EXAMEN INTEGRADOR 3 de julio de 2013

Recuerde que esta es sólo <u>una</u> posible resolución de los ejercicios.

TEMA 1

1. Sea $T : P2 \longrightarrow P_2$ transformación lineal tal que $[T]_E = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ k+2 & 1 & k+2 \\ k^2-5 & 0 & k^2-3 \end{bmatrix}$

siendo
$E = \{1, t, t^2\}$ y $k \in \mathbb{R}$.

(**a**) Halle todos los $k \in \mathbb{R}$ para los cuales existe una base B de P_2 tal que:
$[T]_B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(**b**) Para los valores de k hallados, describa todos los $P \in P_2$ para los que existe $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} T^n(P)$.

Resolución

a) Las matrices $[T]_E$ y $[T]_B$ son matrices semejantes. Para toda base B de P_2 , se cumple que $[T]_B = C_{EB}\,[T]_E\, C_{BE}$ y, recordando que $C_{EB} = C_{BE}^{-1}$, queda probada la relación de semejanza. Por ser matrices semejantes, tienen los mismos autovalores, con la misma multiplicidad algebraica y geométrica.
Entonces, para que la representación matricial de T, con respecto a cierta base sea la matriz diagonal dada, tenemos que hallar los valores de $k \in \mathbb{R}$ para los cuales se cumple que $[T]_E$ es diagonalizable con $\lambda_1 = 1$ autovalor doble y $\lambda_2 = 2$ autovalor simple.
Si $A = [T]_E \Longrightarrow p_A(\lambda) = (\lambda - 2)\,(\lambda - 1)\,(\lambda - k^2 + 3) = 0 \Longleftrightarrow \lambda = 1, \lambda = 2$ o $\lambda = k^2 - 3$.
Como $\lambda = 1$, debe ser autovalor doble $\Longrightarrow k^2 - 3 = 1 \Longleftrightarrow k = 2$ o $k = -2$. Para estos dos valores de k, se cumple que $\lambda = 1$ es un autovalor de multiplicidad algebraica 2, para que la matriz resulte diagonalizable la multiplicidad geométrica debe coincidir con la algebraica.
Entonces, reemplazamos estos valores de k en la matriz A y calculamos, para cada uno de ellos, la dimensión del autoespacio asociado a $\lambda = 1$. Reemplazando en la matriz, se obtiene facilmente que si $k = 2 \Longrightarrow dim(S_{\lambda=1}) = 1$ y si $k = -2 \Longrightarrow dim(S_{\lambda=1}) = 2$. Por lo tanto, el único valor de k, para el cual las matrices dadas son semejantes es $k = -2$.

b) Ahora, para $k = -2$ buscamos todos los $P \in \mathrm{P}_2$ para los que existe $\lim\limits_{\mathrm{n} \longrightarrow +\infty} T^n(P)$.

Para $k = -2$, los autoespacios asociados a $\lambda = 1$ y $\lambda = 2$ son :
$S_{\lambda=1} = gen\{t, t^2\}$ y $S_{\lambda=2} = gen\{1 - t^2\}$.
De aquí, podemos construir inmediatamente la base de P_2 formada por los autovectores de T: $B = \{1 - t^2, t, t^2\}$.
El cálculo pedido resulta mucho más sencillo si descomponemos todo polinomio de P_2 en función de los autovectores de T y recordamos que, si v es autovector de T asociado al autovalor $\lambda \Longrightarrow T^n(v) = \lambda^n v$.
Si $P \in P_2 \Longrightarrow P = a(1 - t^2) + bt + ct^2,$ para $a,\ b,\ c \in \mathbb{R}$ y además:

$$\begin{aligned} T^n(P) &= a\,T^n(1 - t^2) + b\,T^n(t) + c\,T^n(t^2) = a\,(2)^n(1 - t^2) + b\,(1)^n t + c\,1^n t^2 = \\ &= a\,2^n(1 - t^2) + b\,t + c\,t^2, \forall\, n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Como $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} 2^n = +\infty$, concluimos que $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} T^n(P)$ existe $\iff a = 0 \iff P \in gen\{t, t^2\}$.

2. (a) Encuentre una matriz $A \in \mathbb{R}^{3\times3}$ simétrica con $rg(A) = 2$ que cumpla :

- $\max\limits_{\|X\|=1} X^T(2I - A)X = 4$ y se alcanza en $X_M = \pm[3/5\ 4/5\ 0]^T$
- $\min\limits_{\|X\|=1} X^T(3I - A)X = 1$ y se alcanza en $X_m = \pm[0\ 0\ 1]^T$

(b) Si $B = A^2$, muestre máximos y mínimos de $Q(X) = X^TBX$, si $\|X\| = 1$ y los puntos dónde se alcanzan dichos extremos.

Resolución

a)Recordemos que si λ es autovalor de A asociado a $v \Longrightarrow k - \lambda$ es autovalor de $kI - A$ asociado al mismo autovector v. Teniendo en cuenta esto y los resultados obtenidos del estudio de optimización de funciones cuadráticas, sabemos que:

Existe λ_1 autovalor de A tal que $2-\lambda_1 = 4$ y su autoespacio asociado es $S_1 = \text{gen}\{[3/5\ 4/5\ 0]^T\}$

Existe λ_2 autovalor de A tal que $3-\lambda_2 = 1$ y su autoespacio asociado es $S_2 = \text{gen}\{[0\ 0\ 1]^T\}$

Además, como $rg(A) = 2 \Longrightarrow \lambda = 0$, es autovalor de A y como A es una matriz simétrica y a autovalores distintos corresponden autovectores ortogonales, obtenemos que $S_{\lambda=0} = \text{gen}\{[-4/5\ \ 3/5\ \ 0]^T\}$

Por lo tanto los autovalores de A, con sus respectivos autoespacios , son:

- $\lambda = -2$ y $S_{\lambda=-2} = \text{gen}\{[3/5\ 4/5\ 0]^T\}$
- $\lambda = 2$ y $S_{\lambda=2} = \text{gen}\{[0\ 0\ 1]^T\}$
- $\lambda = 0$ y $S_{\lambda=0} = \text{gen}\{[-4/5\ 3/5\ 0]^T\}$

Una diagonalización ortogonal de A será:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -4/5 & 3/5 \\ 0 & 3/5 & 4/5 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -4/5 & 3/5 & 0 \\ 3/5 & 4/5 & 0 \end{bmatrix}$$

b) Si $B = A^2$, muestre máximos y mínimos de $Q(X) = X^TBX$ si $\|x\| = 1$ y los puntos dónde se alcanzan dichos extremos.

Resolución

Sabemos que si λ es autovalor de A asociado al autovector $v \Longrightarrow \lambda^2$ es autovalor de $B = A^2$ asociado al mismo autovector.

Por lo tanto, los autovalores de B son $\lambda = 4$, de multiplicidad 2 y $\lambda = 0$ de multiplicidad 1.

$$S_{\lambda=4} = \text{gen}\{[3/5\ \ 4/5\ \ 0]^T, [0\ 0\ 1]^T\} \text{ y } S_{\lambda=0} = \text{gen}\{[-4/5\ \ 3/5\ \ 0]^T\}$$

Además, por lo visto con respecto a optimización de funciones cuadráticas:

$$\max_{\|X\|=1} X^TBX = 4 \text{ y se alcanza en } X_M = S_{\lambda=4} \cap \{X \in \mathbb{R}^3 : \|X\| = 1\}$$

$$\min_{\|X\|=1} X^TBX = 0 \text{ y se alcanza en } X_m = S_{\lambda=0} \cap \{X \in \mathbb{R}^3 : \|X\| = 1\}$$

Resumiendo:

$$\max_{\|X\|=1} X^T B X = 4 \text{ y se alcanza en } X_M = \alpha[3/5 \ \ 4/5 \ \ 0]^T + \beta[0\ 0\ 1]^T;\ \alpha^2+\beta^2 = 1.$$

(La condición que cumplen α y β sale usando Pitágoras).

$$\min_{\|X\|=1} X^T B X = 0 \text{ y se alcanza en } X_m = \pm[-4/5 \ \ 3/5 \ \ 0]^T$$

3. a) Si H es la matriz de la reflexión con respecto al plano $S = \{X \in \mathbb{R}^3 / 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 0\}$, resuelva el sistema: $X' = HX$.

Resolución

Como H es la matriz de reflexión con respecto al plano S, conocemos sus autovalores y autovectores (*¿por qué?*) :

- $\lambda = -1$ es autovalor de H y su autoespacio es $S_{\lambda=-1} = \text{gen}\{[2 \ \ -2\ 1]^T\}$

- $\lambda = 1$ es autovalor de H y su autoespacio es $S_{\lambda=1} = \text{gen}\{[1\ 1\ 0]^T, [0\ 1\ 2]^T\}$
  Por lo tanto todas las soluciones del sistema homogéneo $X' = HX$ se escriben como:

$$X(t) = k_1\ e^{-t} \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} + k_2\ e^{t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + k_3\ e^{t} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix};\ \ k_1,\ k_2,\ k_3\ \in \mathbb{R}.$$

b) Halle todas las soluciones de la ecuación diferencial $y'' - y' - 2y = 4x + 6$, para las que existe $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \frac{y(x)}{x}$.

Resolución

El polinomio característico asociado a la ecuación diferencial es : $P(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 2 = (\lambda - 2)(\lambda + 1) = 0 \Longleftrightarrow \lambda = 2$ o $\lambda = -1$
Por lo tanto la solución general del sistema homogéneo esta dada por :
$y_H(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x};\ c_1,\ c_2 \in \mathbb{R}$.
Buscamos una solución particular, por el método de coeficientes indeterminados. Para ello proponemos $y_p(x) = ax + b$ y reemplazando en la ecuación obtenemos: $y_p(x) = -2x - 2$

Ya tenemos entonces, la solución general del sistema: $y_G(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x} - 2x - 2$.
Ahora buscamos aquellas para las que existe $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \dfrac{y(x)}{x}$.

$$\frac{y_G(x)}{x} = \frac{c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x} - 2x - 2}{x} = c_1 \underbrace{\frac{e^{2x}}{x}}_{\longrightarrow +\infty} + c_2 \underbrace{\frac{e^{-x}}{x}}_{\longrightarrow 0} - 2 - \underbrace{\frac{2}{x}}_{\longrightarrow 0}$$

Por lo tanto, el límite existe sólo si $c_1 = 0$.
Luego, la soluciones de la ecuación que cumplen lo pedido son: $y(x) = ce^{-x} - 2x - 2,\ c \in \mathbb{R}$.

4. Dada $A \in \mathbb{R}^{4\times 3}$, $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ y $b = \begin{bmatrix} 5 \\ 12 \\ 14 \\ -5 \end{bmatrix}$

Demuestre que todas las soluciones por cuadrados mínimos del sistema $AX = b$ cumplen que $\|x\| \geq 5$.

Resolución

Sabemos que la solución por cuadrados mínimos del sistema $AX = b$ de mínima norma puede encontrarse a través de la fórmula $X^+ = A^+ b$.

De la factorización dada para la matriz A puede hallarse inmediatamente una D.V.S. reducida :

$$A = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Entonces:

$$A^+ = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/6 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Calculamos X^+:

$X^+ = A^+ b = b = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$ y como $\|X^+\| \leq \|\hat{X}\|$ para toda $\hat{X}$, solución del problema de cuadrados mínimos, obtenemos la desigualdad pedida: $5 \leq \|\hat{X}\|$.

5. Demuestre las siguientes afirmaciones:

a) Si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es una matriz simétrica tal que sus autovalores máximo y mínimo son $\lambda_1 = 5$ y $\lambda_2 = 1$, respectivamente, entonces $\exists w \in \mathbb{R}^n$, tal que $\|w\| = 1$ y $w^T A w = 3$.

Resolución

Como $\lambda_1 = 5$ y $\lambda_2 = 1$ son autovalores de A, existen v_1 y v_2 autovectores asociados a λ_1 y λ_2 respectivamente, tales que $\|v_1\| = \|v_2\| = 1$. Además $v_1 \perp v_2$, pues A es simétrica y a autovalores distintos corrsponden autovectores ortogonales.

Para probar lo pedido, proponemos $w = \alpha v_1 + \beta v_2$ y buscamos α y β para que se cumplan las condiciones: $\|w\| = 1$ y $w^T A w = 3$.

$\|w\| = 1 = 1 \Longleftrightarrow \|\alpha v_1 + \beta v_2\|^2 = \alpha^2 + \beta^2 = 1$. La última igualdad vale por Pitágoras y porque los vectores son unitarios.

$w^T A w = 3 \Longleftrightarrow (\alpha v_1 + \beta v_2)^T A(\alpha v_1 + \beta v_2) = 3 \Longleftrightarrow 5\alpha^2 + 1\beta^2 = 3$

Por lo tanto sólo queda encontrar α y β que cumplan simultáneamente:

$\alpha^2 + \beta^2 = 1$ y $5\alpha^2 + 1\beta^2 = 3$. Se obtienen cuatro soluciones $(\alpha, \beta) = (\pm\sqrt{1/2}, \pm\sqrt{1/2})$.

Entonces, por ejemplo $w = \sqrt{1/2}v_1 + \sqrt{1/2}v_2$, cumple las dos condiciones. Por lo tanto, existe $w \in \mathbb{R}^n$, tal que $\|w\| = 1$ y $w^T A w = 3$.

b) Si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}, rg(A) = 1$, demuestre que A es diagonalizable $\Leftrightarrow Col(A) \oplus Nul(A) = \mathbb{R}^n$.

Resolución

$\Rightarrow$)Si $rg(A) = 1 \Longrightarrow dim(Nul(A)) = n-1 = S_{\lambda=0}$, como A es diagonalizable la multiplicidad algebraica de $\lambda = 0$ también es $n-1 \Longrightarrow$ existe $k \neq 0$ que es autovalor de A asociado a un autovector w y $Aw = kw, \Longrightarrow Col(A) = \text{gen}\{w\}$ y, obviamente $w \notin Nul(A)$. Luego $Col(A) \oplus Nul(A) = \mathbb{R}^n$

$\Leftarrow$) Ahora tenemos que $rg(A) = 1$ y $Col(A) \oplus Nul(A) = \mathbb{R}^n$
Como $rg(A) = 1 \Longrightarrow \dim(Nul(A)) = n-1$ y $\dim(Col(A)) = 1$.
Como $Col(A) \oplus Nul(A) = \mathbb{R}^n \Longrightarrow \exists w$ tal que $Col(A) = \text{gen}\{w\}$ y $w \notin Nul(A)$. Además $Aw = kw,$ pues $Aw \in Col(A)$ y $k \neq 0$, pues si $k = 0 \Longrightarrow w \in Nul(A)$ y esto contradice la hipótesis $\Longrightarrow$ si $B = \{v_1, \ldots, v_{n-1}, w\}$ con $\{v_1, \ldots, v_{n-1}\}$ una base de $Nul(A) \Longrightarrow B$ es una base de $\mathbb{R}^n$, formada por autovectores de A y , por lo tanto, A es diagonalizable.