (h,h) & (i,i) \\ (a,b) & (b,f) & (c,d) & (d,g) & & & & & \\ (a,c) & (c,f) & (d,h) & & & & & & \\ & (c,g) & (d,i) & & & & & & \\ & (e,h) & (d,f) & & & & & & \\ & & (e,h) & & & & & & \end{array} \right\}$$

Maximal y Minimal

Sea $(A; R)$ un conjunto ordenado, $x_0 \in A$ es elemento maximal de A si $\nexists x \in A : x_0 R x$ [$x_0 \leq x$] implica relac. de orden.

y $x_0 \in A$ es el elemento minimal de A si $\nexists x \in A : x R x_0$

$$x \neq x_0$$

Cotas, Supremos y Máximos, Infimos y Mínimos

Sea $X \subseteq A$:

$x_0 \in A$ es cota superior de X si $\forall x \in X: x R x_0$.

Ej: (enteros) $CS(X) = \{f\}$

$s \in A$ es el supremo de X si: I) s es CS
II) si s' es CS $\Rightarrow s R s'$

Si s es el supremo de X y $s \in X$ es el máximo de X

$x_0 \in A$ es cota inferior de X si $\forall x \in X: x_0 R x$

$i \in A$ es el infimo de X si: I) i es CI
II) si i' es CI $\Rightarrow i' R i$

$i \in A$ es el mínimo de X si es el infimo de X y
si $i \in X$.

Relación Inversa

Dada $R: A \rightarrow B$, ($R \subseteq A \times B$), la relación inversa R^{-1}
es una relación $R^{-1}: B \rightarrow A$

$$R^{-1} = \{(x, y) / (y, x) \in R\}$$

~~Clases de equivalencia~~

1) $\forall a \in A: \bar{a} \subseteq A$

2) $\forall a \in A: \bar{a} \neq \emptyset$

3) $\forall a, b \in A: a R b \iff \bar{a} = \bar{b}$

4) $\forall a, b \in A: a \not R b \iff \bar{a} \cap \bar{b} = \emptyset$

3. D/ $a R b \rightarrow \bar{a} = \bar{b}$

$x \in \bar{a} \rightarrow x R a \wedge a R b$ (por hip) $\xrightarrow{\text{trans.}} x R b \rightarrow x \in \bar{b} \quad \bar{a} \subseteq \bar{b}$
 $x \in \bar{b} \rightarrow x R b \wedge a R b \xrightarrow{\text{sim.}} b R a \rightarrow x R a \rightarrow x \in \bar{a} \quad \bar{b} \subseteq \bar{a}$
 $\bar{a} \subseteq \bar{b} \wedge \bar{b} \subseteq \bar{a} \rightarrow \bar{a} = \bar{b}$
 $a \in \bar{a} \wedge \bar{a} = \bar{b}$ (por hip) $\rightarrow a \in \bar{b} \rightarrow a R b$

$$4. \supset / a \not R b \rightarrow \bar{a} \cap \bar{b} = \emptyset$$

por contraposición:

$$\bar{a} \cap \bar{b} \neq \emptyset \rightarrow \exists x \in A : x \in \bar{a} \cap \bar{b} \leftrightarrow x \in \bar{a} \wedge x \in \bar{b}$$

(no tesis)

$$\hookrightarrow (x \in a \wedge x \in b)$$

$$\downarrow a R x \quad \text{trans } a R b \text{ (n.t.i.p.)} /$$

Partición de A

$\mathcal{S} = \{A_1, A_2, \dots, A_m\}$ es una partición de A si:

$$1) \forall i: 1 \leq i \leq m : A_i \subseteq A$$

$$2) \forall i: 1 \leq i \leq m : A_i \neq \emptyset$$

$$3) \bigcup_{i=1}^m A_i = A$$

$$4) \forall i, j: 1 \leq i, j \leq m : i \neq j \rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$$

$$|A| = n \rightarrow |P[A]| = 2^n$$

Conjunto Cociente

Sea R una relación de equivalencia en A , se define conjunto cociente: $A/R = \{\bar{a} : a \in A\}$
y es una partición de A

Ej: 19) En $\mathbb{Z}$ $a R b$ si $m|a-b$ con $m \in \mathbb{N}$

$$a \equiv b \pmod{m} \quad m=3: 18 R 4: \begin{matrix} 18 \equiv 4 \pmod{3} \rightarrow 18-4=14 \neq 3 \\ 18 \equiv 6 \pmod{3} \rightarrow 18-6=12=3 \end{matrix}$$

$$a \equiv_m b$$

$$\text{Ref. } \forall a \in \mathbb{Z} \quad a R a \rightarrow m|a-a \quad \checkmark$$

$$\text{Sim. } \forall a, b \in \mathbb{Z} \quad a R b \rightarrow a R b \quad \checkmark$$

$$m|a-b \rightarrow m|b-a$$