FIUBA 2014. Análisis Matemático III. 61.10. Curso 1($\varphi\alpha-$). **Parcial 1 (o1)**, martes 29.04.2014

ALUMNO:

Duración: 3 horas. Condición de aprobación: resolución ***completa*** y ***justificada*** de ***dos*** ejercicios cualesquiera

1. Dadas las constantes positivas a, k y T_0, sea el problema de hallar un campo escalar $u(x,t)$ que satisface la ecuación diferencial $u_t(x,t) = k\,u_{xx}(x,t)$ en $0 < x < a, 0 < t$, las condiciones en la frontera $u_x(0,t) = u_x(a,t) = 0$ en $0 < t$, y la condición inicial $u(x,0) = \frac{T_0}{a}x$ en $0 < x < a$.

   (a) Dar una interpretación física al problema, indicando unidades de las variables x, u, t y los parámetros k, a, T_0, consistentes con esa interpretación. Hallar $u(x,t)$ discutiendo la convergencia de $u(x,\beta)$ para $\beta > 0$, cualquiera pero fija. ¿A qué función $\varphi(x)$ converge la serie propuesta en $t = 0$?
   † `puede ser útil el resultado` $\int_0^a \alpha\cos(\frac{n\pi\alpha}{a})\,d\alpha = (\frac{a}{n\pi})^2\,(\cos(n\pi)-1)$, `para` $n = 1, 2, \ldots$ †

   (b) Con $k = 1$, $a = 1$, $T_1 = 1$, trazar un gráfico cualitativo de las curvas u versus x para $t_0 = 0, t_1 = 1, t \to \infty$, analizar el comportamiento de la función $h(t) \stackrel{\text{def}}{=} u(\frac{a}{2}, t)$ para todo $t \geq 0$ y explicarlo en términos de la interpretación física escogida en (a).

2. Dados los subconjuntos $\mathcal{S}_1 = \{z \in \mathbf{C} : \mathrm{Re}\left(\frac{1}{z}\right) < 1\}, \mathcal{S}_2 = \{z \in \mathbf{C} : \mathrm{Re}\left(\frac{2}{z}\right) > 1\}$, se definen $\mathcal{R}_1 \stackrel{\text{def}}{=} \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : z = x + iy \in \mathcal{S}_1\}, \mathcal{R}_2 \stackrel{\text{def}}{=} \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : z = x + iy \in \mathcal{S}_2\}, \mathcal{R} \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2$.

   (a) Hallar un campo escalar u que satisfaga la ecuación de Laplace $u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) = 0$ para $(x,y) \in \mathcal{R}$ con las condiciones de frontera $u(x,y) = 1$ si $(x,y) \in \partial\mathcal{R}_1$, $u(x,y) = 0$ si $(x,y) \in \partial\mathcal{R}_2$.

   (b) Graficar $\mathcal{R}$ y algunos conjuntos de nivel del campo escalar u hallado en (a). Si se interpreta que u representa la temperatura en régimen estacionario, ¿qué dirección y sentido sigue, en esa interpretación, el flujo de calor $\mathbf{q}$ en el punto $P_0 = (1,1) \in \partial\mathcal{R}_2$?

3. Calcular, para todo $n \in \mathbf{N}$, la integral curvilínea $\oint_{\gamma_n} \frac{f(z)}{z^2-4iz-3}\,dz$, donde γ_n es la familia de curvas dada por $z : [0, 2\pi] \to \mathbf{C}$ tal que $z(t) = 1 + n\cos(t) + i\,n\sin(t)$, mientras que $f : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ es una función analítica en todo el plano complejo, cuya parte imaginaria es el campo escalar $v : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ tal que $v(x,y) = x^2 - y^2 + x$, con $f(1) = 2i$.

4. Probar cada una de las siguientes afirmaciones, explicitando detalladamente las justificaciones o contraejemplos utilizados.

   (a) Si una sucesión de funciones f_n converge uniformemente a f en [a, b], entonces también converge en media cuadrática a la *misma* función f en [a,b], pero la recíproca es falsa.

   (b) Dada $f = u + iv$, una función $f : D_f \subset \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ analítica en el punto $z_0 = x_0 + iy_0 \in D_f$, con $f'(z_0) \neq 0$, se verifica que la curva de nivel $u(x,y) = \mathrm{Re}(f(z_0))$ es ortogonal a la curva de nivel $v(x,y) = \mathrm{Im}(f(z_0))$ en el punto $P_0 = (x_0, y_0)$. Sin la condición $f'(z_0) \neq 0$, la ortogonalidad no puede asegurarse.