

EXAMEN INTEGRADOR

18 de julio de 2012 (Tercera fecha)

TEMA 1

Aclaración: El alumno debe tener presente que siempre hay más de una forma correcta de resolver un ejercicio. La resolución aquí presentada es una de las tantas posibles.

EJERCICIO 1:

(a) Hallar, si existen, dos funciones continuas $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $q: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tales que para todo $c \in \mathbb{R}$ la función $f(t) = e^t + c(t^2 + 1)$ es solución de $y'(t) + p(t)y(t) = q(t)$.

(b) Determinar para qué valores de $a \in \mathbb{R}$ la ecuación diferencial $y''(t) + 9y(t) = \sin(at)$ tiene soluciones no acotadas en $\mathbb{R}$.

RESOLUCIÓN:

(a) $f_1(t) = e^t$ es una solución particular y $f_2(t) = t^2 + 1$ una solución de la ecuación homogénea asociada, por lo tanto $2t + p(t)(t^2 + 1) = 0$ y $e^t + p(t)e^t = q(t)$. De la primera obtenemos $p(t) = \frac{-2t}{t^2 + 1}$ y de la segunda $q(t) = e^t \left(1 - \frac{2t}{t^2 + 1} \right) = e^t \frac{(t-1)^2}{t^2 + 1}$.

Otra forma: Para todo $c \in \mathbb{R}$ y para todo $t \in \mathbb{R}$ debe verificarse

$$e^t + 2ct + p(t)[e^t + c(t^2 + 1)] = q(t)$$

es decir: $e^t[1 + p(t)] + c[2t + p(t)(t^2 + 1)] = q(t)$ (*). Puesto que esto debe verificarse para todo $c \in \mathbb{R}$, derivando ambos miembros de (*) respecto de c obtenemos la condición $2t + p(t)(t^2 + 1) = 0$ y luego $e^t[1 + p(t)] = q(t)$. Otra manera de deducir estas condiciones (sin derivar respecto de c) es elegir $c = 0$ en (*), con lo que queda $e^t[1 + p(t)] = q(t)$; luego, esta condición en (*) impone $c[2t + p(t)(t^2 + 1)] = 0$ para todo c , es decir: $2t + p(t)(t^2 + 1) = 0$. La validez de estos procedimientos está dada por las expresiones subrayadas: *para todo...*

(b) La solución general del problema homogéneo asociado puede expresarse en la forma $f_h(t) = c_1 \cos(3t) + c_2 \sin(3t)$. Si $a = 0$, el sistema es homogéneo y todas sus soluciones son, entonces, acotadas. Si $a \neq 0$ y $a^2 \neq 9$, el segundo miembro de la ecuación no es solución de la homogénea asociada y una solución particular de la ecuación es de la forma $f_p(t) = A \cos(at) + B \sin(at)$ para algún par de coeficientes A y B (¡) no ambos nulos (caso contrario, el sistema sería homogéneo) y las soluciones de la ecuación son de la forma $f(t) = f_h(t) + f_p(t) = c_1 \cos(3t) + c_2 \sin(3t) + A \cos(at) + B \sin(at)$, que resultan ser acotadas. Si $a^2 = 9$, el segundo miembro de la ecuación es $\sin(3t)$ o $\sin(-3t) = -\sin(3t)$, es decir: es una

solución de la ecuación homogénea asociada y entonces una solución particular es de la forma $f_p(t) = Ct\cos(3t) + Dt\sin(3t)$ para algún par de coeficientes C y D ⁽²⁾ (no ambos nulos caso contrario, el sistema sería homogéneo) y las soluciones de la ecuación son de la forma $f(t) = c_1 \cos(3t) + c_2 \sin(3t) + Ct\cos(3t) + Dt\sin(3t)$, que no son acotadas. Por lo tanto, la respuesta es $a \in \{-3, 3\}$.

Para los interesados en conocer los coeficientes y las correspondientes soluciones particulares:

$$^{(1)} \quad A=0, \quad B=\frac{1}{9-a^2}, \quad f_p(t)=\frac{1}{9-a^2} \sin(at)$$

$$^{(2)} \quad \text{Si } a=3: A=-\frac{1}{6}, B=0, \quad f_p(t)=-\frac{t}{6}\cos(3t); \text{ si } a=-3: A=\frac{1}{6}, B=0, \quad f_p(t)=\frac{t}{6}\cos(3t).$$

EJERCICIO 2: Sea $S = \{ M \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : M^T + M = 0 \}$. Considerando el producto interno $(\cdot, \cdot)$ en $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ dado por $(X, Y) = \text{tr}(X^T Y)$, hallar una matriz $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ que cumpla simultáneamente las siguientes tres condiciones:

$$(i) \quad B \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ i \end{bmatrix}, \text{ siendo } B = P_S(A) \text{ la proyección de } A \text{ sobre } S;$$

$$(ii) \quad (A - B)^2 = A - B;$$

$$(iii) \quad (A - B) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

¿Es única?

RESOLUCIÓN: Dado que S es el subespacio de las matrices reales antisimétricas, B es de la forma

$$B = \begin{bmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{bmatrix}. \text{ Ahora, la condición (i) solamente puede verificarse si } b = 1 \text{ y por lo tanto}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ (es la única matriz antisimétrica que verifica (i)) } ^{(1)}. \text{ Ahora, } A - B = A - P_S(A) \text{ es}$$

la proyección de A sobre $S^\perp$. Para el producto interno dado, $S^\perp$ es el subespacio de las matrices simétricas ⁽²⁾. Entonces, $A - B$ es una matriz real simétrica y la condición (ii) equivale entonces a que $A - B$ sea una matriz de proyección. En particular, esto significa que sus autovalores son 1 y 0 y

es diagonalizable ortogonalmente (por ser simétrica). De (iii) tenemos que $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ es autovector

asociado a 1 y entonces $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ es autovector de $A - B$ asociado a 1 o a 0. En el primer caso $A - B$ es la identidad (la única matriz diagonalizable con todos sus autovalores iguales a 1 es la matriz

identidad, obviamente) y entonces $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. En el segundo caso, si $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ es autovector de $A - B$ asociado a 0, tenemos la (única) matriz de proyección sobre el subespacio de $\mathfrak{R}^2$ generado por $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$:

$$A - B = \overbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}}^U \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}^D \overbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}}^{U^T} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

En este caso, tenemos $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$. Por lo tanto, las dos únicas matrices que verifican las tres condiciones requeridas son:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Nota ⁽¹⁾: Las matrices reales antisimétricas de orden 2 son especialmente sencillas de caracterizar, como hemos visto. En órdenes mayores conviene recordar que las matrices reales antisimétricas: (a) son normales y por lo tanto son diagonalizables unitariamente en los complejos y (b) tienen autovalores imaginarios puros.

Nota ⁽²⁾: Para probar que toda matriz se escribe en forma única como suma de una simétrica y de una antisimétrica no se requiere de ningún producto interno: en primer lugar tenemos que para

cualquier matriz $A \in \mathfrak{R}^{n \times n}$: $A = \overbrace{\frac{1}{2}(A + A^T)}^{\text{simétrica}} + \overbrace{\frac{1}{2}(A - A^T)}^{\text{antisimétrica}}$; en segundo lugar, la única matriz que es simétrica y antisimétrica simultáneamente es la nula. Finalmente, probemos que toda simétrica es ortogonal a toda antisimétrica respecto del producto interno dado: si X es antisimétrica e Y es simétrica: $(X, Y) = \text{tr}(X^T Y) = \text{tr}(-XY) = -\text{tr}(XY) = -\text{tr}(YX) = -\text{Tr}(Y^T X) = -(Y, X) = -(X, Y)$ y por lo tanto $(X, Y) = 0$. (Otra forma de ver probar esto es utilizar la expresión

$(X, Y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_{ij} y_{ij}$, cosa que no haremos aquí) y una tercera forma es exhibir bases ortogonales.

Esto es particularmente cómodo para $n = 2$, pues una base de este tipo (y que hemos utilizado muchas veces en los ejercicios) es $\left\{ \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$: es una base

ortogonal (para el producto interno dado) de $\mathfrak{R}^{2 \times 2}$, donde el primer elemento forma una base de S y los tres últimos forman una base del subespacio de las simétricas.

EJERCICIO 3: Sean $Q: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ y $R: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ las formas cuadráticas definidas por $Q(x) = -8x_1^2 - 8x_2^2$ y $R(x) = 4x_1^2 + 24x_1x_2 + 11x_2^2$. Hallar, si existen, $\text{Máx}\{Q(x): R(x) = 5\}$ y $\text{Mín}\{Q(x): R(x) = 5\}$ y los puntos donde se alcanzan estos valores.

RESOLUCIÓN: En primer lugar, obsérvese que $Q(x) = -8x_1^2 - 8x_2^2 = -8\|x\|^2$. Ahora, la matriz simétrica asociada a R es $A = \begin{bmatrix} 4 & 12 \\ 12 & 11 \end{bmatrix}$, de autovalores 20 y -5 y autovectores unitarios correspondientes $u = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \end{bmatrix}$ y $v = \begin{bmatrix} \frac{-4}{5} \\ \frac{3}{5} \end{bmatrix}$.

Comprobación: $\begin{bmatrix} 4 & 12 \\ 12 & 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 60 \\ 80 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 4 & 12 \\ 12 & 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ -15 \end{bmatrix}$.

Entonces, para todo $x = y_1u + y_2v = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{-4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$ tenemos $Q(x) = -8\|x\|^2 = -8(y_1^2 + y_2^2)$ y $R(x) = 20y_1^2 - 5y_2^2$. Entonces,

$$R(x) = 5 \Leftrightarrow 20y_1^2 - 5y_2^2 = 5 \Leftrightarrow y_1^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}y_2^2 \Rightarrow Q(x) = -8\left(\frac{1}{4} + \frac{5}{4}y_2^2\right) = -2(1 + 5y_2^2)$$

Dado que y_2^2 puede tomar cualquier valor positivo o nulo, (mientras que $y_1^2 \geq \frac{1}{4}$), la restricción de Q al nivel 5 de R no está acotada inferiormente y por lo tanto no tiene mínimo en dicho conjunto. Por otra parte, una cota superior obvia de $-2(1 + 5y_2^2)$ es -2 y se alcanza para $y_2^2 = 0$ (por lo tanto, se trata, efectivamente, de un máximo), lo que implica $20y_1^2 = 5$. Resumiendo:

* No existe $\text{Mín}\{Q(x): R(x) = 5\}$

* $\text{Máx}\{Q(x): R(x) = 5\} = -2$ y se alcanza en $x = \frac{1}{2}u = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \end{bmatrix}$ y en $x = -\frac{1}{2}u = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \end{bmatrix}$.

EJERCICIO 4: Hallar la solución general X_g del sistema de ecuaciones lineales $X'(t) = AX(t)$ sabiendo que la matriz $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ verifica simultáneamente las tres siguientes condiciones

$$(i) \quad A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 8 & -8 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & -5 & 9 \end{bmatrix}, \quad (ii) \quad \det(A) > 0 \quad \text{y} \quad (iii) \quad \text{tr}(A) = 0.$$

RESOLUCIÓN: Veamos primero si la matriz $B = A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 8 & -8 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & -5 & 9 \end{bmatrix}$ es diagonalizable:

$$\text{Det}(\lambda I - B) = \text{Det} \begin{bmatrix} \lambda - 1 & -8 & 8 \\ 0 & \lambda - 4 & 0 \\ 0 & 5 & \lambda - 9 \end{bmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 4)(\lambda - 9)$$

y por lo tanto, B tiene tres autovalores reales y distintos y por lo tanto es diagonalizable en los reales. (**Ojo:** si usted deduce, a partir de esto, que A es diagonalizable, está cometiendo un error

gravísimo: la matriz $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ no es diagonalizable pero $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ sí). Dado que los

autovalores de A son raíces cuadradas (eventualmente complejas) de los autovalores de A^2 , tenemos que los autovalores de A son raíces cuadradas de 1, 4 y 9. Entonces, tenemos las siguientes ocho posibilidades para los autovalores de A :

(1) 1, 2, 3 (2) 1, 2, -3 (3) 1, -2, 3 (4) -1, 2, 3 (5) -1, -2, 3 (6) -1, 2, -3 (7) 1, -2, -3 (8) -1, -2, -3

En todos los casos, los tres autovalores son reales y distintos y por lo tanto A es diagonalizable en los reales. Para que la traza de A (= suma de sus autovalores) sea nula, nos quedan las posibilidades (2) y (5). De estas dos, la condición (ii) elige la (5). Por lo tanto, los autovalores de A son -1, -2 y 3.

Puesto que A es diagonalizable, sus autovectores son los mismos que los de A^2 y asociados a las raíces de los autovalores de ésta. Un cálculo sencillo nos da

$$\begin{bmatrix} 1 & 8 & -8 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & -5 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 8 & -8 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & -5 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 4 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{bmatrix} 1 & 8 & -8 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & -5 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 9 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

y por lo tanto,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 4 & -4 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & -5 & 3 \end{bmatrix}$$

(No es necesario conocer la matriz A ; la hemos exhibido para los curiosos). Entonces, la solución general del sistema es

$$X(t) = c_1 e^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 e^{-2t} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_3 e^{3t} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

EJERCICIO 5: Hallar una transformación lineal $T: \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^3$ que verifique simultáneamente las tres siguientes condiciones:

(i) El conjunto $\left\{ x \in \mathfrak{R}^2 : \|T(x)\|^2 = 4 \right\}$ es una elipse de semiejes 2 y $\frac{1}{2}$ y el semieje menor está en

la dirección del vector $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$;

(ii) $T\left(\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$;

(iii) $d(\text{im}(T), [1 \ 2 \ -1]^T) = \|[1 \ 2 \ -1]^T\|$.

RESOLUCIÓN: Sea $A \in \mathfrak{R}^{3 \times 2}$ la matriz de T respecto de las bases canónicas, es decir: $T(x) = Ax$ para todo $x \in \mathfrak{R}^2$. Entonces, $\|T(x)\|^2 = \|Ax\|^2 = (Ax)^T Ax = x^T A^T Ax$. La matriz real simétrica $A^T A \in \mathfrak{R}^{2 \times 2}$ se factoriza $A^T A = VDV^T$, donde $V \in \mathfrak{R}^{2 \times 2}$ es una matriz ortogonal y $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$ tiene elementos no negativos en su diagonal (los autovalores de $A^T A$ no pueden ser negativos). Indicando con v_1 y v_2 las columnas de V , para cada $x = y_1 v_1 + y_2 v_2 \in \mathfrak{R}^2$ tenemos que $\|T(x)\|^2 = x^T A^T Ax = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2$; por lo tanto,

$$\|T(x)\|^2 = 4 \Leftrightarrow \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 = 4 \Leftrightarrow \frac{y_1^2}{(\frac{2}{\sqrt{\lambda_1}})^2} + \frac{y_2^2}{(\frac{2}{\sqrt{\lambda_2}})^2} = 1$$

y la condición (i) se verifica si $\frac{2}{\sqrt{\lambda_1}} = \frac{1}{2}$, $\frac{2}{\sqrt{\lambda_2}} = 2$, $v_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ y $v_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$. (Hay otras

posibilidades, pero el autovector $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ tiene que tener la dirección del semieje menor). Se deduce

que $\lambda_1 = 16$ y $\lambda_2 = 1$. Toda esta información sobre la matriz A sugiere una descomposición en valores singulares $A = U\Sigma V^T$. Hasta ahora tenemos

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad V = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

Ahora, dado que el rango de A es 2, las dos primeras columnas de U son $u_1 = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} Av_1$ y $u_2 = \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}} Av_2$. De la condición (ii) tenemos:

$$u_2 = \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}} Av_2 = A \left(\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = -\frac{1}{\sqrt{5}} A \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \stackrel{(ii)}{=} -\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{-1}{\sqrt{5}} \\ 0 \end{bmatrix}$$

La condición (iii) significa que $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \in \text{im}(T)^\perp = \text{col}(A)^\perp$. Por lo tanto, puede elegirse como

tercera columna de U al vector $u_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$. Entonces, dado que las columnas de U deben ser

ortonormales, la primera queda determinada salvo signo: $u_1 = \frac{1}{\sqrt{30}} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$ o $u_1 = -\frac{1}{\sqrt{30}} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$. Entonces,

por ejemplo:

$$A = U \Sigma V^T = \overbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{30}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{30}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{5}{\sqrt{30}} & 0 & \frac{-1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}}^U \overbrace{\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}^\Sigma \overbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}}^{V^T}$$
