

FACULTAD DE INGENIERIA-UBA
ÁLGEBRA II. Primer cuatrimestre de 2013
EXAMEN INTEGRADOR - 17 de julio de 2013 (Tercera fecha)

TEMA 1

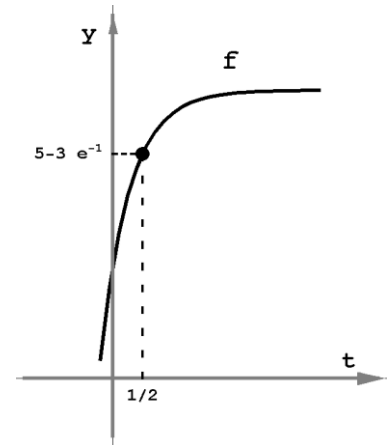
RESOLUCIÓN

El alumno debe tener presente que siempre hay más de una forma correcta de resolver un ejercicio. La resolución aquí presentada es una de las tantas posibles.

Ejercicio 1:

Sea el problema a valor inicial $\begin{cases} y'(t) + 2y(t) = a \\ y(0) = 2 \end{cases}$ con $a \in \mathbb{R}$.

Sabiendo que f es la solución del problema dado representada en el gráfico, obtener todas las funciones $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfacen $g' = f$.



Resolución:

La solución general de la ecuación homogénea $y'(t) + 2y(t) = 0$ es $y_h(t) = k e^{-2t}$, $k \in \mathbb{R}$. Una solución particular de $y'(t) + 2y(t) = a$ es $y_p(t) = a/2$ y la solución general es $y(t) = k e^{-2t} + a/2$. Usando la condición inicial y el punto indicado en el gráfico, obtenemos los valores únicos de k y de a . Resulta $f(t) = -3 e^{-2t} + 5$. Integrando tenemos

$$g(t) = \frac{3}{2} e^{-2t} + 5t + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

Ejercicio 2:

Para cada $k \in \mathbb{R}$, sea $T_k: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la transformación lineal tal que $[T_k]_{EB} = \begin{bmatrix} k+1 & 0 & 0 \\ -k & 1 & 0 \\ k & -1 & -1 \end{bmatrix}$,

donde E es la base canónica de $\mathbb{R}^3$ y $B = \{[1 \ 1 \ 0]^T, [0 \ 1 \ 1]^T, [0 \ 0 \ 1]^T\}$. Hallar todos los valores de k para los cuales existe una base B' de $\mathbb{R}^3$ tal que $[T_k]_{B'}$ es diagonal.

Resolución:

La existencia de tal base equivale a que $[T_k]_E$ sea diagonalizable (o bien, a que $[T_k]_B$ sea diagonalizable para cualquier base B' de $\mathbb{R}^3$).

$$[T_k]_E = C_{BE} [T_k]_{EB} = \begin{bmatrix} k+1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \text{ y sus autovalores son } k+1, 1 \text{ y } -1. \text{ Entonces:}$$

Si $k \neq 0$ y $k \neq -2$, $[T_k]_E$ tiene 3 autovalores distintos y por lo tanto es diagonalizable.

Si $k = 0$, 1 es autovalor con multiplicidad algebraica 2 y multiplicidad geométrica 1, y por lo tanto

$[T_k]_E$ no es diagonalizable.

Si $k = -2, -1$ es autovalor con multiplicidad algebraica y geométrica 2, y como 1 es un autovalor simple, resulta que $[T_k]_E$ es diagonalizable.

Por lo tanto, para todo $k \in \mathbb{R} - \{0\}$ existe una base B' de $\mathbb{R}^3$ tal que $[T_k]_{B'}$ es diagonal.

Ejercicio 3:

- a) Hallar $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ simétrica, sabiendo que $\text{Máx} \{(x, Ax) : \|x\| = 2\} = 4$ y que $A \begin{bmatrix} \sqrt{3} & -1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -\sqrt{3} & 1 \end{bmatrix}^T$.
- b) Representar gráficamente el conjunto $\{x \in \mathbb{R}^2 : (x, Ax) = 4\}$.

Resolución:

- a) $\begin{bmatrix} \sqrt{3} & -1 \end{bmatrix}^T$ es autovector de A asociado al autovalor -1 . De la información sobre el máximo, deducimos que 1 es el autovalor máximo de A . Usando que, para matrices reales simétricas, autovectores asociados a autovalores distintos son ortogonales, resulta:

$$A = \begin{bmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

- b) Se trata de una hipérbola. Los ejes de simetría tienen la dirección de los autovectores. Los vértices de la hipérbola están ubicados en $V_1 = \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix}^T$ y en $V_2 = \begin{bmatrix} -1 & -\sqrt{3} \end{bmatrix}^T$. Las ecuaciones vectoriales paramétricas de las asíntotas son:

$$L_1: x = t \begin{bmatrix} \sqrt{3} + 1 & \sqrt{3} - 1 \end{bmatrix}^T \quad y \quad L_2: x = t \begin{bmatrix} -\sqrt{3} + 1 & \sqrt{3} + 1 \end{bmatrix}^T$$

Ejercicio 4:

Para cada $k \in \mathbb{R}$, sea el sistema $X'(t) = (kI + A)X(t)$ con $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ antisimétrica. Sabiendo que $7i$ es autovalor de A , hallar todos los valores de k para los cuales toda solución $X_k(t)$ del sistema satisface la condición $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|X_k(t)\|^2 = 0$.

Resolución:

Por ser A real y antisimétrica, tiene autovalores imaginarios puros o nulos y es diagonalizable unitariamente. Como A es de orden 3 y $7i$ es autovalor de A , resulta que sus autovalores son $0, 7i$ y $-7i$. Entonces, existe una matriz unitaria $P = [v_1 \ v_2 \ v_3] \in \mathbb{C}^{3 \times 3}$ tal que $A = P D P^H$ donde

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7i & 0 \\ 0 & 0 & -7i \end{bmatrix}. \text{ Luego } kI + A = kI + P D P^H = P (kI + D) P^H, \text{ y por lo tanto } kI + A \text{ es}$$

diagonalizable unitariamente y sus autovalores son $k, k + 7i$ y $k - 7i$. Entonces todas las soluciones de $X'(t) = (kI + A)X(t)$ son de la forma

$$X_k(t) = c_1 e^{kt} v_1 + c_2 e^{(k+7i)t} v_2 + c_3 e^{(k-7i)t} v_3, \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{C}$$

Como v_1, v_2, v_3 son ortonormales y $|e^{(k+7i)t}| = |e^{(k-7i)t}| = e^{kt}$, se tiene

$$\|X_k(t)\|^2 = e^{2kt}(|c_1|^2 + |c_2|^2 + |c_3|^2)$$

Por lo tanto, para que $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|X_k(t)\|^2 = 0$ es necesario y suficiente que $k < 0$.

Ejercicio 5:

Dada $A = \begin{bmatrix} 5/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 5/2 & 0 \end{bmatrix}$. a) Hallar una descomposición en valores singulares de A . b) Obtener

todos los vectores $b \in \mathbb{R}^2$ para los cuales la solución de norma mínima del problema de cuadrados mínimos de $Ax = b$ es el vector $[1 \ 1 \ 0]^T$.

Resolución:

a) Conviene calcular una descomposición en valores singulares de la matriz A^T y a partir de ella obtener la correspondiente a A , obteniendo $A = U \Sigma V^T$, siendo:

$$U = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix}, \quad \Sigma = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad V = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

b) Un valor del vector b puede obtenerse del producto $A [1 \ 1 \ 0]^T = [3 \ 3]^T$. A este vector debemos sumarle aquellos que pertenezcan al espacio nulo de la pseudoinversa de A . Como el rango de esta matriz es 2, la dimensión del espacio nulo es 0, y la única solución del problema es el vector $[3 \ 3]^T$.