REDES DE TRANSPORTE

Es una ***aplicación de digrafos ponderados*** al flujo (circulación) de un bien desde una fuente a un destino dado. Los bienes pueden ser por ejemplo litros de petróleo que fluyen por tuberías, llamadas telefónicas a través de un sistema de comunicación, etc.

Observación: el peso de la arista será interpretado como la capacidad máxima que puede transportar dicha arista.

DEFINICIÓN 1: Sea G = (V, A) un **digrafo conexo y sin lazos**. Se dice que G es una **RED o RED DE TRANSPORTE** si se verifican:

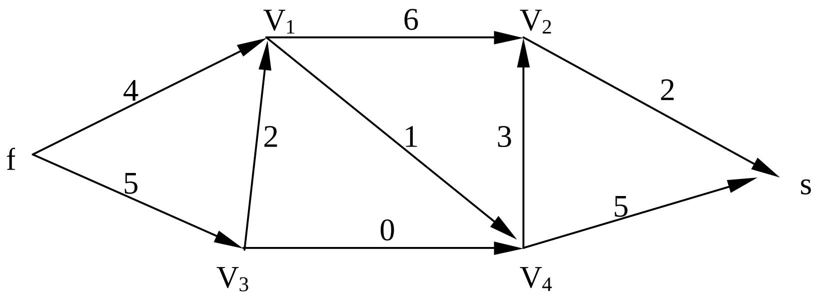
$a)\ \exists$ único vértice $f \in V\ /\ gr^{+}(f) = 0$ (no llegan flechas) VÉRTICE FUENTE

b) $\exists$ único vértice $s \in V\ /\ gr^{-}(s) = 0$ (no salen flechas) VÉRTICE SUMIDERO

$c)$ El digrafo es ponderado, es decir :

$\exists$ una función $c : A \to N_0$ /si $e = (v_i, v_j) \in A\ \ c(e) = c_{ij}$ (CAPACIDAD DE LA ARISTA)

EJEMPLO:



Observación:

- Como c (f , v_1) + c (f ,v_3) = 4+5= 9 se tiene que la **cantidad** del bien que se transporta de **f** a **s** no puede ser mayor que 9.
- Como c (v_2 , s) + c (v_4 , s) =2+5=7 la cantidad queda restringida aún más, no puede ser más de 7

Nos preguntamos:

¿Las otras aristas permiten que se transporten 7 unidades del bien?
¿Cuál es la mayor cantidad de unidades que esta red permite transportar?

Estos interrogantes obtienen respuesta en el tratamiento del tema: "Flujo máximo de una red" (ver algoritmo de FORD – FULKERSON)

<u>DEFINICIÓN 2:</u> Si G = (V, A) es una red de transporte se llama un FLUJO de G a una función $F : A \to N_0$ /

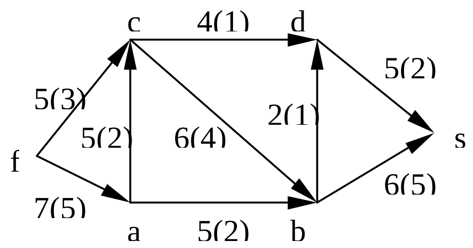
$a)\ \forall e \in A$ se tiene $F(e) \le c(e)$ (obs.: si $F(e) = c(e)$ se dice que la arista está SATURADA

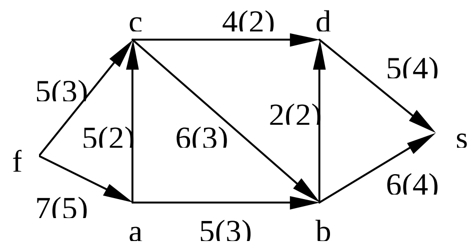
$b)\ \forall v \in A / v \neq f, v \neq s$ se tiene que: $\underbrace{\sum_{w \in V} F(w,v)}_{\text{flujo entrante en v}} = \underbrace{\sum_{w \in V} F(v,w)}_{\text{flujo saliente en v}}$

<u>Observar que</u>:

El inciso $a)$ indica que lo que se transporta por una arista no puede exceder la capacidad de la misma.

El inciso $b)$ indica que lo que fluye (lo que llega) a un vértice distinto de los vértices fuente y sumidero debe ser igual a lo que fluye desde él (lo que sale).





Obs.: los valores de la función $F : A \to N_0$ están indicados entre paréntesis, es decir: $F(c,d) = 1$ (en el primer dígrafo).

La función F definida en el *primer caso* **no satisface** la definición de flujo ya que en el vértice a se tiene: $\begin{cases} F(f,a)\ \text{(flujo entrante en a)} \neq F(a,c) + F(a,b)\ \text{(flujo saliente en a)} \\ 5 \neq 2 + 2 \end{cases}$

En cambio, la función F definida en el *segundo caso* **satisface** la definición de flujo.

¿Esta definición de flujo asegura que todo lo que sale del vértice <u>fuente</u> llega al vértice <u>sumidero</u>? Es decir ¿es una buena definición?

TEOREMA 1: Si F es un flujo de una red de transporte se cumple:

$$\sum_{w\in V} F(f,w) = \sum_{w\in V} F(w,s)$$

Dem.:

Se tiene que: $\sum_{e\in A} F(e) = \sum_{v\in V}\left(\sum_{w\in V} F(w,v)\right) = \sum_{w\in V}\left(\sum_{v\in V} F(v,w)\right)$ donde A es el conjunto de aristas de la red de transporte.

Entonces: $0 = \sum_{v\in V}\left(\sum_{w\in V} F(w,v) - \sum_{w\in V} F(v,w)\right) =$ (separando los vértices fuente y sumidero)

$$= \left(\sum_{w\in V} F(w,s) - \underbrace{\sum_{w\in V} F(s,w)}_{\substack{=0 \\ \text{porque de s} \\ \text{no salen flechas}}}\right) + \left(\underbrace{\sum_{w\in V} F(w,f)}_{\substack{=0 \\ \text{porque a f} \\ \text{no llegan flechas}}} - \sum_{w\in V} F(f,w)\right) + \sum_{\substack{v\notin V \\ v\neq s \\ v\neq f}} \underbrace{\left(\sum_{w\in V} F(w,v) - \sum_{w\in V} F(v,w)\right)}_{\substack{=0 \\ \text{por el inciso b) de la definición de flujo}}} =$$

Entonces $\sum_{w\in V} F(w,s) - \sum_{w\in V} F(f,w) = 0$ y por lo tanto $\sum_{w\in V} F(w,s) = \sum_{w\in V} F(f,w)$.

A partir de este teorema tiene sentido la siguiente definición:

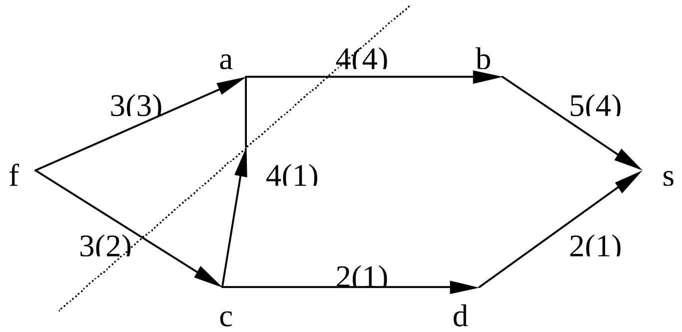
DEFINICIÓN 3: Se llama **VALOR DEL FLUJO** a la suma de los flujos de todas las aristas que salen del vértice fuente, es decir:

$$\boxed{val(F) = \sum_{v\in V} F(f,v)}$$

DEFINICIÓN 4: Un CORTE $(P,\overline{P})$ en una red de transporte $G=(V,A)$ es un conjunto P tal que:

- $P \subset V$
- $P \cup \overline{P} = V$
- $f \in P, s \in \overline{P}$

Ejemplo:



En este caso es: $P = \{f, a\}$ $\overline{P} = \{b, c, d, s\}$

DEFINICIÓN 5: Se llama **CAPACIDAD** de un corte $(P, \overline{P})$ al número:

$$C(P,\overline{P}) = \sum_{v \in P} \sum_{w \in \overline{P}} C(v,w)$$

En el caso del ejemplo anterior $C(P,\overline{P}) = C(a,b) + C(f,c) = 4 + 3 = 7$

TEOREMA 2 :Sea F un flujo de la red $G = (V, A)$ y sea $(P, \overline{P})$ un corte de G. Entonces:

$$C(P,\overline{P}) \geq val(F) \quad \text{es decir} \quad \boxed{\sum_{v \in P} \sum_{w \in \overline{P}} C(v,w) \geq \sum_{v \in V} F(f,v)}$$

dem.: $val(F) = \sum_{v \in V} F(f,v) = \left[\sum_{v \in V} F(f,v) - \underbrace{\sum_{w \in V} F(w,f)}_{\substack{=0 \\ \text{porque } gr^{+}(f)=0}} \right] + \sum_{\substack{x \in P \\ x \neq f}} \left[\underbrace{\sum_{v \in V} F(x,v) - \sum_{w \in V} F(w,x)}_{\substack{=0 \text{ por inciso b)} \\ \text{de la definición de flujo}}} \right] =$

(asociando) $= \sum_{\substack{x \in P \\ v \in V}} F(x,v) - \sum_{\substack{x \in P \\ w \in V}} F(w,x) =$

$= \left[\cancel{\sum_{\substack{x \in P \\ v \in P}} F(x,v)} + \sum_{\substack{x \in P \\ v \in \overline{P}}} F(x,v) \right] - \left[\cancel{\sum_{\substack{x \in P \\ w \in P}} F(w,x)} + \sum_{\substack{x \in P \\ w \in \overline{P}}} F(w,x) \right]$ y simplificando se tiene que:

$\boxed{\text{Val (F)}= = \sum_{\substack{x\in P \\ v\in \overline{P}}} F(x,v) - \sum_{\substack{x\in P \\ w\in \overline{P}}} F(w,x)}$ (1) y como $F(w,x) \geq 0 \ \ \forall w, x \in V$ por definición del codominio de la función flujo F se obtiene que $\boxed{\sum_{\substack{x\in P \\ w\in \overline{P}}} F(w,x) \geq 0}$ (2) porque son todos los sumandos ≥ 0.

De (1) y (2) se deduce que:

$$\text{Val(F)} = \sum_{\substack{x\in P \\ v\in \overline{P}}} F(x,v) - \sum_{\substack{x\in P \\ w\in \overline{P}}} F(w,x) \leq \sum_{\substack{x\in P \\ v\in \overline{P}}} F(x,v) \leq \sum_{\substack{x\in P \\ v\in \overline{P}}} C(x,v) = C(P,\overline{P})$$

Por el inciso a) de la definición de flujo

TEOREMA 3 (del flujo máximo y corte minimal)

Si en el **TEOREMA 2** se cumple la igualdad entonces el flujo es máximo y el corte minimal.

TEOREMA 4:

En el **TEOREMA 2** se cumple la igualdad si y sólo si

$$\begin{cases} a)\ F(x,v) = C(x,v) & \forall x \in P, v \in \overline{P} \\ \text{y} & \\ b) F(v,x) = 0 & \forall v \in \overline{P}, x \in P \end{cases}$$

En el teorema 2 se da la igualdad en el último paso de la demostración $\Leftrightarrow$ las desigualdades del mismo son igualdades es decir

$$\Leftrightarrow \underbrace{\sum_{\substack{x\in P \\ v\in \overline{P}}} F(v,x) = 0}_{\substack{\text{al ser todos los sumandos} \\ \geq 0 \text{ solo puede darse}}} \wedge \underbrace{\sum_{\substack{x\in P \\ v\in \overline{P}}} F(x,v) = \sum_{\substack{x\in P \\ v\in \overline{P}}} C(x,v)}_{\substack{\text{al ser todos los sumandos de la primer sumatoria} \\ \leq \text{ que los de la segunda sumatoria}}}$$

$$\Updownarrow \qquad\qquad\qquad \Updownarrow$$

$F(v,x) = 0$ $\quad$ $F(x,v) = C(x,v)$

$\forall v \in \overline{P}, x \in P$ $\quad$ $\forall v \in \overline{P}, x \in P$

(o sea b)) $\quad$ (o sea a))