EXAMENES

CÁTEDRA DE ANÁLISIS II

9 de agosto de 2004

Índice

2. Primer cuatrimestre 2003

2.1. Parciales.

2.1.1. Parcial 17/05/03.

PRIMER PARCIAL ANALISIS II 17/05/03
TEMA 1

---

1. Sea $f(x,y) = \frac{x^2+y^2-4}{x^2-y^2}$. Describir el dominio de f. Describir la región R donde f es positiva en coordenadas cartesianas y polares, aclarando si es o no abierta y si es o no acotada. Suponga que se define una nueva función $\hat{f}$ que coincide con f en los puntos de su dominio y vale 1 en el resto del plano, es decir

$$\hat{f}(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & (x,y) \in Dom(f) \\ 1 & (x,y) \notin Dom(f) \end{cases}$$

analizar la continuidad de $\hat{f}$ en $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$

---

2. En el entorno del punto $(x_0, y_0, u_0, v_0) = (1, 1, 1/2, 1/2)$ el siguiente sistema de ecuaciones implícitas define las funciones u y v de las variables independientes x e y

$$\begin{cases} u + v & = x \\ g(u) - yv & = 0 \end{cases}$$

siendo g una función C^2 que satisface $g(1/2) = 1/2, g'(1/2) = 1$. Estimar el incremento de $w = u^2 v$ cuando el par (x,y) varía del punto de coordenadas $(1,1)$ al de coordenadas $(1.1, 1.1)$.

---

3. Sea $f(x,y) = ax^2 + h(x,y)$, siendo h diferenciable con $\nabla h(1,2) = (5,2)$. Hallar a para que la curva de nivel de f que pasa por $(1,2)$ sea en este punto perpendicular a la recta de ecuación $x + 2y = 5$.

---

4. Sea $F(x,y,z) = (xy, 4y^2, z)$

1. Mostrar que F no admite función potencial.
2. Mostrar que la circulación de F a lo largo de la curva C es 0, siendo C la curva intersección de la superficie de ecuación $x^2 + 4y^2 = 1$ con el plano de ecuación $z = 3x + 4$

---

5. Hallar la curva plana que pasa por $(1,6)$ y satisface que en cada punto de coordenadas (x,y) la recta tangente se interseca con el eje de ordenadas en un punto de ordenada $5y$.

2.1.2. Parcial 20/05/03.

PRIMER PARCIAL ANALISIS II 20/05/03
TEMA 2

---

1. Sea $f(x,y)=\frac{\sqrt{4-x^2-y^2}}{y-|x|}$. Describir el dominio de f en coordenadas cartesianas y polares. Describir la región R donde f es positiva, aclarando si es o no abierta y si es o no acotada. Supongamos que se define una nueva función $\hat{f}$ que coincide con f en los puntos de su dominio y vale 1 en el resto del plano, es decir

$$\hat{f}(x,y)=\begin{cases} f(x,y) & (x,y)\in Dom(f) \\ 1 & (x,y)\notin Dom(f)\end{cases}$$

Analizar la continuidad de $\hat{f}$ en $(0,0)$ y en $(\sqrt{2},\sqrt{2})$.

---

2. La ecuación $e^{zx-1}+zy-2=0$ en el entorno de $(x_0,y_0,z_0)=(1,1,1)$ define implícitamente $z=f(x,y)$. Hallar una ecuación de la recta tangente a la curva intersección del gráfico de f con el plano $x=y$ en el punto $(1,1,f(1,1))$. Expresar dicha recta como intersección de dos planos.

---

3. Sea $f(x,y)=ax^2+h(x,y)$, con h diferenciable tal que $\nabla h(1,\sqrt{3})=(3,2)$. Sea C la curva en el gráfico de f cuya proyección sobre el plano xy tiene ecuación $x^2+y^2=4$. Hallar a de manera que la recta tangente a C en el punto $(1,\sqrt{3},f(1,\sqrt{3}))$ sea perpendicular al vector $(4,8,-2)$.

---

4. Sea $\Phi: R^3\to R$,una función C^2 tal que $\Phi(x_1,x_2,x_3)>0\forall(x_1,x_2,x_3)$. Mostrar que $F=\frac{\nabla\Phi}{\Phi}$ es un campo de gradientes y calcular $\int_C F.d\bar{s}$ siendo C un arco de curva que recorre desde A hasta B sabiendo que $\int_C \nabla\Phi.d\bar{s}=0$.

---

5. Hallar la curva que pasa por $(1,2)$ y tiene la propiedad de que el promedio de los puntos de intersección de la recta tangente a la curva en cualquier punto P con los ejes coordenados es el punto P.

2.1.3. Parcial 07/06/03.

PRIMER PARCIAL ANALISIS II 07/06/03
TEMA 1

---

1. Sea

$$f(x,y) = \begin{cases} (1+|2x+y|)(x^2+y^2-1) & \text{cuando } y > x \\ x^2+y^2-1 & \text{cuando } y \leq x \end{cases}$$

Describir la región R donde f es positiva (> 0) en coordenadas cartesianas y polares, aclarando si es o no abierta y si es o no acotada. Analizar la continuidad de f en cada punto de la recta de ecuación $y = x$.

---

2. Consideremos en el entorno del punto $P_0 = (x_0, y_0, z_0) = (1, 1, 2)$ la ecuacion implícita

$$\{ \; F(x,y,z) = 0$$

siendo F una función C^2 con gradiente no nulo en P_0. Sea S las superficie de ecuación $F = 0$, y supongamos que se sabe que el plano tangente a S en P_0 corta al plano $z = 0$ en la recta de ecuación $x - y = 1$. En estas condiciones, el plano $z = 2$ corta a S en una curva que pasa por P_0. Hallar una ecuación de la recta tangente a esta curva en P_0.

---

3. Supongamos que la temperatura en un punto (x, y, z) del espacio está dada es $T(x, y, z) = x^2 + y^2 - z$. Una abeja vuela hacia regiones más frías. Que dirección tendrá su velocidad cuando pasa por $(1, 1, 2)$? (se supone que la abeja huye en la dirección en la que la temperatura decrece más rapidamente)

---

4. Sea $F(x, y) = (x, xy)$

1. Mostrar que F no admite función potencial.
2. Hallar la circulación de F a lo largo de la curva positivamente orientada C, perímetro de la región definida en coordenadas polares ρ, φ por $\rho \leq 1, \pi/6 \leq \varphi \leq \pi/2$.

---

5. Hallar las curvas para las que el área del triángulo que tiene como vértices un punto P de la curva, el punto de intersección de la tangente en el punto P con el eje x, y la proyección de P en el eje x es constante (no depende de P) y vale 2.

2.1.4. Parcial 10/06/03.

PRIMER PARCIAL ANALISIS II 10/06/03
TEMA 1

---

1. Sea

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2-y^2)(x^2+y^2) & \text{cuando } x^2+y^2>1 \\ x^2+y^2-1 & \text{cuando } x^2+y^2 \le 1 \end{cases}$$

Describir la región R donde f es positiva (>0) en coordenadas cartesianas y polares, aclarando si es o no abierta y si es o no acotada. Analizar la continuidad de f en cada punto de la circunferencia de ecuación $x^2+y^2=1$.

---

2. Sea C la curva en el plano u, v de ecuación paramétrica $u = u(t) = t^2, v = v(t) = 2t-1, t \in (-1,1)$, y sea

$$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, (u,v) \mapsto F(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$$

una función C^2 de la que se conoce la matriz jacobiana

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v)}(0,-1) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

1. Dibujar aproximadamente la curva C en el entorno de $(u(0), v(0))$.
2. Hallar el vector tangente a la curva en $\mathbb{R}^3$ de ecuación paramétrica $x = x(u(t), v(t)), y = y(u(t), v(t)), z = z(u(t), v(t)), t \in (-1,1)$ en el punto $F(0,-1)$.

---

3. Sea $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ una función C^2 de la que se conoce $\nabla F(1,2,0) = (1,0,-1)$. Sea $z = f(x,y)$ una función definida en un entorno U de $(1,2)$ tal que $F(x,y,f(x,y)) = 0, (x,y) \in U$. Hallar, si existe, una dirección v tal que la derivada de f en la dirección de v en $(1,2)$, $f'((1,2),v)$, sea 0.

---

4. Sea $F(x,y) = (x, x-y^2)$

1. Mostrar que F no admite función potencial.
2. Hallar la circulación de F a lo largo de la curva positivamente orientada C, perímetro de la región descripta por $0 \le y \le 1, 0 \le x \le y^2$.

---

5. Una población P de bacterias crece con $P'/P = 0.03$ durante T días, al cabo de los cuales se incrementa P'/P a 0.05 (tambien las bacterias tienen primaveras!). Hallar T sabiendo que la población se duplicó en 20 días.

2.1.5. Parcial 01/07/03.

PRIMER PARCIAL ANALISIS II 01/07/03
TEMA 1

---

1. Supongamos que $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es una función de la que se sabe que es continua en todos los puntos del plano, y que es positiva (> 0) en la región descripta en polares por $(0 < \rho < 2) \wedge (0 < \varphi < \pi/3)$, negativa ($< 0$) en la región descripta por $(\rho > 2) \vee (\pi/3 < \varphi < 2\pi)$ (donde $\wedge$ y $\vee$ notan el **y** y el **o** lógicos respectivamente) y $f(0,0) = 0$. Sea $g(x,y) = \frac{1}{f(y,x)}$. Describir el conjunto donde g es positiva (> 0), y analizar en que puntos del plano g es continua.

---

2. Consideremos en el entorno del punto $P_0 = (x_0, y_0, z_0) = (1,1,0)$ las superficies S_F y S_G descriptas respectivamente por $F(x,y,z) = 0$ y $G(x,y,z) = 0$, donde $F(x,y,z) = 2x - 2 + \log(y) - \sin(z)$ y $G(x,y,z) = xy - 1 + h(z)$, siendo $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función C^1, con $h(0) = h'(0) = 0$. Sea C la curva de intersección de S_F con S_G. Hallar aproximadamente el punto de intersección de C con el plano $z = 0.1$.

---

3. Supongamos que la temperatura en cada punto (x,y) de una placa plana es $T(x,y) = 4x^2 - y^2$. Describir el comportamiento de la temperatura en función de ρ a lo largo de la recta de ecuación $\varphi = \pi/3$.

---

4. Sea $F(x,y,z) = (4x/z, 2y/z, -(2x^2 + y^2)/z^2), z \neq 0$

1. Mostrar que F admite función potencial para $z \neq 0$.
2. Describir las superficies equipotenciales de F.
3. Calcular la circulación de F a lo largo de la curva descripta por $x = 1 + \log(1 + |\sin(t)|), y = e^{t(\pi - t)}, z(t) = 1 + t/\pi, t \in [0, \pi]$.

---

5. Describir la familia de curvas ortogonales a la familia de parábolas de ecuaciones $x - 3 = ay^2, a \in \mathbb{R}$. Ilustrar mediante un gráfico.

2.2. Coloquios.

2.2.1. Coloquio 01/07/03.

Análisis II
Coloquio
01/07/03

---

1. Sea $F(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), 2)$ un campo vectorial C^2 en la región $R \subset \mathbb{R}^3$ descripta por $x^2 + y^2 + z^2 < 9$. Suponiendo que $\iiint\limits_D \nabla \cdot F \, dx \, dy \, dz = 3$, siendo D la región descripta por $0 \leq z \leq 1, x^2 + y^2 \leq 1$, calcular el flujo de F a través de S, siendo S la superficie cilíndrica (sin tapas!) descripta, en coordenadas cilíndricas, por $\rho = 1, 0 \leq z \leq 1$, orientada de manera que el vector normal se dirija hacia afuera del cilindro.

---

2. Sea $F(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), 2)$ un campo vectorial C^2 en la región $R \subset \mathbb{R}^3$ descripta por $x^2 + y^2 + z^2 < 9$. Suponiendo que $\nabla \times F = 0$ en R, calcular la circulación de F a lo largo de la curva parametrizada por $(\operatorname{sen} t, 1, \cos t)$, con t variando desde 0 hasta π.

---

3. Sea $R \subset \mathbb{R}^3$ la región descripta por $0 \leq z \leq 4 - x^2 - y^2, x^2 + y^2 - 2y \geq 0$. Hallar el área de la proyección de R sobre el plano yz.

---

4. Responder a cada uno de los siguientes problemas, justificando brevemente su respuesta.

1. El plano tangente en el punto $(1, 2, 3)$ a la superficie en $\mathbb{R}^3$ de ecuación $z = f(x, y)$ (siendo $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciable) tiene ecuación $3x - 2y + 2z = 5$. Cuánto vale $\frac{\partial f}{\partial x}(1, 2)$?
2. Una función C^2 $z = f(x, y)$ tiene máximo relativo 3 en $(1, 2)$. Hallar una ecuación del plano tangente en $(1, 2, 4)$ a la superficie de ecuación $z = f(x, y) + x^2$.
3. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función C^3 que satisface $\nabla f(1, 2) = (1, 0)$, y cuya matriz Hessiana en $(1, 2)$ es
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$
Hallar a de manera que la función $g(x, y) = f(x, y) + ax + (y - 2)^2$ tenga extremo en $(1, 2)$. Qué tipo de extremo es?

---

5. Una mariposa ingrávida (es decir sin peso) está posada en el punto $(1/2, 0, -1/3)$ (en metros) y se deja llevar por el viento, que pasa por cada punto (x, y, z) con velocidad $(z, x, 0)$ (en metros sobre segundo). Hallar y dibujar aproximadamente la trayectoria de la mariposa.

2.2.2. Coloquio 08/07/03.

Análisis II
Coloquio
08/07/03

---

1. Sea $F(x,y,z) = (P(x,y,z), 5, R(x,y,z))$ un campo vectorial C^2 en la región $D \subset \mathbb{R}^3$ descripta por $x^2 + y^2 + z^2 < 9$. Suponiendo que $\nabla \times F = 0$ en D, calcular la circulación de $G(x,y,z) = (P(x,y,z), 3x, zR(x,y,z))$ a lo largo de la curva de ecuaciones $x^2 + y^2 = 4, z = 1$ en la dirección tal que la proyección sobre el plano x, y está positivamente orientada.

---

2. Sea $F(x,y,z) = (P(x,y,z), 5, R(x,y,z))$ un campo vectorial C^2 en la región $D \subset \mathbb{R}^3$ descripta por $x^2+y^2+z^2 < 9$. Suponiendo que $\nabla \times F = 0$ en D, calcular, usando el teorema de la divergencia, el flujo de $G(x,y,z) = (x^3 + R(x,y,z), y^3 - P(x,y,z), z^3 - P(x,y,z))$ sobre la esfera de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, con el vector normal orientado hacia el exterior de la esfera.

---

3. Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ la superficie descripta por $x^2 + y^2 = 1, x^2 + z^2 - 2z \leq 0, x \leq 0, y \leq 0$. Hallar el flujo a través de S del campo $F(x,y,z) = (x, y, z^2)$ con S orientada de manera que la coordenada y de su vector normal resulte positiva.

---

4. Responder a cada uno de los siguientes problemas, justificando brevemente su respuesta.

1. Una función C^2 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ satisface
$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(f(1+t, 2-t))(0) &= 1 \\ \frac{d}{dt}(f(1+t, 2+t))(0) &= 2 \end{aligned}$$
Cuánto vale $\nabla(f)(1,2)$?
2. Una función C^2 $G(x,y,z)$ tiene máximo relativo 0 en $(1,2,3)$. Hallar una ecuación del plano tangente en $(1,2,3)$ a la superficie de ecuación $G(x,y,z) = 4x - y^2$.
3. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función C^3 que satisface $\nabla f(2,1) = (0,0)$, y cuya matriz Hessiana en $(2,1)$ es
$$\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
Hallar todos los $b \in \mathbb{R}$ de manera que la función $g(x,y) = -f(x,y) + (-1 + \frac{1}{b})(x-2)^2$ tenga extremo en $(2,1)$. Qué tipo de extremo es?

---

5. La fragancia de las rosas en un plano tiene intensidad $f(x,y) = x^2 + 4y^2$. Una abeja acude presurosa tratando de llegar a su lado. Si parte del $(2,1)$ y sigue, en cada punto, la dirección de máximo crecimiento de la fragancia, que camino seguirá y en que punto alcanzará las rosas tan ansiadas, que en $x = 3$ se encuentran alineadas?

2.2.3. Coloquio 15/07/03.

Análisis II
Coloquio
15/07/03

---

1. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función C^2, y sea $F(x, y, z) = (f'_x(x, z), 0, x + y + f'_z(x, z))$. Calcular la circulación de F a lo largo de la curva cerrada definida por $x^2 + y^2 + z^2 = 25$, $y = 4$, orientada de manera que su vector tangente en $(3, 4, 0)$ tenga coordenada z negativa.

---

2. Sea $F(x, y, z) = (xP(x, y, z), yP(x, y, z), zP(x, y, z) - 2)$ un campo vectorial C^2 en la región $D \subset \mathbb{R}^3$ descripta por $x^2 + y^2 + z^2 < 100$. Suponiendo que $\iiint\limits_M \nabla \cdot F \, dx\, dy\, dz = 3$, siendo $M \subset \mathbb{R}^3$ la región descripta por $x^2 + y^2 + z^2 \leq 25$, $4\sqrt{x^2 + y^2} \leq 3z$, hallar el flujo de F a través del casquete esférico definido por $x^2 + y^2 + z^2 = 25$, $z \geq 4$, con el vector normal orientado hacia el exterior de la esfera.

---

3. Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ el paraboloide descripto por $z = x^2 + y^2$, sea C el cilindro de radio 1 cuyo eje vertical pasa por $(0, 2, 0)$, y sea Π el plano tangente a S en el punto $(0, 2, 4)$. Si I es la circunferencia intersección de C con el plano $z = 0$, y para cada $(x, y) \in I$ $(x, y, h(x, y))$ está en Π, hallar el máximo valor de $h(x, y), (x, y) \in I$. Mostrar gráficamente que el valor hallado es efectivamente un máximo.

---

4. Responder a cada uno de los siguientes problemas, justificando brevemente su respuesta.

1. Sea $F(x, y, z) = (0, 0, zR(x, y))$ un campo vectorial C^2 en la región $D \subset \mathbb{R}^3$ descripta por $x^2 + y^2 + z^2 < 9$. Suponiendo que el flujo de F a través del borde del cilindro definido por $x^2 + y^2 \leq 1$, $0 \leq z \leq 2$ es 3, calcular $\iint\limits_M R(x, y)\, dx\, dy$, siendo M el disco descripto en el plano xy por $x^2 + y^2 \leq 1$.
2. Sean $F, G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dos funciones C^2 tales que $\nabla F(0, 1, 2)$ y $\nabla G(0, 1, 2)$ no son colineales, de modo que las ecuaciones
$$F(x, y, z) = 0,\ G(x, y, z) = 0$$
definen, en el entorno de $(0, 1, 2)$, una curva C que pasa por $(0, 1, 2)$.
Suponiendo que $(1, -1, 0)$ es tangente a C en $(0, 1, 2)$, calcular el determinante jacobiano
$$\left|\frac{\partial(F, G)}{\partial(x, y)}(0, 1, 2)\right|$$
3. Una función C^3 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tiene extremos en puntos P_1 y P_2. Calcular la circulación del campo $(f''_{xx}(x, y), f''_{xy}(x, y))$ a lo largo del segmento que va desde P_1 hasta P_2.

---

5. Sabiendo que $e^{-t}\operatorname{sen}(t)$ es solución de la ecuación diferencial $x'' + bx' + cx = 0$, hallar b y c (en $\mathbb{R}$), y encontrar todas las soluciones de $x'' + bx' + cx = t$ que satisfacen $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$.

2.2.4. Coloquio 05/08/03.

Análisis II
Coloquio-Tema 1
05/08/03

---

1. Sea $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un campo vectorial C^2, que satisface $\nabla \times F = (0, y, 0)$. Sea $f(a, b)$ la circulación de F a lo largo del borde del rectángulo descripto por

$$y = -a^2 + b^2 x, \ -1 \leq x \leq 1, \ -1 \leq z \leq 1$$

orientado de manera que su tangente en $(0, -a^2, 1)$ tenga coordenada x negativa.

Hallar el mínimo de $f(a, b), (a, b) \in \mathbb{R}^2$.

---

2. Sea F el campo vectorial definido para $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ por

$$F(x, y, z) = (\frac{2x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \frac{2y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \frac{2z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}})$$

- Calcular el flujo de F a través del borde de la región descripta por $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$, orientado con el normal hacia afuera.
- Calcular la divergencia de $F(x, y, z)$, para $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$.
- Usar lo anterior para calcular el flujo de F a través del borde de la región descripta por $4 \geq z \geq x^2 + y^2 - 4$, orientado con el normal hacia afuera.

---

3. Calcular el volumen de la región definida por $x^2 + y^2 - 6 \leq z \leq \sqrt{x^2 + y^2}$.

---

4. Responder a cada uno de los siguientes problemas, justificando brevemente su respuesta.

1. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua tal que $\int_0^4 f(t)\, dt = 1$. Calcular $\iint\limits_D f(x^2 + y^2)\, dx\, dy$ siendo $D \subset \mathbb{R}^2$ el disco descripto por $x^2 + y^2 \leq 4$.
2. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función C^2. Sabiendo que $f(x, y)$ tiene máximo, de valor 0, en el punto $(1, 2)$, hallar a de manera que la superficie de ecuación $x^2 + y^2 = 5 + az$ sea perpendicular a la superficie de ecuación $z = f(x, y)$ en $(1, 2, 0)$.

---

5. Hallar b de manera que $1/x^2$ sea solución de la ecuación diferencial

$$x^2 y'' + 2xy' + by = 0, \qquad x > 0$$

Hallar, con ese b, la solución general y una solución que satisfaga $y(1) = 3$, $y'(1) = -6$.

2.2.5. Coloquio 12/08/03.

Análisis II
Coloquio-Tema 1
12/08/03

---

1. Hallar a de manera que sea máximo el flujo del campo $F(x, y, z) = (x, y, z)$ a través del borde (¡con tapas!) del cilindro elíptico descripto por

$$\frac{x^2}{1 - \frac{4a^2}{1+4a^2}} + \frac{y^2}{1 + \frac{4a^2}{1+4a^2}} \leq 1, \qquad 0 \leq z \leq 1$$

---

2. Sea F un campo vectorial C^2, $F(x, y, z) = (xP(x, y, z), yQ(x, y, z), z)$, y sea S el semicírculo en el plano $y = 0$ descripto por $y = 0, x^2 + z^2 \leq 1, x \geq 0$.
Si el flujo del rotor de F a través de S orientado de manera que su normal tenga coordenada y positiva es 4, hallar la circulación de F a lo largo del arco de circunferencia parametrizado por $\sigma(t) = (\operatorname{sen}(t), 0, -\cos(t))$ con t desde 0 hasta π.

---

3. Calcular el área del trozo de superficie definido por $z = 3\sqrt{x^2 + y^2}, x^2 + y^2 - 2y \leq 0$.

---

4. Responder a cada uno de los siguientes problemas, justificando brevemente su respuesta.

1. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función C^3 tal que su polinomio de Taylor de grado 2 en $(2, 1)$ es
$$p(x, y) = 5(x - 2) + (y - 1) + (x - 2)^2 + (y - 1)^2$$
Hallar a y b en $\mathbb{R}$ de manera que $g(x, y) = f(x, y) - ax - by$ tenga mínimo en $(2, 1)$. ¿Cuánto vale el mínimo?

2. Sea C una curva regular en $\mathbb{R}^2$, positivamente orientada, que encierra una región R de área 4. Calcular $\int_C P\,dx + Q\,dy$, siendo $P(x, y) = 3x^2y + 5, Q(x, y) = x^3 - 4x - 3$.

---

5. Hallar la ecuación de una curva en $\mathbb{R}^2$ que pase por $(1, 2)$ y sea ortogonal a todas las curvas de nivel de la función definida por $f(x, y) = 2x^3 + y$.

3. Segundo cuatrimestre 2003

3.1. Parciales.

3.1.1. Parcial 11/10/03.

PRIMER PARCIAL ANALISIS II 11/10/03
TEMA 1

1.

1. Describir en coordenadas polares y graficar la región dada en coordenadas cartesianas por $x^2 + y^2 - x < 0$.
2. Hallar, si es posible, una constante a de manera que la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por
$$f(x,y) = \begin{cases} a & \text{cuando } y > x^2 \\ 1 - x^2 & \text{cuando } y < 0 \\ 1 + y - x^2 & \text{cuando } 0 \le y \le x^2 \end{cases}$$
sea continua en $\mathbb{R}^2$. Justificar.

---

2. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función diferenciable de la que sólo se sabe que la curva de ecuación $x^2 - y^2 = 3$ es una curva de nivel de f y que $f'_x(2,1) = 5$. Hallar $f'_v(2,1)$ siendo $v = (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$.

---

3. El vector $(1,1,1)$ es tangente a la intersección del plano de ecuación $x - cy = 0$ con la esfera de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ en $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$, con $z_0 > 0$. Determinar c y P_0.

---

4. Sean $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dos funciones C^2 tales que $g(x)$ tiene en $x = 2$ mínimo 1, $h(y)$ tiene en $y = 3$ mínimo 5, y $g''(x) > 0, h''(y) > 0$ para todo x, y (observe que en estas condiciones $g(x) > 0, h(y) > 0\ \forall x, y$). Estudiar los extremos de $f(x,y) = g(2x)h(3y+1)$. Justificar.

---

5. Cierta población que inicialmente ($t = 0$) consta de y_0 individuos, varía de manera que $\frac{y'(t)}{y(t)} = at$. ¿Cuánto vale a si cuando $t = 2$ $y = 2y_0$? (t está expresado en meses).

3.1.2. Parcial 14/10/03.

PRIMER PARCIAL ANALISIS II 14/10/03
TEMA 1

1.

1. Describir en coordenadas polares y graficar la región

$$D = \{(x,y) : y > (1-\sqrt{3})x/2 + (1+\sqrt{3})|x|/2\}$$

2. Hallar a y b, si es posible, de manera que $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{cuando } y < x \text{ y } x \geq 0 \\ a(y-x) & \text{cuando } y \geq x \text{ y } x \geq 0 \\ b(y+2x) & \text{cuando } y \geq -2x \text{ y } x < 0 \\ 0 & \text{cuando } y < -2x \text{ y } x < 0 \end{cases}$$

sea continua y $f(0,1) = 1$.

---

2. Sea $h(x,y) = f(x^2 + y^2 + g(x))$, siendo $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función C^1, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función C^1 tal que $f'(x) > 0\ \forall x$. Si h satisface $h'_v(1,1) = 0, v = (\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)$, hallar $g'(1)$.

---

3. Sea $f(x,y) = h(g(x,y))$, donde

$$g(x,y) = 2 - 3(x-1)^2/2 - (y-2)^2 + 2(x-1)(y-2)$$

y $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función C^2 que satisface $h'(x) > 0, \forall\, x$. Estudiar los extremos de f. Justificar.

---

4. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una función inyectiva y diferenciable, $f(x,y) = (u(x,y), v(x,y))$, tal que $f(1,1) = (3,2)$, y la matriz jacobiana de f en $(1,1)$ es

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}(1,1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Hallar una ecuación para la recta tangente en $(3,2)$ a la imagen por f de la curva de ecuación $x^2 + y^2 = 2$.

---

5. Hallar la familia de curvas ortogonales a la familia dada por $y = ax + 5a$, con $a \in \mathbb{R}$. ¿Cuáles son las curvas de estas familias que se cortan en $(0,5)$? Graficarlas.

3.1.3. Parcial 15/10/03.

PRIMER PARCIAL ANALISIS II 15/10/03
TEMA 1

1.

1. Graficar aproximadamente la curva C descripta en coordenadas polares por $\rho^2 = \frac{2}{1+\text{sen}^2(\varphi)}$.
2. Sea la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ que vale a en la región definida por $x^2 + 2y^2 \leq 2$, tal que $f(x, y) = 1 - x^2$ cuando $y > 1$ y $f(x, y) = 3 - x^2 - 2y^2$ en los demás casos. Hallar si es posible un valor de a de manera que f sea continua en todo $\mathbb{R}^2$.

---

2. Dada una función C^1 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f'(x) > 0$ $\forall x$, definimos $h(x, y) = f(x^2 + y^2 - x^3)$. Hallar los puntos $(x, y) \neq (0, 0)$ tales que $h'_v(x, y) = 0, v = \frac{(y,-x)}{|(y,-x)|}$.

---

3. Dada $f(x, y) = ax^3 + bxy + cy^2$, hallar a, b y c de manera que en $(0, 0)$ haya punto silla de f y en $(1, 1)$ un mínimo de f.

---

4. Dada $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ C^1 tal que $f(0, 0) = 1$ y $\nabla f(0, 0) = (1, 2)$, hallar aproximadamente, usando un desarrollo de Taylor de orden 1 en $(0, 0)$, el punto de intersección de la curva de nivel de f de ecuación $f(x, y) = 0.5$ con la recta de ecuación $y = 2x$.

---

5. Si $x^3 - x$ es solución de la ecuación diferencial $y'(x) + a(x)y(x) = 2x^2$, hallar la solución de esa ecuación que satisface $y(1) = 4$.

3.1.4. Parcial 01/11/03.

PRIMER PARCIAL ANALISIS II 01/11/03
TEMA 1

---

1. Sea $sg(u)$ (signo de u) la función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ definida por

$$sg(u) = \begin{cases} 1 & u > 0 \\ 0 & u = 0 \\ -1 & u < 0 \end{cases}$$

Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} sg(xy) & x^2 + y^2 > 2 \\ a - (x^2 + y^2) & x^2 + y^2 \leq 2 \end{cases}$$

(**a**) Hallar a de manera que f sea continua en $(1, 1)$

(**b**) Cuando a tiene el valor determinado en el punto anterior, determinar en que puntos de $\mathbb{R}^2$ f es discontinua. Justificar.

---

2. Sea S la superficie en $\mathbb{R}^3$ descripta por la ecuación $x^2 + y^2 + 4z^2 = 16$.

(**a**) Hallar la ecuación del pano tangente a S en un punto $P = (x_0, y_0, z_0) \in S$.

(**b**) Parametrizar la curva formada por los puntos P de S tales que el plano tangente a S en P pasa por el punto $(0, 0, 4)$. Ilustrar gráficamente.

---

3. Sea $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ una función C^1 que satisface $F(\cos t, \operatorname{sen} t, t) = 1\ \forall t \in \mathbb{R}$ y $F(1, 0, s) = 1\ \forall s \in \mathbb{R}$. Hallar la recta normal en $(1, 0, 0)$ a la superficie definida por $F(x, y, z) = 1$.

---

4. Supongamos que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función C^2 que satisface

$$f'(1) = 0, f''(1) > 0, f'(2) = 0, f''(2) < 0$$

y $f'(x) \neq 0$ en otros puntos, y $g(u) = 2u^3 - 9u^2 + 12u$. Hallar y clasificar los extremos de $h(x, y) = f(x - 1) - g(-y + 1)$

---

5. Hallar la ecuación de una curva que pasa por $(1, 1)$ e interseca ortogonalmente a *todas* las curvas de nivel de $f(x, y) = x^2y^3$.

3.1.5. Parcial 04/11/03.

PRIMER PARCIAL ANALISIS II 04/11/03
TEMA 1

---

1. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función que satisface

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & x + 2y > 2 \\ 0 & x + 2y < 0 \end{cases}$$

Definir $f(x,y)$ en los puntos $(x,y) : 0 \leq x + 2y \leq 2$ de manera que resulte continua en todo $\mathbb{R}^2$. Justificar.

---

2. Sea S la superficie en $\mathbb{R}^3$ descripta por la ecuación $x^2 + y^2 + 4z^2 = 1$.

(**a**) Hallar la ecuación de la recta normal a S en un punto $P = (x_0, y_0, z_0) \in S$.

(**b**) Hallar todos los puntos P de S tales que la recta normal a S en P pasa por el punto $(4,0,0)$. Ilustrar gráficamente.

---

3. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ una función C^2 que satisface $f'_v(1,1,4) = 4, v = (0,0,1)$. Sea $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función C^1 que satisface $g(1,1) = 4$, $\nabla g(1,1) = (3,2)$, y $f(x,y,g(x,y)) = 0 \ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$. Determinar $\nabla f(1,1,4)$.

---

4. Supongamos que $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es una función estrictamente positiva y C^3 cuyo gradiente se anula sólo en $P_1 = (1,-1)$ y en $P_2 = (-1,1)$, cuyo determinante Hessiano en esos puntos es no nulo, y tal que en P_1 tiene un máximo 10 y en P_2 tiene un mínimo 3. Estudiar los extremos de $g(x,y) = \frac{1}{f(x,y)}$.

---

5. Hallar la recta tangente al gráfico de $y(x)$ en $(2, y(2))$, siendo $y(x)$ la solución de $yy' + 3x = 0, y(1) = 2$

3.1.6. Parcial 05/11/03.

PRIMER PARCIAL ANALISIS II 05/11/03
TEMA 1

---

1. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} \alpha y & y > 4x^2 \\ \beta x^2 & y \leq 4x^2 \end{cases}$$

Hallar α y β de manera que f resulte continua en todo $\mathbb{R}^2$ y $f(1, -1) = 4$. Justificar.

---

2. Sea S la superficie en $\mathbb{R}^3$ descripta por la ecuación $x^2 + y^2 + 4z^2 = 2$. Hallar una parametrización de una curva en S que pasa por $(1, 1, 0)$ y tal que su recta tangente en todo punto es paralela al plano de ecuación $x = 2$. Ilustrar gráficamente.

---

3. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función C^2, y sea C la curva en $\mathbb{R}^3$ intersección de la esfera de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 5$ y el cilindro de ecuación $f(x, y) = 0$. Sea $P = (1, 0, 2)$, y supongamos que P está en C y que el vector $(2, 1, -1)$ es tangente a C en P. Hallar la recta normal en $(1, 0)$ a la curva de nivel de f que pasa por ese punto.

---

4. Supongamos que $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es una función C^3 cuyo gradiente se anula sólo en $P_1 = (1, -1)$ y en $P_2 = (-1, 1)$, cuyo determinante Hessiano en esos puntos es no nulo, y tal que en P_1 tiene un máximo 10 y en P_2 tiene un mínimo 3. Estudiar los extremos de $g(x, y, z) = z^3/3 - z + f(x, y)$.

---

5. Sea $y(x)$ solución de la ecuación diferencial $y'(x) + y^2(x)/(a^2 + 1) = 3$, $y(0) = 2$. Hallar a de manera que la recta tangente al gráfico de y en $(0, y(0))$ sea paralela a la recta de ecuación $y = 2x + 1$.

3.1.7. Parcial 09/12/03.

PRIMER PARCIAL ANALISIS II 09/12/03
TEMA 1

---

1. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & x^2y > 1 \\ a - x^2y & x^2y \leq 1 \end{cases}$$

(**a**) Hallar a de manera que f resulte continua en $\mathbb{R}^2$.

(**b**) Graficar el conjunto $\{(x,y) : f(x,y) < 3/2\}$

---

2. Sea $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ una función C^2 tal que $\nabla F(1,1,1) \neq (0,0,0)$. Si el plano tangente a la superficie de ecuación $F(x,y,z) = 0$ en $(1,1,1)$ tiene ecuación $x - 2y + z = 0$, hallar una ecuación de la recta tangente en $(1,1)$ a la curva definida en $\mathbb{R}^2$ por $F(x,y,x) = 0$, y determinar su intersección con el eje $x = 0$.

---

3. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función C^3 cuyo polinomio de Taylor en $(1,1)$ es $p(x,y) = 3 + (x-1)^2 - 2(y-1)^2$. Hallar a de manera que la función $g(x,y) = xf(x,y) + ax^2$ tenga extremo en $(1,1)$, y determinar si es un máximo o un mínimo.

---

4. La ecuación $x^2(y+1)z + e^{z^2y^2} = 2$ define, en el entorno de $(x_0, y_0, z_0) = (1,0,1)$, la función $z = f(x,y)$. Calcular $\nabla h(1,0)$, siendo $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función definida por $h(x,y) = \ln(x^2 + f(x,y))$.

---

5. La recta tangente en $(x_0, y(x_0))$ al gráfico de la función $y(x)$ corta al eje y en el punto $(0, x_0^2/4)$, para cada $x_0 \in \mathbb{R}$. Hallar y graficar la función $y(x)$, sabiendo además que $y(1) = 0$.

3.1.8. Parcial 16/12/03.

PRIMER PARCIAL ANALISIS II 16/12/03
TEMA 1

---

1. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función definida, cuando $|x| \neq 1$, por

$$f(x,y) = \frac{y(x^2-1)}{1-|x|}$$

(**a**) Hallar a y b de manera que $g(x,y)$ resulte continua en $\mathbb{R}^2$, siendo

$$g(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{cuando } -1 < x < 1 \\ a & \text{cuando } x \geq 1 \\ b & \text{cuando } x \leq -1 \end{cases}$$

(**b**) Graficar el conjunto $\{(x,y) : f(x,y) > 0\}$

---

2. Sea $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ una función C^2 tal que $\nabla F(1,1,1) = (-1,1,0)$. Hallar una ecuación de la recta normal en $(1,1)$ a la curva definida en $\mathbb{R}^2$ por $g(x,y) = F(x,y,x^2) + x - 1 = 0$.

---

3. Dado $p(x,y) = 3 + (x-1)^2 + 2(y-1)^2$, analizar los extremos de $g(x,y) = p(x^2+1, y^2)$.

---

4. La ecuación $x^2z^2 + y^2e^{z+y} = 1$ define, en el entorno de $(x_0, y_0, z_0) = (1,0,1)$, la función $z = f(x,y)$. Siendo $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función definida por $h(x,y) = \alpha xy + x^2 + f(x,y)$, hallar α de manera que el vector $(2,3)$ sea perpendicular a la curva de ecuación $h(x,y) = 2$ en el punto $(1,0)$.

---

5. Hallar la solución de la ecuación diferencial $x^2y' + (1-x)y = x$ que satisface $y(1) = 2$.

3.2. Coloquios.

3.2.1. Coloquio 09/12/03.

COLOQUIO ANALISIS II 09/12/03
TEMA 1

---

1. Sea $F(x,y,z) = (P(x,y,z) - 3x, -x(z-2)Q(x,y,z), xyQ(x,y,z))$ un campo vectorial C^2 en la región $R \subset \mathbb{R}^3$ descripta por $x^2+y^2+z^2 < 100$. Suponiendo que $\iiint_D \nabla \cdot F \, dx\, dy\, dz = 3$, siendo D la región descripta por $z \geq \sqrt{x^2+y^2}, y^2+z^2-4z \leq 0$, calcular el flujo de F a través de S, siendo S la superficie descripta por $z = \sqrt{x^2+y^2}, y^2+z^2-4z \leq 0$, orientada de manera que la componente z de su vector normal sea positiva.

---

2. Sea $F(x,y,z) = (P(x,y,z), Q(x,y,z), xy+1)$ un campo vectorial C^2 en la región $D \subset \mathbb{R}^3$ descripta por $x^2+y^2+z^2 < 100$. Suponiendo que $\nabla \times F = (1,1,0)$ en D, calcular la circulación de F a lo largo de la curva en el plano $x = y$, parametrizada por $(\operatorname{sen} t, \operatorname{sen} t, \cos t)$, con t variando desde 0 hasta π.

---

3. Sea $D \subset \mathbb{R}^3$ la región descripta por $0 \leq z \leq 1, x^2+4y^2-z^2 \leq 1$. Hallar el área de la proyección de D sobre el plano yz. Ilustrar gráficamente.

---

4. Responder a cada uno de los siguientes problemas, justificando brevemente su respuesta.

(**a**) Hallar una ecuación del plano tangente en $(1,2,4)$ a la superficie de ecuación $f(x,y,z) = 3$, sabiendo que la función C^2 $w = f(x,y,z)$ tiene, sujeta a la condición $y^2 - 4x^2 = 0$, máximo relativo 3 en $(1,2,4)$, y que $\nabla f(1,2,4)$ es no nulo.

(**b**) Calcular la circulación del campo (x^2, y) a lo largo de la curva definida por $x = 2y^3$, desde $(0,0)$ hasta $(-2,-1)$.

---

5. Un corcho flota en la superficie de un río estacionario (es decir que la velocidad $V(x,y)$ del fluído en cada punto (x,y) de la superficie depende de su posición (x,y) pero no del tiempo). El río fluye según el campo de velocidades $V(x,y) = (1,x)$. Si el corcho pasa por el punto $(1,1)$, en que punto cortará su trayectoria a la recta $x = 2$?

3.2.2. Coloquio 16/12/03.

Análisis II
Coloquio
Tema 1
16/12/03

---

1. Dada un función C^2 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definimos $F(x, y, z) = (x + f'_y(x, y), y - f'_x(x, y), 0)$. Sea R la región en $\mathbb{R}^3$ descripta por $x^2 + y^2 \leq z \leq h$. Hallar $h > 0$ de manera que el flujo de F a través del borde de R hacia su exterior sea 3.

---

2. Sea $F(x, y, z) = (P(x, y, z), 4 + x^2y, -3 + x)$ un campo vectorial C^2 en $\mathbb{R}^3$. Calcular el flujo del rotor de F a través de la superficie descripta por $z = y, x \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1$, con el vector normal de manera que tenga componente z negativa, sabiendo que la circulación de F a lo largo de la curva parametrizada por $(\cos t, \operatorname{sen} t, \operatorname{sen} t)$ con t desde $-\pi/2$ a $\pi/2$ es 1.

---

3. Sea C la curva parametrizada por $(t \cos t, t \operatorname{sen} t, 3t), 0 \leq t \leq 2\pi$.

(**a**) Comprobar que C está incluída en el cono de ecuación $x^2 + y^2 = z^2/9$, y graficar aproximadamente C.

(**b**) Calcular la longitud de C.

---

4. Responder a cada uno de los siguientes problemas, justificando brevemente su respuesta.

(**a**) Las curvas de nivel $f(x, y) = k$ (para $1 < k < 4$) de una función continua f son las circunferencias de ecuación $x^2 + y^2 = \sqrt{k}$. Calcular $\iint_D f(x, y)\ dxdy$, siendo D la región en $\mathbb{R}$ descripta por $1 \leq x^2 + y^2 \leq 2, x \geq 0, y \geq 0$.

(**b**) Analizar los extremos de $f(x, y) = x/2 - y^2$ en la curva descripta por $y = x, x^2 + 2y^2 < 1$.

---

5. Sabiendo que la ecuación

$$(3y^2 + 8xy^3)dx + (2xy + 6x^2y^2)dy = 0$$

tiene un factor integrante de la forma x^α, hallar α y encontrar una solución cuyo gráfico pase por $(1, 1)$.

3.2.3. Coloquio 17/02/04.

Análisis II
Coloquio
Tema 1
17/02/04

---

1. Sea $F(x,y,z) = (-yz, -xz + x, z)$.

(**a**) Hallar $r > 0$ sabiendo que el flujo del rotor de F a través de la semiesfera descripta por $x^2 + y^2 + (z-r)^2 = r^2, z \leq r$, orientada de manera que el normal tenga componente z positiva, es 4π.

(**b**) Calcular la circulación de F a lo largo de la curva de ecuaciones $x^2 + y^2 = r^2, z = r$, orientada de manera que su vector tangente unitario en $(r, 0, r)$ sea $(0, 1, 0)$.

---

2. Sea $F(x,y,z) = (x,y,z)$. Hallar $h > 0$ de manera que el flujo de F hacia el exterior del cilindro descripto por $(x-1)^2 + (y-2)^2 \leq 4, 0 \leq z \leq h$ sea igual al flujo de F hacia el exterior del volumen descripto por $x^2 + y^2 \leq z \leq 2x$.

---

3. Sea $f(x,y) = (x-2)^2 + y^2$, y sea C la curva descripta por $4x^2 + 9y^2 = 1$.

(**a**) Dibujar aproximadamente C.

(**b**) Hallar y clasificar los extremos de f en C. Interpretar geométricamente.

---

4. Responder a los siguientes problemas, justificando brevemente su respuesta.

(**a**) Una función continua $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ satisface $f(x,y) > 3$ cuando $x^2 + y^2 > 1$ y $f(x,y) < 3$ cuando $x^2 + y^2 < 1$. Cuánto vale $f(1,0)$?

(**b**) Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función C^2 tal que $\nabla(f)(1,1) = (1,1)$ y $\nabla(f)(-1,-1) = (1,-1)$. Calcular la circulación del campo $F(x,y) = (f''_{xx}(x,y), f''_{xy}(x,y))$ a lo largo de la curva parametrizada por $\sigma(t) = (t, \mathrm{sen}(t\pi/2))$ con t desde -1 a 1.

---

5. Dada la ecuación diferencial $x^2y'' + axy' + by = 3x^2$ $(x > 0)$.

(**a**) Hallar a y b sabiendo que $y(x) = x^2$ es solución de la ecuación y que $y(x) = x$ es solución de la ecuación homógenea asociada.

(**b**) Hallar todas las soluciones que satisfacen $y(1) = y(2) = 0$.

3.2.4. Coloquio 24/02/04.

Análisis II
Coloquio
Tema 1
24/02/04

---

1. Sea $F(x,y,z) = (xy^2 + 3z, x^2y + x, z^2)$. Hallar a de manera que la circulación de F a lo largo del perímetro del triángulo de vértices $(1,0,0), (0,0,1), (0,a,0)$, orientado de manera que vaya de $(1,0,0)$ hacia $(0,0,1)$, sea 6.

---

2. Una rampa de ascenso peatonal responde a la parametrización $X(u,v) = (u\cos(v\pi/2), u\sin(v\pi/2), v)$, $2 \leq u \leq 3, 0 \leq v \leq 4$ (u y v en metros).

(**a**) Dibujar aproximadamente la rampa.

(**b**) Calcular la cantidad de asfalto necesaria para reasfaltar la rampa, si se necesitan dos litros de asfalto para reasfaltar cada metro cuadrado.

---

3. Calcular el flujo del campo $G(x,y,z) = (z + Q(x,y) + x, -P(x,y) - y, x)$ hacia el exterior del cilindro elíptico descripto por $x^2 + y^2/4 \leq 1, 0 \leq z \leq 3$, sabiendo que $F(x,y,z) = (P(x,y), Q(x,y), z)$ es un campo vectorial C^2 en $\mathbb{R}^3$, cuya circulación a lo largo de la elipse de ecuaciones $x^2 + y^2/4 = 1, z = 0$, orientada de manera que su tangente en $(0,2,0)$ sea $(-1,0,0)$, es 2.

---

4. Responder a los siguientes problemas, justificando brevemente su respuesta.

(**a**) La superficie S_1 tiene ecuación $-3x^2 + 6x + 2y^2 - z^2 = 4$, y la superficie S_2 está parametrizada por $X(u,v) = (2\cos(u)\sin(v), 2\sin(u)\sin(v), \sqrt{2}\cos(v))$, $0 < u < 2\pi$, $0 < v < \pi$. Mostrar que S_1 y S_2 se cortan ortogonalmente en $(1,1,1)$.

(**b**) Sea $f(x,y) = xy$. Mostrar que f alcanza un único extremo en el arco de circunferencia $x^2 + y^2 = 2, x > 0, y > 0$, clasificarlo y hallar su valor.

---

5. La corriente en cada punto (x,y) de la superficie de un canal descripto por $0 < y < 2$ (y en metros) está dada por $V(x,y) = (y^2 + 1, 2xy)$. Si un pato nada perpendicularmente a la corriente, y parte del punto $(1,2)$, en qué punto alcanza la otra orilla?

3.2.5. Coloquio 02/03/04.

Análisis II
Coloquio
Tema 1
02/03/04

---

1. Sea $F(x,y,z) = (zf'_y(x,y,z) + 2x, -zf'_x(x,y,z) + y, z)$, siendo f un campo escalar C^2 en $\mathbb{R}^3$. Calcular el flujo de F a través de la superficie descripta por $z = 3 - x^2 - y^2 - 2x, 0 \leq z$, orientada de manera que su normal tenga componente z negativa.

---

2. Hallar el punto más lejano del origen en la porción de curva descripta por $x^3+y^3 = 2, 0 \leq x, 0 \leq y$. Justificar.

---

3. Sea C la curva parametrizada por $\sigma(t) = (2a\cos t, \operatorname{sen} t, \cos t), 0 \leq t \leq 2\pi$, orientada de manera que su tangente en $\sigma(t)$ tenga el mismo sentido que la derivada de σ en t. Dado un campo escalar C^2 en $\mathbb{R}^2$ $f(x,y)$, hallar todos los a de manera que el campo vectorial $F(x,y,z) = (f_x(x,y), f_y(x,y) + 2z, z^2)$ tenga circulación 0 a lo largo de C.

---

4. Responder a los siguientes problemas, justificando brevemente su respuesta.

(**a**) Una porción S de la superficie de una esfera de radio 3 centrada en el origen tiene área 2. ¿Cuánto vale el flujo del campo $F(x,y,z) = (x,y,z)$ a través de S hacia adentro de la esfera?

(**b**) Sean $f(x,y)$ un campo escalar C^2, $\sigma(t) = (x(t), y(t))$ una parametrización C^1 de la curva de ecuación $f(x,y) = 3$, y $(x_0, y_0) = (x(t_0), y(t_0))$ un punto en esa curva. ¿Cuánto vale $y'(t_0)$ si $\nabla(f)(x_0,y_0) = (3,1)$ y $x'(t_0) = -1$?

---

5. Hallar una curva en la región $x < 10, y > 10$, que pase por $(1,11)$, y tal que el punto de intersección de su recta tangente en cada punto (x_0,y_0) con la recta de ecuación $y = 10$ tiene abcisa $-(x_0 - 10)^2 + x_0$.

4. Primer cuatrimestre 2004

4.1. Parciales.

4.1.1. Parcial 08/05/04.

Análisis II
Parcial
Tema 1
08/05/04

---

1. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x(9x - 2y)$. Si

$$g(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & y \leq 0 \\ 1 & y > 0 \end{cases}$$

describir el conjunto de puntos de continuidad de g.

---

2. Hallar una función C^1 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de manera que la curva C parametrizada por $t \mapsto (t^2, f(t), t)$, $t \in (-2, 0)$ corte a la superficie de ecuación $x^2 - z - 1 - y = 0$ ortogonalmente en $(1, 1, -1)$, y hallar el plano normal a C en ese punto.

---

3. Hallar el gradiente en $(1,2)$ de la función C^1 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, sabiendo que la imagen de la función definida por

$$(u,v) \mapsto (u^2, v, f(u, 2v)), \quad 0 < u < 2,\ 0 < v < 2$$

está contenida en la superficie de ecuación $x^2 + y + z = 2$, y que $(1, 1, 0)$ está en dicha imagen.

---

4. Describir el conjunto de los números reales $c \neq 0$ tales que

$$f(x,y) = x + \frac{1}{x} + cxy^2$$

tiene exactamente dos extremos, y clasificarlos.

---

5. Una bola esférica de nieve se derrite de manera que la derivada de su volumen $V(t)$ respecto al tiempo t es proporcional a su área en ese mismo momento. Si para $t = 0$ el diámetro es $5cm$ y 30 minutos después el diámetro es $2cm$, ¿en qué momento el diámetro será de $1cm$? (el área de una esfera de radio R es $4\pi R^2$ y su volumen $\frac{4}{3}\pi R^3$)

4.1.2. Parcial 11/05/04.

Análisis II
Parcial
Tema 1
11/05/04

---

1. Dada $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} 1-y & -x \leq y \leq x\sqrt{3} \\ 1+xy^2 & x<0 \\ a & \text{en otros casos} \end{cases}$$

(**a**) Hallar a de manera que f sea continua en $(0,0)$.

(**b**) Para el a hallado en el inciso anterior, describir *todos* los puntos de discontinuidad de f.

---

2. Hallar una función C^1 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de manera que la curva C parametrizada por $t \mapsto (t^2, -t, t), t \in (-2,0)$ corte a la superficie S de ecuación $x^2 + f(x)z + 1 - y = 0$ ortogonalmente en $(1,1,-1)$, y hallar el plano tangente a S en ese punto.

---

3. Dada la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $f(u,v) = (u^2+v, v-u)$, describir la imagen por f de la recta que pasa por $(0,0)$ y $(1,2)$, y hallar un vector tangente a esa imagen en el punto $(3,1)$.

---

4. Sabiendo que en $(0,3)$ hay un extremo de la función $f(x,y) = y + \frac{a}{y} + 9x^2y$ determinar a y hallar y clasificar todos los extremos de f en su dominio.

---

5. Una solución $y(t)$ de la ecuación diferencial $y'(t) = 2e^t - 2by(t)$ satisface $y(0) = 1$, y en el punto $(0,1)$ la tangente a su gráfico es horizontal. Hallar b y la función y.

4.1.3. Parcial 12/05/04.

Análisis II
Parcial
Tema 1
12/05/04

---

1. Dada $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} a & x^2+y^2<1 \\ 1-y & 1 \leq x^2+y^2 \leq 4 \\ x^2-y & x^2+y^2>4 \end{cases}$$

(**a**) Hallar a para que f sea continua en $(0,1)$.

(**b**) Para el valor de a hallado en el inciso anterior, describir el conjunto de puntos de continuidad de f.

---

2. Hallar los números reales a, b sabiendo que la curva C parametrizada por $t \mapsto (t-1, t^2+b, a(t-1)+1), t \in (0,2)$ pasa por $(0,2,1)$ y está contenida en una superficie S cuyo plano tangente en $(0,2,1)$ tiene ecuación $3x - y + 2z = 0$.

---

3. Hallar el gradiente en $(x_0, y_0) = (1,-1)$ de la función C^1 $f(x,y)$, sabiendo que $(1,2,1)$ es perpendicular a $\sigma'_u(1,-1)$ y a $\sigma'_v(1,-1)$, siendo

$$\sigma(u,v) = (u, f(u,v), f(u,-v^2))$$

---

4. Describir el conjunto de los números reales a tales que

$$f(x,y) = 9x^2 + 6axy + y^2 + y^4$$

tiene exactamente dos extremos y clasificarlos.

---

5. Hallar a y la solución $y(t)$ de la ecuación diferencial $y'(t) = 2y(t) + a$ sabiendo que $y(0) = 2$ y que $y'(2) = e^4$.

4.1.4. Parcial 29/05/04.

Análisis II
Parcial
Tema 1
29/05/04

---

1. Dada $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = \begin{cases} y & x^2 + y^2 < 1 \\ x & x^2 + y^2 \geq 1 \end{cases}$$

(**a**) Describir en coordenadas polares el conjunto $\{(x, y) : f(x, y) > 0\}$.

(**b**) Describir *todos* los puntos de discontinuidad de f.

---

2. Sabiendo que $P = (1, -1, 1)$ está en el gráfico de la función C^2 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y que la recta de ecuaciones $x + y = 0, x - z = 0$, es perpendicular al gráfico de f en P, hallar $\nabla(f)(1, -1)$ y calcular aproximadamente $f(1.01, -0.98)$.

---

3. Hallar $\nabla(F)(1, 2, 1)$, sabiendo que $F(u, v, w)$ es una función C^2 que satisface $F'_u(1, 2, 1) = -2$ y $G(x, y) = F(x^2, y, f^2(x, y)) = 0$, siendo $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función C^2 tal que $f(-1, 2) = -1$ y $\nabla(f)(-1, 2) = (2, 1)$.

---

4. Hallar $a < 0$ de manera que la función

$$f(x, y) = x^2 - 2ax + y^2x^2 + y^2$$

tenga un mínimo de valor -1. Para ese valor de a, hallar y clasificar todos los extremos de f.

---

5. Sabiendo que $y(x) = xu(x)$ es solución de la ecuación diferencial

$$y'(x) = \frac{2y(x) + x}{x}$$

para $x > 0$, hallar $u(x)$ y la solución $y(x)$ sabiendo además que $y(1) = 2$.

4.1.5. Parcial 01/06/04.

Análisis II
Parcial
Tema 1
01/06/04

---

1. Sea $f(x,y) = (x^2+y^2-4)(\sqrt{3}x - y)$.

(**a**) Describir en coordenadas polares el conjunto $\{(x,y) : f(x,y) > 0\}$.

(**b**) Si

$$g(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{cuando } f(x,y) > 0 \\ f(x,y)+1 & \text{cuando } f(x,y) \leq 0 \end{cases}$$

describir el conjunto de puntos de continuidad de g.

---

2. Sean C_1 y C_2 dos curvas parametrizadas respectivamente por

$$t_1 \mapsto (t_1^2, t_1, t_1), \qquad t_1 \in (-1,1)$$

y por

$$t_2 \mapsto (t_2 - 1, t_2 - 1, at_2(t_2 - 1)), \qquad t_2 \in (0,2)$$

(**a**) Mostrar que las curvas se cortan en el punto $(0,0,0)$.

(**b**) Hallar a de manera que el corte de las curvas en $(0,0,0)$ sea ortogonal.

---

3. Sea $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función C^2 tal que $h(4) = 0, h'(4) = 2$. Si la función $z = f(x,y)$ está definida implícitamente por la ecuación $h(x^2+y^2-2z) = 0$ en un entorno de $(2,0,0)$, calcular $\nabla(f)(2,0)$.

---

4. Hallar todos los pares a, b de números reales con $b \neq 0$ de manera que

$$f(x,y) = x + \frac{2a}{x} + bxy^2$$

tenga un extremo local de valor 4, y para esos valores de a, b hallar todos los extremos de f y clasificarlos.

---

5. Sabiendo que el gráfico de una solución particular de la ecuación diferencial

$$x(y'(x) - y(x)) = 2ae^{x-1}(x+1)$$

pasa por $(1,1)$ y es paralelo en este punto a la recta de ecuación $y = 2x - 4$, hallar a y la solución general de la ecuación.

4.1.6. Parcial 02/06/04.

Análisis II
Parcial
Tema 1
2/06/04

---

1. Dada $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 + y^2 - 3 & \text{cuando } x < 0 \\ -2\sqrt{3}x + 2y & \text{cuando } x \geq 0 \end{cases}$$

(**a**) Describir en coordenadas polares el conjunto $A = \{(x,y) : f(x,y) < 0\}$.

(**b**) Describir el conjunto de *todos* los puntos de continuidad de f.

---

2. Sabiendo que $P = (1,0,1)$ está en el gráfico de la función C^2 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y que $(2, -2\sqrt{3}, 2)$ es perpendicular a ese gráfico en P, describir e ilustrar gráficamente el conjunto de los vectores v de norma 1 tales que la derivada direccional $f'((1,0), v) > 0$.

---

3. Suponga que $\sigma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ satisface las ecuaciones

$$\begin{aligned} x^2 + y + z &= 4 \\ 4x - y + z &= 8 \end{aligned}$$

y que $\sigma(0) = (2,0,0), \sigma'(0) \neq 0$.

Si $f(x,y,z) = x^2 - az\cos(y)$ y $h(t) = f(\sigma(t))$, hallar a de manera que $\frac{dh}{dt}(0) = 0$.

---

4. Describir todos los pares de números reales a, b con $a \neq \frac{1}{2}$ de manera que

$$f(x,y) = bx - a(x - 3y)^2 + (x^2 + 9y^2)$$

tenga mínimo en $(0,0)$.

---

5. Dada la ecuación diferencial

$$y'(x) + (2-a)y(x) = bx + x^2$$

(**a**) Hallar a y b sabiendo que $y_1(x) = x^2$ es solución de la ecuación diferencial.

(**b**) Para los valores de a y b determinados en el inciso anterior, hallar la solución $y_2(x)$ de la ecuación diferencial que satisface además $y_2'(0) = -1$.

4.1.7. Parcial 06/07/04.

Análisis II
Parcial
Tema 1
06/07/04

---

1. Sea

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{cuando } x^2y^2 < 1 \\ -\frac{8x^2}{y} & \text{cuando } x^2y^2 \geq 1 \end{cases}$$

(**a**) Describir el conjunto de los puntos de discontinuidad de $f(x,y)$.

(**b**) Ilustrar gráficamente el conjunto $\{(x,y) : f(x,y) \geq 1\}$

---

2. Sea C la curva plana parametrizada por

$$t \mapsto (t, \operatorname{sen}(t)), \quad t \in (0,\pi)$$

Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es una función C^2 de manera que su curva de nivel 3 contiene a C, y $\frac{\partial f}{\partial y}(\pi/2, 1) = 2$, hallar una ecuación del plano tangente al gráfico de f en el punto $(\pi/2, 1, 3)$.

---

3. Sea $z = f(x,y)$ una función definida por la ecuación

$$a(x^2 - 1) + y + ze^{z-1} = 2$$

en un entorno de $(1,1,1)$. Sean $P = (1,1), v = (\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)$. Sabiendo que la derivada direccional $f'(P,v)$ es 0, determinar a y hallar una ecuación de la recta normal en P a la curva de ecuación $g(x,y) = 0$, siendo $g(x,y) = x^2 - f(x,y)$.

---

4. Hallar todos los pares a, b de números reales de manera que $(1,2)$ sea punto crítico de $f(x,y) = e^{(bx-\frac{y}{2})^2} + x^2 + ax$, y analizar en cada caso si en ese punto hay extremo de f.

---

5. Un cuerpo cuya temperatura inicial T_C es de 20 grados se enfría por contacto con el medio ambiente, cuya temperatura T_A es constante 10 grados. Si la velocidad de cambio de la temperatura del cuerpo $\frac{dT_C(t)}{dt}$ es proporcional a la diferencia $T_C(t) - T_A$, y pasada media hora el cuerpo está a 15 grados, cuándo llegará a 12 grados?

4.2. Coloquios.

4.2.1. Coloquio 06/07/04.

Análisis II
Coloquio
Tema 1
06/07/04

---

1. Sea $U(x, y, z)$ una función armónica en $\mathbb{R}^3$, y sea

$$F(x, y, z) = (x^3 + U'_x(x, y, z), y^3 + U'_y(x, y, z), z^3 + U'_z(x, y, z))$$

Calcular el flujo de $F(x, y, z)$ a través del borde del cuerpo V descripto por $x^2 + y^2 + z^2 \leq 8$, $x \geq \sqrt{z^2 + y^2}$, hacia el exterior de este volumen.

---

2. Sea S la porción de esfera descripta por $(x-1)^2 + y^2 + z^2 = 4$, $2x + y \leq 0$, y sea $F(x, y, z) = (2x^3y^4, x^3y^4, 0)$. Mostrar que el flujo de $\nabla \times F$ a través de S orientada con el normal hacia el exterior de la esfera es 0.

---

3. Calcular el área de la proyección sobre el plano yz del cuerpo descripto por $x^2 + y^2 \leq 4$, $1 \leq x + z \leq 5$. Graficar.

---

4. Responder a cada uno de los siguientes problemas, justificando brevemente su respuesta.

(**a**) Sabiendo que la función C^2 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es constante a lo largo de la curva parametrizada por $t \mapsto (1 + \cos t, 2), t \in (0, 2\pi)$, calcular $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1, 2)$.

(**b**) Hallar la distancia de la curva de ecuaciones $x^2 + y^3 = 1$, $z = 2$ al plano de ecuación $z = 5$.

---

5. La superficie de un canal lleno de agua tiene la forma de la banda

$$-10 \leq y \leq 10, \quad x > 0$$

y la velocidad superficial del agua en (x, y) está dada (independientemente del tiempo, es decir que se trata de un flujo estacionario) por

$$V(x, y) = (x^2(100 - y^2), 0)$$

Si a tiempo $t = 0$ se liberan dos corchos en la superficie, uno en el punto $P_1 = (1, 1)$ y el otro en el punto $P_2 = (2, 3)$: ¿cuál de los corchos llegará antes a la recta de ecuación $x = 10$?

4.2.2. Coloquio 13/07/04.

Análisis II
Coloquio
Tema 1
13/07/04

---

1. Sea
$$F(x,y,z) = (x, z^2 - y, 4z + 1)$$
y sea C la curva borde de la superficie parametrizada por
$$(u,v) \mapsto (2u, v^2, v), \quad u^2 + v^2 \leq 1$$
Calcular la circulación de $F(x,y,z)$ a lo largo de C, orientada de manera de seguir el orden $(2,0,0) \mapsto (0,1,1) \mapsto (-2,0,0)$ en su recorrido.

---

2. Sea, cuando $x^2 + z^2 > 0$,
$$F(x,y,z) = (\frac{z}{\sqrt{x^2+z^2}} - 2zy, 0, xy - \frac{x}{\sqrt{x^2+z^2}})$$
Mostrar que el flujo de F a través de la superficie descripta por
$$x^2 + z^2 = 4, \quad 1 \leq y \leq 2$$
es igual al flujo de F a través de la superficie descripta por
$$x^2 + y^2 + z^2 = 25, \quad 1 \leq y \leq 2$$
con la orientación elegida en ambos casos con el normal alejándose del eje y.

---

3. Dada la región R descripta por
$$0 \leq y \leq z - \frac{x^2}{z}, \quad 1 \leq z \leq 2$$
graficar aproximadamente R y calcular
$$\iiint_R z \, dxdydz$$

---

4. Responder a cada uno de los siguientes problemas, justificando brevemente su respuesta.

(**a**) Graficar aproximadamente la curva en $\mathbb{R}^2$ descripta en coordenadas polares por
$$\rho = 1 + \cos(2\varphi)/2, \quad \varphi \in (0, 2\pi)$$

(**b**) Hallar $c > 0$ y $d > 0$ de manera que el área encerrada por la elipse de ecuación $c^2x^2 + d^2y^2 = 1$ que pasa por $(1,2)$ sea mínima. (*Nota*: El área encerrada por una elipse de ecuación $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ es $ab\pi$)

---

5. Hallar todos los puntos de intersección con la recta de ecuación $x = 3$ de la línea de flujo que pasa por $(1,2)$ del campo $V(x,y) = (-1 + 3y, 2)$.

4.2.3. Coloquio 20/07/04.

61.03 ANÁLISIS MATEMÁTICO II
COLOQUIO 20/07/04
TEMA 1

---

1. Sean $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función C^1, y R la región descripta por

$$x^2 + z^2 \leq 4, \quad h(x,z) - 2 \leq y \leq h(x,z) + 3$$

Dado el campo vectorial $F(x,y,z) = (x, 2, z + 3y)$, calcular el flujo de F a través del borde de R, con el normal orientado hacia adentro de R.

---

2. Calcular el área de la superficie S descripta por

$$y^2 + z^2 = 16, \quad x^2 + y^2 + 8(z - 4) \leq 0$$

---

3. Sabiendo que el campo C^2 $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,

$$F(x,y,z) = (P(x,y,z), 2zQ(x,y,z), R(x,y,z) + z^2)$$

satisface $\iint\limits_S (\nabla \times F).\vec{n}\, dS = 4$ siendo S la semiesfera descripta por $x^2 + y^2 + z^2 = 4,\ z \geq 0$ y $\vec{n}$ el normal unitario hacia fuera de la esfera, calcular el flujo del rotor de

$$G(x,y,z) = (-2P(x,y,z), z^3, z^2 - 2R(x,y,z))$$

a través de la superficie descripta por $x^2 + y^2 + 2z^2 = 4,\ z \leq 0$ con el normal de manera que su coordenada z sea positiva. Justificar.

---

4. Responder a cada uno de los siguientes problemas, justificando brevemente su respuesta.

(**a**) Sea C una curva en $\mathbb{R}^2$ cerrada y simple. Calcular el área de la región D encerrada por C sabiendo que $\int\limits_C 4y\, dx + 3x\, dy = -3\pi$.

(**b**) Sabiendo que la curva C es una línea de flujo del campo

$$F(x,y,z) = (xz, y, x + z)$$

y que pasa por $P = (1,2,1)$, hallar una ecuación del plano normal a C en P.

---

5. Una solución $y(t)$ (donde t indica el tiempo) de la ecuación diferencial

$$y''(t) + 4y'(t) + 8y(t) = 0$$

describe el desplazamiento vertical respecto a su posición de equilibrio (considerando positivos los desplazamientos hacia abajo) de un cuerpo de masa 1 que sube y baja colgado de un resorte enganchado a un clavo en una pared, rozando con la pared. Sabiendo que en el instante inicial el cuerpo pasa hacia arriba por su posición de equilibrio (es decir que $y(0) = 0$) con velocidad $y'(0) = -1$, calcular la energía cinética ($E_c(t) = \frac{1}{2}m(y'(t))^2$) del cuerpo como función de t. Graficar esta función. (*Nota: suponer que las unidades en este problema se han elegido de manera consistente*)

4.2.4. Coloquio 27/07/04.

61.03 ANÁLISIS MATEMÁTICO II
COLOQUIO 27/07/04
TEMA 1

---

1. Sea C la curva en $\mathbb{R}^3$ parametrizada por

$$t \mapsto (1-\cos(t), 2+\operatorname{sen}(t), 1-\operatorname{sen}(t)+\cos(t)), \quad t \in [0,2\pi]$$

orientada con t creciente.

(**a**) Hallar la ecuación de un plano que contenga a C.

(**b**) Calcular la circulación a lo largo de C del campo vectorial $F(x,y,z) = (e^{x^2}, x+\operatorname{sen}(y), z^4)$.

---

2. Sea R la región de $\mathbb{R}^3$ descripta por

$$4 \le x^2+y^2+z^2 \le 9, \quad 0 \le z \le x\sqrt{3}$$

(**a**) Graficar aproximadamente R y su proyección sobre el plano zx.

(**b**) Hallar el volumen de R.

---

3. Sea S la porción de esfera descripta por $(x-4)^2+(y-1)^2+z^2 = 25$, $x \le 4$, y sea, para cada $P = (x,y,z) \in S$, $\vec{n}(P) = (a,b,c)$ el vector normal a S unitario y hacia el exterior de la esfera. Calcular la integral de superficie

$$\iint_S (5a - b + 3c)\, dS$$

---

4. Responder a cada uno de los siguientes problemas, justificando brevemente su respuesta.

(**a**) Sea D una región en $\mathbb{R}^2$ de área 2. Calcular el área de la región

$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (2x-y, x+2y) \in D\}$$

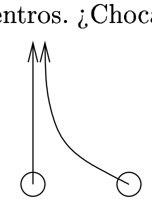
(**b**) Sea C el gráfico de una función C^2 $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $g(1) = -1$. Sabiendo que la función C^2 $f(x,y)$ restringida a C tiene extremo en $P = (1,-1)$, y que $\nabla(f)(P) = (3,2)$, hallar $g'(1)$.

---

5. Sea $V(x,y) = (10-x, y+1)$ un campo de velocidades. Los centros de dos móviles circulares de radio 1 se mueven según ese campo (es decir que para cada uno de ellos, la velocidad al pasar por un punto (x,y) es $V(x,y)$), partiendo simultáneamente de $P_1 = (10,2)$ y $P_2 = (20, 2+\frac{1}{10})$.

(**a**) Calcular la distancia entre los centros de los móviles en función del tiempo t.

(**b**) Hallar la mínima distancia entre los centros. ¿Chocan entre sí los móviles?



Los móviles y sus trayectorias

4.2.5. Coloquio 03/08/04.

61.03 ANÁLISIS MATEMÁTICO II
COLOQUIO 03/08/04
TEMA 1

---

1. Sea C la curva parametrizada por

$$\varphi \mapsto (\cos(\varphi), \operatorname{sen}(\varphi), \cos(2\varphi)), \quad \varphi \in (0, \pi/4)$$

Calcular la integral de línea

$$\int_C xyz \, ds$$

---

2. Sea S la superficie descripta por

$$(x-3)^2 + y^2 = 1, \quad x^2 + y^2 \leq z \leq 36$$

Calcular el flujo de $F(x, y, z) = (x, y, 2x^2 + 2y^2)$ a través de S orientada con el normal alejándose del eje $x = 3, y = 0$.

---

3. Sea C_a la circunferencia en el plano $y = 5$ con centro en $(a, 5, 0)$ y de radio 1, orientada de manera que en sus puntos de coordenada x positiva [1] el vector tangente tenga coordenada z negativa. Hallar a de manera que sea máxima la circulación del campo $(x + z + y, x, \frac{x^3}{3})$ a lo largo de C_a.

---

4. Responder a cada uno de los siguientes problemas, justificando brevemente su respuesta.

(**a**) Sea S una porción de área 2 del plano de ecuación

$$2x + 3y - 2z = 1$$

Calcular el área de la proyección de S sobre el plano yz.

(**b**) Sabiendo que el polinomio de Taylor de grado 2 de una función C^3 $f(x, y)$ en el entorno de $P = (2, 3)$ es

$$p(x, y) = 2 + (x-2) + 4(y-3) - (x-2)(y-3)$$

calcular la derivada direccional de $g(x, y) = f'_x(x, y)$ en P en la dirección $(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$.

---

5. Hallar la solución $y(t)$ de la ecuación diferencial

$$y''(t) + 4y(t) = \cos(2t)$$

que tiene un máximo de valor 5 en $t = \pi$.

[1] debió decir: coordenada x mayor que a