

ALUMNO:

Duración: 3 horas. Condición de aprobación: resolución **completa** y **justificada** de **dos** ejercicios cualesquiera

1. Dadas las constantes positivas α y a , sea el problema de hallar un campo escalar $u(x, t)$ que satisfice la ecuación diferencial $u_{tt}(x, t) = \alpha^2 u_{xx}(x, t)$ en $0 < x < a$, $0 < t$, las condiciones en la frontera $u(0, t) = u(a, t) = 0$ en $0 \leq t$, y las condiciones iniciales $u(x, 0) = 2 \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{\pi}{a}x\right)$, $u_t(x, 0) = 0$ en $0 \leq x \leq a$.
 - (a) Dar una interpretación física al problema, indicando unidades de las variables x, u, t , y los parámetros α, a , consistentes con esa interpretación. Hallar $u(x, t)$, verificar que sea la solución del problema y graficarla para $t_1 = \frac{a}{4\alpha}$ y para $t_2 = \frac{a}{2\alpha}$.
 - (b) Hallar, siempre que exista, un número $x_0 \in (0, a)$, tal que la función $h(t) \stackrel{\text{def}}{=} u(x_0, t)$, sea constante para todo $t \geq 0$. ¿Cuál es el valor de esa constante?
2. Sean dados $\mathcal{S}_1 = \{z \in \mathbf{C} : |z - 3| \leq |2z|\}$, $\mathcal{S}_2 = \{w \in \mathbf{C} : |w| \leq 1\}$, dos subconjuntos del plano complejo y sea γ la curva frontera de $\mathcal{S}_1$ con orientación positiva.
 - (a) Definir una función $f : D_f \subset \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$, analítica en $D_f \supset \mathcal{S}_1$, tal que para todo $z \in \mathcal{S}_1$ sea $w = f(z) \in \mathcal{S}_2$, graficando $\mathcal{S}_1$ y $\mathcal{S}_2$.
 - (b) Para la función f definida en el ítem (a), calcular para todo número natural n la integral $\oint_{\gamma} (\bar{z} + 1)^n f(z) dz$.
3. Sea γ_k la familia de curvas dada por $z : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbf{C}$ tal que $z(t) = i + ke^{it}$, con $k \in \mathbf{R}^+$. Calcular, para todo k donde esté definida, la integral curvilínea $\oint_{\gamma_k} \frac{f(z)}{z^2 - (1+2i)z + 2i} dz$, siendo $f : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$ una función analítica en todo el plano complejo, cuyo módulo es $|f(z)| = 2e^{2xy}$, con $f(0) = 2$.
4. Probar cada una de las siguientes afirmaciones, explicitando detalladamente las justificaciones o contraejemplos utilizados.
 - (a) Dado el intervalo (acotado) $I = [a, b]$ y los espacios de funciones $L_2(I)$ (esto es el conjunto de funciones $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ cuyo cuadrado es integrable en I) y $L_1(I)$ (esto es el conjunto de funciones $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ absolutamente integrables en I) se verifica que $L_2(I) \subset L_1(I)$, con $L_1(I) \neq L_2(I)$.
 - (b) Sean dadas la función $f : D_f \subset \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$ analítica en el punto $z_0 = x_0 + iy_0$, con $f'(z_0) \neq 0$, la curva λ dada por $z = \lambda(t)$, con $\lambda(t_0) = z_0$, $\lambda'(t_0) \neq 0$, y la curva μ dada por $z = \mu(t)$, con $\mu(t_0) = z_0$, $\mu'(t_0) \neq 0$. En tales condiciones, el ángulo (orientado) entre las curvas λ, μ en z_0 es el mismo que el formado por sus curvas imágenes en $f(z_0)$. Sin la condición $f'(z_0) \neq 0$, la preservación del ángulo no puede asegurarse.