FIUBA 2014. Análisis Matemático III. Curso $1(\varphi\alpha^-)$. **Parcial 1 (o3)**, martes 10.06.2014

ALUMNO:

Duración: 2 horas. Condición de aprobación: resolución ***completa*** y ***justificada*** de ***dos*** ejercicios cualesquiera

1. Sea el problema de hallar un campo escalar $u(x,y)$ que satisface la ecuación diferencial $u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) = 0$ en $0 < x < \pi, 0 < y < 1$, las condiciones en la frontera $u(0,y) = u(\pi,y) = 0$ en $0 < y < 1$, $u(x,0) = \sin(3x)$, $u(x,1) = 0$ en $0 < x < \pi$.

   (a) Dar una posible interpretación física al problema y hallar $u(x,y)$.

   (b) Verificar que la función u hallada es la solución del problema de Dirichlet planteado y graficar las funciones $u_1(x) \stackrel{\text{def}}{=} u(x, \frac{1}{2})$, $u_2(y) \stackrel{\text{def}}{=} u(\pi/2, y)$.

2. Sean dados $\mathcal{S}_1 = \{z \in \mathbf{C} : |2z - 6i| \leq |z|\}, \mathcal{S}_2 = \{w \in \mathbf{C} : |w| \geq 1\}$, dos subconjuntos del plano complejo y sea γ la curva frontera de $\mathcal{S}_1$ con orientación positiva.

   (a) Definir una función $f : \hat{\mathbf{C}} \to \hat{\mathbf{C}}$, analítica en $\hat{\mathbf{C}}$, tal que para todo $z \in \mathcal{S}_1$ sea $w = f(z) \in \mathcal{S}_2$, graficando $\mathcal{S}_1$ y $\mathcal{S}_2$.

   (b) Para la función f definida en el ítem (a) determinar todos los valores del número natural n para los cuales es nula la parte real de la integral $\oint_\gamma \frac{f(z)}{z^n}\, dz$.

3. Sea la región $\mathbf{H} = \{z \in \mathbf{C} : 0 \leq \text{Re}(z) \leq \pi, 0 \leq \text{Im}(z) \leq 1\}$,y la función $f : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ tal que $f(z) = e^{iz}$ y sea $\gamma = \partial\mathbf{H}$, con orientación positiva. Calcular, para todo número natural n, la integral $\oint_\Gamma \frac{f(z)}{z^n(z-i)^2}\, dz$, siendo $\Gamma = f(\gamma)$.

4. Determinar la validez de las siguientes afirmaciones, explicitando detalladamente las justificaciones o contraejemplos utilizados.

   (a) El módulo de la integral $\oint_\gamma \frac{1}{\sin(\bar{z})}\, dz$ es menor que $\frac{\pi}{6}$, siendo γ dada por $|z - 3i| = 1$, recorrida una vez en sentido antihorario.

   (b) La sucesión de funciones $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ dada por $f_n(x) = x^n$ converge puntualmente a una función $\phi : [0,1] \to \mathbf{R}$, y cuadráticamente a otra función $\psi : [0,1] \to \mathbf{R}$. En cambio, no converge uniformemente a ninguna función definida en $[0,1]$. Sin embargo, converge uniformemente a una función $\lambda : [0,a] \to \mathbf{R}$ para cualquier a tal que $0 < a < 1$.