Ejercicio 1

T1. (a) En el espacio vectorial real $\mathbb{V} = gen\{u_1(t) = 1, u_2(t) = \cos(2t), u_3(t) = \sin(2t)\}$ se define el operador T como T(u) = u''. Estudiar si el operador en $\mathbb{V}$ dado por H $\stackrel{\text{def}}{=}$ ToT – T es diagonalizable y en caso afirmativo dar una base B tal que $(H)_B$ sea diagonal. **(b)** Probar que es suficiente que la constante real a cumpla $|a| < 2$ para que el sistema $\begin{cases} f'(t) = af(t) - 4g(t) \\ g'(t) = f(t) - ag(t) \end{cases}$, tenga soluciones acotadas con cualquier condición inicial; ¿la condición es también necesaria?

T2. (a) En el espacio vectorial real $\mathbb{V} = gen\{u_1(t) = 1, u_2(t) = \cos(3t), u_3(t) = \sin(3t)\}$ se define el operador T como T(u) = u''. Estudiar si el operador en $\mathbb{V}$ dado por H $\stackrel{\text{def}}{=}$ ToT – T es diagonalizable y en caso afirmativo dar una base B tal que $(H)_B$ sea diagonal. **(b)** Probar que es suficiente que la constante real a cumpla $|a| < 3$ para que el sistema $\begin{cases} f'(t) = af(t) - 9g(t) \\ g'(t) = f(t) - ag(t) \end{cases}$, tenga soluciones acotadas con cualquier condición inicial; ¿la condición es también necesaria?

Sugerencia de resolución T1. (1a). Como $T(u_1) = 0$, $T(u_2) = -4u_2$, $T(u_3) = -4u_3$, T es diagonalizable siendo su espectro $\sigma(T) = \{\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -4 \text{ (doble)}\}$, y como $H = T^2 - T$, se sabe que la base $B = \{u_1, u_2, u_3\}$ que diagonaliza T también diagonaliza H y si λ es autovalor de T, entonces $\lambda^2 - \lambda$ es autovalor de H, de modo que el espectro de H está dado por $\sigma(H) = \{\mu_1 = 0, \mu_2 = 20 \text{ (doble)}\}$. (1b) Las raíces del polinomio característico de la matriz del sistema, $p(\lambda) = \lambda^2 + (4-a^2)$ son imaginarias puras sii $|a| < 2$, y en tal caso la solución resulta ser una combinación lineal funciones acotadas (la necesidad surge de considerar lo que sucede si $a| \geq 2$)

Sugerencia de resolución T2. (1a). Como $T(u_1) = 0$, $T(u_2) = -9u_2$, $T(u_3) = -9u_3$, T es diagonalizable siendo su espectro $\sigma(T) = \{\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -9 \text{ (doble)}\}$, y como $H = T^2 - T$, se sabe que la base $B = \{u_1, u_2, u_3\}$ que diagonaliza T también diagonaliza H y si λ es autovalor de T, entonces $\lambda^2 - \lambda$ es autovalor de H, de modo que el espectro de H está dado por $\sigma(H) = \{\mu_1 = 0, \mu_2 = 90 \text{ (doble)}\}$. (1b) Las raíces del polinomio característico de la matriz del sistema, $p(\lambda) = \lambda^2 + (9-a^2)$ son imaginarias puras sii $|a| < 3$, y en tal caso la solución resulta ser una combinación lineal funciones acotadas (la necesidad surge de considerar lo que sucede si $a| \geq 3$).

Ejercicio 2

T1. Sea $B = \{v_1, v_2\}$ una base del espacio vectorial $\mathbb{V}$. Determinar la matriz $(T)_B$ del operador lineal T que verifique las dos condiciones siguientes: (a) $T^2 = I_V$; (b) $T(v_1 - v_2) = 2v_2$, y hallar, siempre que sea posible, una base H de $\mathbb{V}$ tal que $(5\,T^{-1} - T)_H$ sea diagonal.

T2. Sea $B = \{v_1, v_2\}$ una base del espacio vectorial $\mathbb{V}$. Determinar la matriz $(T)_B$ del operador lineal T que verifique las dos condiciones siguientes: (a) $T^2 = I_V$; (b) $T(v_2 - v_1) = 2v_1$, y hallar, siempre que sea posible, una base H de $\mathbb{V}$ tal que $(3\,T^{-1} - T)_H$ sea diagonal.

Sugerencia de resolución T1. Como $v_1 - v_2 = T^2(v_1 - v_2) = T(2v_2)$, se tiene que $T(v_1) = \frac{1}{2}(v_1 + 3v_2)$, $T(v_2) = \frac{1}{2}(v_1 - v_2)$, de modo que $A = (T)_B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$. Además, como $T^{-1} = I_v\,T^{-1} = T^2\,T^{-1} = T$, resulta que $5\,T^{-1} - T = 4T$. Por otra parte, siendo $\sigma(A) = \{\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1\}$ con autoespacios $S_{\lambda 1}(A) = gen\{w_1 = v_1 + v_2\}$, $S_{\lambda 2}(A) = gen\{w_2 = v_1 - 3\,v_2\}$, en la base $H = \{w_1, w_2\}$ la matriz que representa al operador $5\,T^{-1} - T = 4T$ es diagonal: $(5\,T^{-1} - T)_H = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$.

Sugerencia de resolución T2. Como $v_2 - v_1 = T^2(v_2 - v_1) = T(2v_1)$, se tiene que $T(v_1) = \frac{1}{2}(-v_1 + v_2)$, $T(v_2) = \frac{1}{2}(3v_1 + v_1)$, de modo que $A = (T)_B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Además, como $T^{-1} = I_v\,T^{-1} = T^2\,T^{-1} = T$, resulta que $3T^{-1} - T = 2T$. Por otra parte, siendo $\sigma(A) = \{\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1\}$ con autoespacios $S_{\lambda 1}(A) = gen\{w_1 = v_1 + v_2\}$, $S_{\lambda 2}(A) = gen\{w_2 = 3v_1 - v_2\}$, en la base $H = \{w_1, w_2\}$ la matriz que representa al operador $3T^{-1} - T = 2T$ es diagonal: $(3T^{-1} - T)_H = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 3

T1. En el espacio $\mathbb{R}^{2x2}$ con el producto interno canónico, sea A la proyección de $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ sobre el subespacio $S = \{X \in \mathbb{R}^{2x2}: X^T = X\}$. Determinar los puntos del conjunto $H = \{x \in \mathbb{R}^2: x^T A x = 8\}$ que se encuentran más próximos al vector nulo, calcular esa distancia y graficar H y los puntos obtenidos.

T2. En el espacio $\mathbb{R}^{2x2}$ con el producto interno canónico, sea A la proyección de $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ sobre el subespacio $S = \{X \in \mathbb{R}^{2x2}: X^T = X\}$. Determinar los puntos del conjunto $H = \{x \in \mathbb{R}^2: x^T A x = 8\}$ que se encuentran más próximos al vector nulo, calcular esa distancia y graficar H y los puntos obtenidos.

Sugerencia de resolución T1. Como con el producto interno canónico el complemento ortogonal de S es el subespacio de las matrices antisimétricas, la descomposición (única) inmediata $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ prueba que A = $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$. Entonces el conjunto H tiene por ecuación $(x_1 + x_2)^2 = 4$, esto es el par de rectas paralelas de ecuación $|x_1 + x_2| = 2$, siendo los puntos más próximos pedidos $P_{1,2} = \pm (1\ 1)^T$, que se encuentran a distancia $\sqrt{2}$ del origen de coordenadas. Observación: si se utiliza que $x^T M x$ es nulo para una matriz antisimétrica puede omitirse el cálculo de A, ya que $x^T B x = x^T A x$.

Sugerencia de resolución T2. Como con el producto interno canónico el complemento ortogonal de S es el subespacio de las matrices antisimétricas, la descomposición (única) inmediata $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ prueba que A = $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$. Entonces el conjunto H tiene por ecuación $(x_1 + x_2)^2 = 4$, esto es el par de rectas paralelas de ecuación $|x_1 + x_2| = 2$, siendo los puntos más próximos pedidos $P_{1,2} = \pm (1\ 1)^T$, que se encuentran a distancia $\sqrt{2}$ del origen de coordenadas. Observación: si se utiliza que $x^T M x$ es nulo para una matriz antisimétrica puede omitirse el cálculo de A, ya que $x^T B x = x^T A x$.

Ejercicio 4

T1. Hallar una matriz $A \in \mathbb{R}^{2x3}$ que verifique las tres condiciones siguientes: (i) $A^T A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; (ii) la matriz de proyección sobre el espacio $Col(A)$ es $P = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$; (iii) $\hat{x} = (1\ \ 1\ \ 0)^T$ es la solución por cuadrados mínimos de norma mínima del sistema $A\,x = (6\ \ 2)^T$.

T2. Hallar una matriz $A \in \mathbb{R}^{2x3}$ que verifique las tres condiciones siguientes: (i) $A^T A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$; (ii) la matriz de proyección sobre el espacio $Col(A)$ es $P = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$; (iii) $\hat{x} = (1\ \ 0\ -1)^T$ es la solución por cuadrados mínimos de norma mínima del sistema $A\,x = (3\ \ -1)^T$.

Sugerencia de resolución T1. Hallar una descomposición en valores singulares reducida de A y obtener A^+. $A^+ (6\ \ 2)^T = (1\ 1\ 0)^T$.

Sugerencia de resolución T2. Hallar una descomposición en valores singulares reducida de A y obtener A^+. $A^+ (3\ \ -1)^T = (1\ 0\ -1)^T$.

Ejercicio 5

T1. Demostrar las siguientes propiedades: (a) Si $U \in \mathbb{C}^{n\,x\,n}$ es unitaria, $|\det(U)| = 1$; (b) Si $A \in \mathbb{R}^{n\,x\,n}$, $|\det(A)|$ es igual al producto de los valores singulares de A.

T2. Demostrar las siguientes propiedades: (a) Si $U \in \mathbb{C}^{n\,x\,n}$ es unitaria, $|\det(U)| = 1$; (b) Si $A \in \mathbb{R}^{n\,x\,n}$, $|\det(A)|$ es igual al producto de los valores singulares de A.

Sugerencia de resolución T1. (a) $U^H U = I_d$. (b) Escribir la DVS de A, aplicar el determinante y considerar la propiedad (a).

Sugerencia de resolución T2. (a) $U^H U = I_d$. (b) Escribir la DVS de A, aplicar el determinante y considerar la propiedad (a).