

EXAMEN INTEGRADOR
24 de julio de 2013 (Cuarta oportunidad)

TEMA 2

RESOLUCIÓN

Aclaración: El alumno debe tener presente que siempre hay más de una forma correcta de resolver un ejercicio. La resolución aquí presentada es una de las tantas posibles.

EJERCICIO 1:

(a) Sea $L : C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ tal que $L(f) = f' - 3f$. Determinar todos los autovalores de L y los autovectores asociados a cada uno.

(b) Determinar todos los valores reales no nulos de α para los cuales todas las soluciones de la ecuación $y'' + \alpha y' + \alpha^2 y = 1$ son acotadas (en $\mathbb{R}$)

RESOLUCIÓN 1(a): $L(f) = \lambda f \Leftrightarrow f' - (3 + \lambda)f = 0 \Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{R} : f = cE_\lambda$, $E_\lambda(x) = e^{(\lambda+3)x}$. Por lo tanto, todos los números reales son autovalores de L y para cada $\lambda \in \mathbb{R}$, $S_\lambda(L) = \text{gen}\{E_\lambda\}$.

RESOLUCIÓN 1(b): Las raíces de $r^2 + \alpha r + \alpha^2 = 0$ son $r_1 = -\frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha\sqrt{3}}{2}i$ y $r_2 = -\frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha\sqrt{3}}{2}i$.

Por otra parte, una solución particular es $y_p = \frac{1}{\alpha^2}$. Entonces, las soluciones son de la forma

$$y(x) = \frac{1}{\alpha^2} + c_1 e^{-\frac{\alpha}{2}x} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + c_2 e^{-\frac{\alpha}{2}x} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$$

y la respuesta es, por lo tanto, que no existe tal α .

EJERCICIO 2: Dada la matriz $A = \begin{bmatrix} 3+\alpha & 0 & -\alpha-2 \\ 1 & 2+\alpha & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, hallar todos los valores posibles

(reales o complejos) de α para los cuales A resulta diagonalizable.

RESOLUCIÓN 2): El polinomio característico de A es

$$\text{Det}(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - (3 + \alpha) & 0 & 2 + \alpha \\ -1 & \lambda - (2 + \alpha) & -1 \\ 0 & 0 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = [\lambda - (3 + \alpha)][\lambda - (2 + \alpha)][\lambda - 1]$$

y sus raíces son $\lambda_1 = 3 + \alpha$, $\lambda_2 = 2 + \alpha$ y $\lambda_3 = 1$. Por lo tanto, si $\alpha \notin \{-1, -2\}$, A tiene tres autovalores distintos y por lo tanto es diagonalizable. Analicemos qué pasa cuando $\alpha \in \{-1, -2\}$:

Caso $\alpha = -1$: En este caso tenemos $\lambda_1 = 2$ y $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$ y. Para determinar la multiplicidad geométrica de 1 como autovalor de A , calculemos la dimensión de

$$S_1(A) = \text{Nul}(I - A) = \text{Nul}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \text{Nul}\left(\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right)$$

Obviamente, el rango de esta matriz es 2 y por lo tanto su espacio nulo tiene dimensión 1. Por lo tanto, si $\alpha = -1$ la matriz A no es diagonalizable (ni en los reales ni en los complejos).

Caso $\alpha = -2$: En este caso tenemos $\lambda_1 = \lambda_3 = 1$ y $\lambda_2 = 0$. Para determinar la multiplicidad geométrica de 1 como autovalor de A , calculemos la dimensión de

$$S_1(A) = \text{Nul}(I - A) = \text{Nul}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \text{Nul}\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right)$$

Obviamente, el rango de esta matriz es 1 y por lo tanto su espacio nulo tiene dimensión 2. Por lo tanto, si $\alpha = -2$ la matriz A es diagonalizable (en los reales).

Respuesta: A es diagonalizable sii $\alpha \neq -2$ (respuesta válida tanto para los reales como para los complejos)

EJERCICIO 3: Sea $A \in \mathfrak{R}^{3 \times 3}$ una matriz simétrica. Uno de sus autovalores es 3 y además verifica:

$$A \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \text{ y el } \text{Nul}(A) = \text{gen}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}.$$

Sea la superficie de ecuación: $\|Ax\|^2 = 9$. Hallar los puntos más cercanos al origen de coordenadas.

RESOLUCIÓN 3): Los autovalores de A son $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = -1$ y $\alpha_3 = 3$.

$A^T A = A A = A^2$ y sus autovalores son $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$ y $\lambda_3 = 9$.

$$\lambda_m \|x\|^2 \leq \|Ax\|^2 \leq \lambda_M \|x\|^2 \Rightarrow 0 \leq \|Ax\|^2 \leq 9 \|x\|^2$$

$$\text{Si } \|Ax\|^2 = 9 \Rightarrow 1 \leq \|x\|^2 \wedge \|x\|^2 = 1 \text{ en } x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

EJERCICIO 4: Calcular todas las soluciones de $\begin{cases} x_1'(t) = 6x_1(t) + 4x_2(t) - 1 \\ x_2'(t) = -8x_1(t) - 6x_2(t) + 1 \end{cases}$ para las cuales existen (y son finitos) $\lim_{t \rightarrow +\infty} x_1(t)$ y $\lim_{t \rightarrow +\infty} x_2(t)$.

RESOLUCIÓN: La matriz $A = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ -8 & -6 \end{bmatrix}$ es diagonalizable:

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ -8 & -6 \end{bmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}}^V \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \overbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}}^{V^{-1}}$$

y una solución particular del sistema es $X_p = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$. Por lo tanto, las soluciones del sistema son

$$X(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix} + c_1 e^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + c_2 e^{-2t} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

y las pedidas son $X(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix} + c_2 e^{-2t} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$

EJERCICIO 5: Sean $Q \in \mathfrak{R}^{3 \times 3}$ una matriz ortogonal y $A = QB$, donde $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$. Obtener la

solución por cuadrados mínimos de norma mínima de $Ax = b$, siendo $b = Q \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

RESOLUCIÓN 5): Si obtenemos una descomposición $B = U\Sigma V^T$ en valores singulares, entonces $A = QB = QU\Sigma V^T$ es una descomposición de A en valores singulares, pues el producto QU de matrices ortogonales es ortogonal y $A^T A = B^T Q^T QB = B^T B$ (es decir: los valores singulares de A y

de B son los mismos). Entonces, la solución buscada es $A^+b = V\Sigma^+U^TQ^TQ\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = V\Sigma^+U^T\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Veamos: $B^TB = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Por lo tanto:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 3\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad V = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

Las dos primeras columnas de U son

$$\frac{1}{3\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, podemos elegir

$$U = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

Entonces,

$$A^+b = V\Sigma^+U^TQ^TQ\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \overset{I}{\hat{V}}\Sigma^+U^T\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Observación: Puede usarse, obviamente, la descomposición en valores singulares reducida.
