

III) Disyunción: dado p, q definimos $p \vee q$ como "p o q o ambas"

dado p, q definimos $p \wedge q$ como "p y q por ser"

En el lenguaje para uti-
zar al estudiante se
recuerda a "o bien" o
a "al menos".

(excluyente) Cuando se no se da, se
da una por disyunción
no excluyente.

Ambos son contradictorios.

IV) Condicional e implicación: dado p, q definimos

$p \rightarrow q$ como "Si p entonces q"

q = consecuencia o tesis

p = antecedente o hipótesis

p	q	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

El condicional más alto incluye a todos los conjuntos.

- Implicaciones en el lenguaje:

• Si p entonces q.

• Si p, q.

• p no es q.

• Solo si q, p.

• q es condición necesaria para p.

• p es condición suficiente para q.

Si (antecedente) y Solo si (consecuente).

V) Doble implicación o bicondicional:

dado p, q se define $p \leftrightarrow q$ como "p y q solo si q"

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

$(q \rightarrow p) \vee (p \rightarrow q)$

Expresiones proposicionales

$$- EP(p, q) = (p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg p \vee q)$$

p	q	$p \rightarrow q$	$\neg p \vee q$	$EP(p, q)$
V	V	V	V	V
V	F	F	F	F
F	V	V	V	V
F	F	V	V	V

Tautología: cuando un EP toma el valor de verdad independiente de los valores de verdad de las proposiciones que lo integran.

$$- EP(p, q) = (p \vee q) \rightarrow r$$

p	q	r	$p \vee q$	EP
V	V	V	V	V
V	V	F	V	F
V	F	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	V	V	V
F	V	F	V	F
F	F	V	F	V
F	F	F	F	V

Contradicción: cuando un EP puede tomar valores de verdad o falsedad según las proposiciones que lo integran.

$$- EP(p) = p \vee (\neg p)$$

Contradicción: cuando un EP toma el valor de falsedad independientemente de las proposiciones que lo integran.

Los expresiones prop. A y B se dicen lógicamente

equivalentes si A vale si $A \leftrightarrow B$ es una tautología. Véase: $A \equiv B$ tienen la misma tabla).

I) Conmutativa: $p \vee q \equiv q \vee p$ y $p \wedge q \equiv q \wedge p$

II) Asociativa: $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$ y $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$

~~III) Distributiva: $(p \vee q) \wedge r \equiv p \wedge r \vee q \wedge r$ y $(p \wedge q) \vee r \equiv p \vee r \wedge q \vee r$~~

III) Doble distributividad: $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ y $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

IV) Existencia de neutro: $p \vee F \equiv p$ y $p \wedge V \equiv p$

V) Existencia de complemento: $p \vee \neg p \equiv V$ y $p \wedge \neg p \equiv F$

VI) Doble negación: $\neg(\neg p) \equiv p$

VII) Leyes de De Morgan: $\neg(p \vee q) \equiv (\neg p) \wedge (\neg q)$ y $\neg(p \wedge q) \equiv (\neg p) \vee (\neg q)$

8) c- $[p \vee (\neg p \wedge q)] \vee (\neg p \wedge \neg q) = (p \vee \neg p) \wedge (q \vee \neg q) = V \wedge V = V$

$\neg(p \vee q) \equiv (\neg p) \wedge (\neg q)$

$\neg(p \wedge q) \equiv (\neg p) \vee (\neg q)$

$\neg(\neg p) \equiv p$

$\neg(\neg q) \equiv q$

$\neg(p \vee \neg p) \equiv \neg V \equiv F$

$\neg(p \wedge \neg p) \equiv \neg F \equiv V$

$\neg(\neg \neg p) \equiv \neg F \equiv p$

$\neg(\neg \neg q) \equiv \neg F \equiv q$

$\neg(p \vee \neg p) \equiv \neg V \equiv F$

$\neg(p \wedge \neg p) \equiv \neg F \equiv V$

$\neg(\neg \neg p) \equiv \neg F \equiv p$

$\neg(\neg \neg q) \equiv \neg F \equiv q$

$\neg(p \vee \neg p) \equiv \neg V \equiv F$

$\neg(p \wedge \neg p) \equiv \neg F \equiv V$

$\neg(\neg \neg p) \equiv \neg F \equiv p$

$\neg(\neg \neg q) \equiv \neg F \equiv q$

Sistema adecuado de conectivos: conjunto de conectivos mediante los cuales se pueden formar todas las demás.

SAC $\{ \neg, \vee, \wedge \}$ y $\{ \neg, \rightarrow \}$

H	T	H	T	H	T	H	T	H	T	H	T
F	F	F	F	F	F	F	F	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F	F	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F	F	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F	F	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F	F	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F	F	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F	F	F	F	F	F

$$H \rightarrow T \equiv \neg T \rightarrow \neg H$$

La implicación original es equivalente a su contranunciata.

contranunciata: $\neg T \rightarrow \neg H$

recíproca: $T \rightarrow H$

• Implicación contraria: $\neg H \rightarrow \neg T$

Dada una implicación $H \rightarrow T$ se tiene:

$$a = (0.5)^k = 5(2k) \Rightarrow \neg[T] = V$$

$$\neg[H] = V \Rightarrow a = 10 \cdot k, k \in \mathbb{Z}$$

Ej: Si a es divisible por 10 también lo es por 5.

El conflicto en la implicación está cuando $\neg[H] = V$, ya que esto en este caso de $\neg[T]$ sucede con $\neg H$.

verdad y llegar a que la tesis (T) es verdadera.

I) Directa: suponer que el valor de la hipótesis (H) es

método para probar la verdad de una implicación

p	q	↓
F	F	↓
F	V	↓
V	F	↓
V	V	↓

p	q	↓
F	F	↓
F	V	↓
V	F	↓
V	V	↓

$$NOR \equiv \neg(p \vee q) \equiv p \downarrow q$$

$$NAND \equiv \neg(p \wedge q) \equiv p \downarrow q$$

$$SAC \{ \uparrow, \downarrow, \neg \}$$

$$\neg p \equiv p \downarrow q$$

$$p \vee q \equiv \neg(\neg p \wedge \neg q) \equiv (\neg p) \downarrow (\neg q)$$

$$p \wedge q \equiv \neg(p \downarrow q) \equiv (p \downarrow q) \downarrow (p \downarrow q)$$

$$\equiv (p \downarrow p) \downarrow (q \downarrow q)$$

II) Indicate synchronisation: demonstration par la méthode directe $\neg[\neg T \rightarrow \neg H] = V$.

Ex: Si le produit de deux nombres entiers ($a \cdot b$) est pair, alors un des deux nombres est pair.

$a \cdot b$ est pair $\rightarrow a$ est pair ou b est pair

$\neg[T] = F$ soit on a $\neg[a \text{ est pair}] = F$ ou $\neg[b \text{ est pair}] = F$

Entonces a y b tienen que ser impares: $a = 2k_1 + 1$ con $k_1 \in \mathbb{Z}$

$$a \cdot b = (2k_1 + 1) \cdot (2k_2 + 1) = 4k_1k_2 + 2k_1 + 2k_2 + 1$$

$$= 2(2k_1k_2 + k_1 + k_2) + 1 = 2K + 1 \Rightarrow \neg[a \cdot b \text{ es impar}] = V$$

$\neg[a \cdot b \text{ es par}] = F$

Resultado de $\neg[T] = F$ llega a $\neg[H] = F$

$\rightarrow$	V	F	H	T	$H \rightarrow T$
$\rightarrow$	V	F	F	V	F
$\rightarrow$	V	V	F	V	F
$\rightarrow$	V	V	V	V	V

III) Absurdo: considere que $\neg[H] = V$ y que $\neg[T] = F$ y trate de llegar a una contradicción o absurdo.

Ex: $a, b \in \mathbb{R}$. $\frac{a}{b} = \sqrt{2} \rightarrow a$ es irracional y b es irracional.

$\neg[T] = F \rightarrow \neg[a \text{ es } \theta] = V \rightarrow a = \frac{m}{p}$
 $\neg[b \text{ es } \theta] = F \rightarrow \neg[b \text{ es } \theta] = V \rightarrow b = \frac{q}{r}$

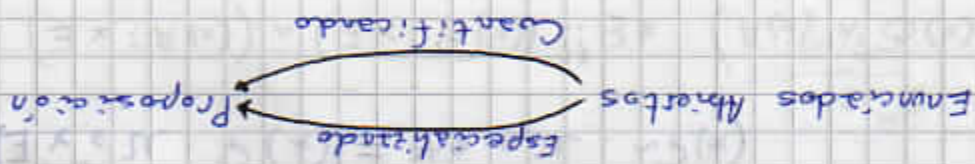
con $m, m', p, q \in \mathbb{Z}$.
 $\frac{a}{b} = \frac{\frac{m}{p}}{\frac{q}{r}} = \frac{mr}{pq} = \frac{m'p}{m'q} \in \mathbb{Z} \Rightarrow \sqrt{2} = \frac{m'}{m'q} \rightarrow \sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ Absurdo

Lógica de predicados

Predicados: son proposiciones que otorgan propiedades a sujetos.

Enunciados abiertos o funciones proposicionales: predicados

con el sujeto "abierto" (x es blanco). No son proposiciones, o mejor que no se puede dar un sujeto. Pueden tener conjuntos de verdad y falsedad.



• Cuantificador universal ($\forall$): $\forall x \in U: P(x)$

Para demostrar que $\forall$ es verdadero hay que verificar que todos los elementos de U tienen la propiedad P .

Para demostrar que es falso basta con que un elemento de U no tenga la propiedad P

• Cuantificador existencial: $\exists x \in U: P(x)$

Para demostrar que ~~es verdadero~~ es verdadero basta con verificar un elemento con la propiedad P .

Para demostrar que es falso hay que verificar todos los elementos.

Ej: Si todos los animales son inteligentes y Juan es animal entonces Juan es inteligente.

$$U = \{x: x \text{ es animal}\}$$

$$\forall x \in U: I(x)$$

Interpretando el dominio: $\mathcal{U} = \{x : x \text{ es un ser humano}\}$

$$\forall x \in \mathcal{U} : (A(x) \rightarrow I(x))$$

$$\forall x \in \mathcal{U} : (A(x) \rightarrow I(x)) \wedge A(\text{Juan}) \rightarrow I(\text{Juan})$$

$$\boxed{p \vee q \rightarrow r}$$

$$\begin{cases} \neg[p] : V \rightarrow I(\text{Juan}) \wedge V \\ \neg[q] : V \end{cases} \rightarrow \neg[I(\text{Juan})] : V$$

$$\neg[I] : V$$

$$\sim[\forall x \in \mathcal{U} : P(x)] \equiv \exists x \in \mathcal{U} : \sim P(x)$$

$$\sim[\exists x \in \mathcal{U} : P(x)] \equiv \forall x \in \mathcal{U} : \sim P(x)$$

$$E: (\exists x : A(x)) \wedge (A(x) \rightarrow B(x)) \vdash \exists x : (A(x) \wedge B(x))$$

→ me
→ de

Principio de Inducción Matemática

Sea $P(n)$ un enunciado ab-orto, con $n \in \mathbb{N}$

$$S: \neg[P(m)] = V \quad (\text{Base Inductiva}) \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall n \geq m_0 : \neg[P(n)] \rightarrow P(n+1) = V \\ \forall n \geq m_0 : n \in \mathbb{N} \Rightarrow m_0 : P(m_0) = V \end{array} \right.$$

(Inducción)

$$E: 1) 1 + 3 + 5 + \dots + (2m-1) = m^2 \quad \sum_{i=1}^m (2i-1) = m^2 \quad P(m)$$

$$\forall n \in \mathbb{N} : P(n) \Rightarrow V$$

$$PB: m=1 \quad P(1) \wedge V? \quad \sum_{i=1}^1 (2i-1) = 1^2 \Rightarrow 1=1 \Rightarrow PB \checkmark$$

$$PI: P(h) \rightarrow P(h+1)? \quad \sum_{i=1}^h (2i-1) = h^2 \rightarrow \sum_{i=1}^{h+1} (2i-1) = (h+1)^2$$

$$\sum_{i=1}^{h+1} (2i-1) = \sum_{i=1}^h (2i-1) + [2(h+1)-1] = h^2 + 2h + 2 - 1 = h^2 + 2h + 1 = (h+1)^2$$

Ex 2) b- $8^m - 5^m$ divisible por 3

$P(n) : 3 \mid 8^m - 5^m$

PB: $P(1)$ e V? $3 \mid 8^1 - 5^1$
 $3 \mid 3 \Rightarrow \text{PB}$

VI: $P(n) \rightarrow P(n+1) : 3 \mid 8^{n+1} - 5^{n+1}$

$8^{n+1} - 5^{n+1} = 8 \cdot 8^n - 5 \cdot 5^n = 8[3k + 5^n] - 5 \cdot 5^n = 24k + 8 \cdot 5^n - 5 \cdot 5^n = 24k + 3 \cdot 5^n = 3(8k + 5^n)$

$\frac{b}{a} = \frac{k}{x} \Rightarrow \frac{8k + 5^n}{5^n} = \frac{k}{x} \Rightarrow 24k + 3 \cdot 5^n = 3(8k + 5^n)$

Ex 2) g- $2^m \geq m^2$ $\forall m \geq 4$

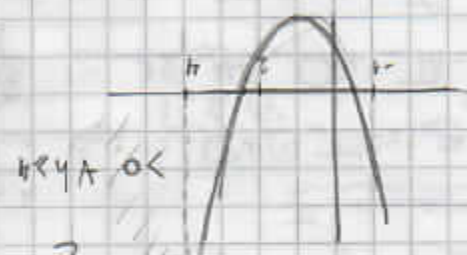
PB: $P(4)$ e V? $2^4 \geq 4^2 \Rightarrow 16 \geq 16 \Rightarrow \text{PB}$

VI: $P(n) \rightarrow P(n+1)$

$2^n \geq n^2 \Rightarrow 2^{n+1} \geq (n+1)^2$

$2^{n+1} \geq (n+1)^2 \Rightarrow 2 \cdot 2^n \geq n^2 + 2n + 1$
 $2^{n+1} - 2n - 1 \geq n^2$

VI	V	F	V	V
VI	V	V	F	V
VI	1	2	3	4



Ex 6) $P(n) : n^2 + 5n + 1$ m PB

a- $P(n) \rightarrow P(n+1)$

$n^2 + 5n + 1 = 2K \rightarrow (n+1)^2 + 5(n+1) + 1 = 2K'$

$n^2 + 5n + 1 + 2n + 5 + 1 = (n^2 + 5n + 1) + 2n + 6 =$

$2K + 2n + 6 = 2(K + n + 3)$
 $\Rightarrow \text{PB nunca no exemplo}$
 $x_{\text{Input}} : 1^2 + 5 \cdot 1 + 1 = 1 + 5 + 1 = 7 \neq 2K \Rightarrow \text{mI}$