FIUBA. Matemática Discreta (61.07) **Examen Final**, 16.12.2014. **Profesor:**		
Alumno:	Legajo:	Cursada:

Duración: tres horas. Aprobación: resolución ***completa*** y ***justificada*** de ***tres*** ejercicios cualesquiera.

1. Sea $\mathbf{K}_n$ el grafo completo de n vértices (esto es, un grafo simple en el que cada vértice es adyacente a los restantes). Obtener una ecuación de recurrencia que proporcione la cantidad de aristas a_{n+1} de $\mathbf{K}_{n+1}$ en función de la cantidad de aristas a_n de $\mathbf{K}_n$, resolverla y comprobar mediante un gráfico que, en particular para $\mathbf{K}_5$, la solución es satisfactoria.

2. Sea M la matriz de adyacencia de un grafo finito $\mathrm{G} = (\mathrm{V}, \mathrm{E})$, $\mathrm{V} = \{v_1, \cdots, v_i, \cdots, v_j, \cdots, v_q\}$. Probar por inducción que, para todo número natural n, el elemento $M^n(i,j)$ indica la cantidad de caminos de longitud n que comunican el vértice v_i con el vértice v_j.

3. El conjunto $B = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$ se estructura en un álgebra de Boole con las leyes $+$ y $\cdot$ que quedan definidas en la siguiente tabla.

$+$	α	β	γ	δ	$\cdot$	α	β	γ	δ
α	α				α				α
β	β		δ		β				β
γ	γ				γ		α		γ
δ	δ				δ				δ

Completar la tabla y hallar *todos* los $(x, y, z, w) \in B^4$ que satisfacen el sistema:

$$\begin{cases} w \cdot (x + y + z) = \delta \\ x \cdot y + x \cdot z = y \cdot w \\ x \cdot y \cdot w = \alpha \cdot \gamma \end{cases}$$

4. Sea M la matriz de adyacencia del grafo conexo ponderado $\mathrm{G} = (\mathrm{V}, \mathrm{E})$, con $\mathrm{V} = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$, y sea P la matriz de los pesos correspondientes a las aristas.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Graficar G y obtener un mínimo árbol generador, detallando las etapas intermedias que permiten construir ese árbol.

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 4 & 8 & 2 \\ 6 & 0 & 5 & 8 & 6 \\ 4 & 5 & 0 & 9 & 4 \\ 8 & 8 & 9 & 0 & 7 \\ 2 & 6 & 4 & 7 & 0 \end{pmatrix}$$

5. Sea M la matriz de adyacencia del grafo orientado $\mathrm{G} = (\mathrm{V}, \mathrm{E})$, siendo su conjunto de nodos $\mathrm{V} = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Graficar G y escribir, siempre que exista, un circuito euleriano, indicándolo en el gráfico de G.

(b) Determinar si el grafo G es hamiltoniano; en caso afirmativo, dar un circuito hamiltoniano.