FACULTAD DE INGENIERÍA - UBA ÁLGEBRA II *Primer cuatrimestre 2012*

EXAMEN INTEGRADOR
25 de julio de 2012 (4ª fecha)

TEMA 1

RESOLUCIÓN

Aclaración: El alumno debe tener presente que siempre hay más de una forma correcta de resolver un ejercicio. La resolución aquí presentada es una de las tantas posibles.

EJERCICIO 1:

(a) Resolver $\begin{cases} (i)\ (1+x)y' = xy + e^x \\ (ii)\ y(0) = 1 \end{cases}$, especificando intervalo de unicidad de la solución.

(b) Hallar, si existen, todos los valores reales no nulos de a para los cuales la ecuación $y''+4ay'+4a^2y = 4a^5$ admite alguna solución f tal que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -8$. En caso de existir, encontrar alguna de estas soluciones.

RESOLUCIÓN 1) **(a)** para todo $x \in \Re$:

$$(1+x)y' - xy = e^x \Leftrightarrow (1+x)e^{-x}y' \overbrace{-\ xe^{-x}}^{[(1+x)e^{-x}]'}\ y = 1 \Leftrightarrow \left[(1+x)e^{-x}y\right]' = 1$$

Por lo tanto, existe una constante real c tal que $(1+x)e^{-x}y = x + c$. Entonces, para $x \neq -1$ es $y(x) = \dfrac{x+c}{x+1}e^x$. La condición (ii) impone entonces $c = 1$ y la elección del intervalo $(-1,+\infty)$. Por lo tanto, la única solución del problema (i) (ii) en $(-1,+\infty)$ es $y(x) = e^x$.

Observación: En $\Re - \{-1\}$ se tienen las infinitas soluciones

$$y_c(x) = \begin{cases} e^x & x > -1 \\ \dfrac{x+c}{x+1}e^x & x < -1 \end{cases}$$

RESOLUCIÓN 1)**(b)**: La ecuación algebraica asociada a la ecuación diferencial homogénea $y''+4ay'+4a^2y = 0$ es $\lambda^2 + 4a + 4a^2 = 0$, es decir: $(\lambda + 2a)^2 = 0$. Por otra parte, una solución particular de $y''+4ay'+4a^2y = 4a^5$ es la constante $y_p = a^3$. Por lo tanto, todas las soluciones de la ecuación $y''+4ay'+4a^2y = 4a^5$ son las funciones $y(x) = (c_1 + c_2x)e^{-2ax} + a^3$. Si alguna de las constantes c_1, c_2 es no nula, el límite de $y(x) = (c_1 + c_2x)e^{-2ax} + a^3$ cuando $x \to +\infty$ sólo puede existir si $a > 0$, y en ese caso el límite es a^3 (que es positivo), o bien si $a = 0$ y $c_2 = 0$, caso descartado en el enunciado (se pide a no nulo). Por lo tanto, debe ser necesariamente $a < 0$ y $c_1 = c_2 = 0$, obteniéndose la función constante $f(x) = a^3$, que verifica $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -8$ si y solamente si $a = -2$.

EJERCICIO 2: Halle, si existe, una matriz hermítica $A \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ que verifique simultáneamente las siguientes tres condiciones: (*i*) $A[1 \quad 0 \quad -1]^T = [1 \quad 0 \quad -1]^T$, (*ii*) 2 es autovalor doble de A y (*iii*) el subespacio $S = \{ x \in \mathbb{C}^3 : x_1 - i\, x_2 + x_3 = 0 \}$ es invariante por A (o A-estable).

RESOLUCIÓN 2) Las matrices hermíticas tienen autovalores reales y se diagonalizan unitariamente, por lo tanto la matriz pedida es de la forma $A = UD\overline{U}^T$, donde $U \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ es unitaria y $D = Diag[\lambda_1 \quad \lambda_2 \quad \lambda_3] \in \Re^{3\times 3}$. Por las condiciones (*i*) y (*ii*) resulta que un autovalor de A es 1, con multiplicidad 1, y el otro es 2, con multiplicidad 2. Es decir: salvo orden de los elementos de la diagonal, es $D = Diag[1 \quad 2 \quad 2]$. Ahora, dado que $S = \{ x \in \mathbb{C}^3 : x_1 - i\, x_2 + x_3 = 0 \}$ es A-estable, su complemento ortogonal $S^{\perp} = gen\{[1 \quad i \quad 1]^T\}$ también es estable ([1]). Puesto que $S^{\perp}$ tiene dimensión 1, esto significa que $u_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}[1 \quad i \quad 1]^T$ es autovector de A. Por la condición (*i*), el vector $u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}[1 \quad 0 \quad -1]^T$, que pertenece a S, es autovector asociado a 1. Por lo tanto, $u_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}[1 \quad -2i \quad 1]^T$, que también pertenece a S y completa una base ortonormal $\{ u_1, u_2, u_3\}$ de $\mathbb{C}^3$, es necesariamente un autovector de A. Dadas las multiplicidades mencionadas, tenemos:

$$\begin{aligned} &Au_1 = 2u_1 \text{, donde } u_1 = u\tfrac{1}{\sqrt{3}}[1 \quad i \quad 1]^T , \\ &Au_2 = u_2 \text{, donde } u_2 = \tfrac{1}{\sqrt{2}}[1 \quad 0 \quad -1]^T, \qquad\qquad (*1)\\ \text{y} \qquad &Au_3 = 2u_3 \text{, donde } u_3 = \tfrac{1}{\sqrt{6}}[1 \quad -2i \quad 1]^T \end{aligned}$$

Se deduce que

$$A = \overbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{i}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{-2i}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}}^{U} \overbrace{\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}}^{D} \overbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-i}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2i}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}}^{\overline{U}^T} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 2 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \qquad (*2)$$

Comprobación: A es obviamente hermítica; de $Au_2 = u_2$ y $Au_3 = 2u_3$ se deduce inmediatamente que $S = gen\{ u_2, u_3\}$ es A-estable. Finalmente, las condiciones (*i*) y (*ii*) se verifican de inmediato.

Unicidad (No se pide en el enunciado): Los autovectores unitarios $\{ u_1, u_2, u_3\}$ de A quedan determinados, salvo signo, por las condiciones del enunciado, de la misma manera que los autovalores. El producto (*2) no es alterado por ninguna permutación de las filas de la matriz U, con la correspondiente permutación de los elementos de la diagonal D (lo que equivale a escribir las ecuaciones (*1) en otro orden), ni tampoco por cambios de signos en las filas de U, pues el eventual cambio de signo se compensa con el factor $\overline{U}^T$. Por lo tanto, la matriz exhibida es la única que satisface las condiciones del enunciado.

([1]) Si $x \in S^{\perp}$, para todo $y \in S$: $(Ax, y) = \overline{(Ax)}^T y = \overline{x}^T \overline{A}^T y = \overline{x}^T Ay = (x, \overbrace{Ay}^{\in S}) = 0$.

EJERCICIO 3: Sea $A\in\Re^{3\times3}$ la matriz del producto interno canónico respecto de la base $B=\left\{\begin{bmatrix}2\\0\\-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\3\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$ y sea $Q:\Re^3\to\Re$ la forma cuadrática dada por $Q(x)=x^TAx$. Determinar, si existen, $Max\left\{\|x\|^2 : Q(x)=2\right\}$ y $Min\left\{\|x\|^2 : Q(x)=2\right\}$ y los puntos donde se alcanzan estos valores.

RESOLUCIÓN: La matriz $A=\begin{bmatrix}5&0&3\\0&9&0\\3&0&5\end{bmatrix}$ es real, simétrica y definida positiva (si no, no sería la matriz de un producto interno). Su diagonalización es sencilla. Por ejemplo:

$$\begin{bmatrix}5&0&3\\0&9&0\\3&0&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8\\0\\8\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}5&0&3\\0&9&0\\3&0&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\9\\0\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}5&0&3\\0&9&0\\3&0&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2\\0\\2\end{bmatrix}$$

Tenemos la base ortonormal $\{u,v,w\}$ de $\Re^3$, donde $u=\frac{1}{\sqrt2}\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$, $v=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$, $w=\frac{1}{\sqrt2}\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}$ verifican: $Au=8u$, $Av=9v$ y $Aw=2w$. Entonces, para todo $x=au+bv+cw\in\Re^3$ tenemos que $Q(x)=(Ax,x)=8a^2+9b^2+2c^2$ y $\|x\|^2=a^2+b^2+c^2$. Por lo tanto,

$$Q(x)=2\Leftrightarrow 8a^2+9b^2+2c^2=2$$

y en ese caso:

(1) $\|x\|^2=a^2+b^2+c^2=a^2+b^2+1-4a^2-\frac{9}{2}b^2=1-3a^2-\frac{7}{2}b^2\le1$ y es $\|x\|^2=1$ sii $a=b=0$, es decir: $x=cw$, donde $c^2=1$

(2) $\|x\|^2=a^2+b^2+c^2=a^2+\frac{1}{9}(2-8a^2-2c^2)+c^2=\frac{2}{9}+\frac{1}{9}a^2+\frac{7}{9}c^2\ge\frac{2}{9}$ y es $\|x\|^2=\frac{2}{9}$ sii $a=c=0$, es decir: $x=bv$, donde $b^2=\frac{2}{9}$.

Por lo tanto:

$Max\left\{\|x\|^2 : Q(x)=2\right\}=1$ y este valor se alcanza en los puntos $w=\frac{1}{\sqrt2}\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}$ y $-w=\frac{1}{\sqrt2}\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}$

$Min\left\{\|x\|^2 : Q(x)=2\right\}=\frac{2}{9}$ y este valor se alcanza en los puntos $\frac{\sqrt2}{3}v=\frac{\sqrt2}{3}\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$ y $-\frac{\sqrt2}{3}u=\frac{-\sqrt2}{3}\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$.

Observación: Dado que la forma cuadrática Q es definida positiva, se pueden utilizar las desigualdades de Rayleigh, en este caso $2\|x\|^2 \leq Q(x) \leq 9\|x\|^2$, y deducir, puesto que $Q(x) > 0$ para todo $x \in \Re^3 - \{0\}$, que $\frac{1}{9} Q(x) \leq \|x\|^2 \leq \frac{1}{2} Q(x)$. Por lo tanto, para todo $x \in \Re^3$ tal que $Q(x) = 2$ resulta $\frac{2}{9} \leq \|x\|^2 \leq 1$. Obviamente, esto no demuestra que $\frac{2}{9}$ es mínimo buscado ni que 1 es máximo. Debe verificarse, además, que existe al menos un $x_0 \in \Re^3$ tal que $Q(x_0) = 2$ y $\|x_0\|^2 = \frac{2}{9}$ y algún $y_0 \in \Re^3$ tal que $Q(y_0) = 2$ y $\|y_0\|^2 = 1$. Que estos puntos existen y cuáles son, es parte de la respuesta solicitada.

EJERCICIO 4: Encontrar la solución general del sistema $X' = AX$, siendo $A \in \Re^{3\times 3}$ la matriz simétrica tal que $A^2 = I$, $A \neq I$ y $Ax = x$ para todo $x \in \Re^3$ tal que $2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0$.

RESOLUCIÓN: A es la matriz (respecto de la base canónica de $\Re^3$) de la reflexión respecto del subespacio $S = \{ x \in \Re^3 : 2x_1 - x_2 + 2x_3 \}$. Por lo tanto, dados $u = [2 \quad -1 \quad 2]^T$, $v = [1 \quad 2 \quad 0]^T$ y $w = [0 \quad 2 \quad 1]^T$ (que forman una base de $\Re^3$), tenemos que $Au = -u$, $Av = v$ y $Aw = w$, pues $S^{\perp} = gen\{u\}$ y $S = gen\{v, w\}$. Entonces, la solución general del sistema es

$$X(t) = a\,e^{-t}\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} + b\,e^{t}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + c\,e^{t}\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Obviamente, los vectores v y w pueden reemplazarse por cualquier otro par que constituya una base de S, por ejemplo $v = [1 \quad 0 \quad -1]^T$ y $w = [1 \quad 4 \quad 1]^T$.

Para el interesado en conocerla: $A = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 1 & 4 & -8 \\ 4 & 7 & 4 \\ -8 & 4 & 1 \end{bmatrix}$.

EJERCICIO 5: Dada $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, hallar todos los $b \in \Re^3$ tales que $x_0 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$ es la solución de de norma mínima del problema de mínimos cuadrados $Ax = b$.

RESOLUCIÓN 5: Una descomposición reducida de A en valores singulares es

$$A = \overbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}}^{U_r} \begin{bmatrix} \sqrt{12} \end{bmatrix} \overbrace{\begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}}^{V_r^T}$$

y entonces $A^+ = \overbrace{\begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}}^{V_r} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{12}} \end{bmatrix} \overbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}}^{U_r^T} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{12} & \frac{-2}{12} & \frac{-1}{12} \\ \frac{1}{12} & \frac{2}{12} & \frac{1}{12} \end{bmatrix}$. Por lo tanto, los $b \in \Re^3$ pedidos en el enunciado son los que verifican $A^+ b = x_0$, es decir:

$$\begin{cases} \frac{-1}{12} b_1 - \frac{2}{12} b_2 - \frac{1}{12} b_3 = -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{12} b_1 + \frac{2}{12} b_2 + \frac{1}{12} b_3 = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Este sistema equivale a la única ecuación $b_1 + 2b_2 + b_3 = 4$. (*)

Otra manera: Los $b \in \Re^3$ buscados son todos aquellos cuya proyección sobre el elspacio columna de A es $Ax_0 = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{4}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}^T$. Teniendo en cuenta que todo $b \in \Re^3$ puede escribirse en forma única $b = P_{col(A)} b + P_{col(A)^\perp} b$, los $b \in \Re^3$ solicitados son de la forma

$$b = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{4}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Esta expresión no es otra cosa que la expresión paramétrica de las soluciones de (*).
