Análisis Matemático II (61.03-81.01)

Profesora responsable: Silvia Cerderbaum

Página web de la asignatura

http://materias.fi.uba.ar/6103/ Diseño y actualización a cargo de Jorge Comas.

Bibliografía

* Cálculo vectorial

- Apostol, Tom M. *Calculus*, vol I y II, Reverté, 2010.
- Courant, J. *Introducción al Cálculo y al Análisis Matemático 2*, Limusa, 1994.
- Mardsen, J. & Tromba, A. J.*Cálculo Vectorial*, Ed. Addison-Wesley, 1998
- Penney, E. *Cálculo y Geometría Analítica*, Prentice-Hall Hispanoamericana, 1994.
- Pita Ruiz, Claudio, *Cálculo Vectorial* , Prentice-Hall Hispanoamericana, 1995.
- Santaló. L. A. *Vectores y Tensores con sus aplicaciones*, Eudeba, 1993.
- Spiegel, M. *Cálculo Superior*, Mc-Graw Hill, 1991.

* Ecuaciones Diferenciales

- Blanchard P., Devaney R., Hall G., *Ecuaciones Diferenciales*, Editorial Thomson, 1998.
- Kreider, D., Kuller y Ostberg, D.*Ecuaciones Diferenciales*, Fondo Educativo Interamericano, 1973.
- Zill, D. G. *Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones*, Grupo Editorial Iberoamericana, 2007.

Observación Los ejercicios indicados con $(*)$ en las diferentes guías son de conocimiento indispensable u obligatorio

Índice general

Guía I: Ecuaciones diferenciales ordinarias

1. Dadas las siguientes ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden

   - Indicar cuáles son de variables separables o lineales.
   - Demostrar que la función propuesta es solución de la ecuación.

   a) $y' = 3\,y, \qquad y = e^{3\,x}.$

   b) $y' + 4\,y = 8\,x, \qquad y = 2\,x - e^{-4\,x} - 1/2.$

   c) $x\,y' = 2\,y, \qquad y = x^2.$

   d) $y\,y' - 4\,x = 0, \qquad y = 2\,x.$

2. En los siguientes casos, verificar que la función propuesta es solución general de la ecuación diferencial ordinaria de primer orden y determinar el valor de las constantes de manera que se satisfaga la condición dada. Graficar aproximadamente la solución obtenida.

   a) $y' - 3\,y = 3, \qquad y = -1 + c\,e^{3\,x}, \qquad y(0) = 2$

   b) $(*)\ y'y = x, \qquad y^2 - x^2 = c, \qquad y(0) = 1$

   c) $y' = \frac{x\,y}{x^2-1}, \qquad x^2 + c\,y^2 = 1, \qquad y(1) = 2$

3. Hallar la solución de la ecuación $2.b$ cuyo gráfico pasa por el punto $(1, 2)$.

4. Proponer una ecuación diferencial de primer orden de manera que la familia de curvas dada corresponda a su solución general.

   a) (∗) $x\,y = c$.

   b) $4\,x^2 - 2\,y^3 = c$.

   c) $y = a + \ln(b/x)$.

   d) (∗) Parábolas con eje x y vértice en el origen de coordenadas.

   e) (∗) Rectas que pasan por el punto $(2, 2)$.

5. En los siguientes casos verificar que la función propuesta es solución general de la ecuación diferencial de segundo orden a coeficientes constantes y determinar el valor de las constantes de manera que se satisfaga la condición dada. Graficar aproximadamente la solución obtenida.

   a) $y'' - y' - 2y = 0$, $\quad y = c_1\, e^{2x} + c_2\, e^{-x}$, $\quad y(0) = 2$, $y'(0) = -3$

   b) $y'' + 3y' + 2y = 0$, $\quad y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x}$, $\quad y(0) = 1$, $y'(0) = 2$

   c) $y'' + y' - 2y = 0$, $\quad y = c_1 e^{x} + c_2 e^{-2x}$, $\quad y(0) = 2$, $y'(0) = 2$

   d) $y'' - 2y' + 4 = 0$, $\quad y = c_1 + c_2 e^{2x} + 2x$, $\quad y(0) = 1$, $\quad y'(0) = 0$

   e) $y'' + y = 0$, $\quad y = c_1\, \mathrm{sen}(x) + c_2\, \cos(x)$, $\quad y(0) = -1$, $y'(0) = 1$

   f) $y'' + 4y = 0$, $\quad y = c_1 \,\mathrm{sen}(2t + c_2)$, $\quad y(0) = 1$, $\quad y'(0) = 2$

   g) $y'' + 2\,y' + 5\,y = 0$, $\quad y = c_1\, e^{-t}\, \mathrm{sen}(2\,t) + c_2\, e^{-t}\, \cos(2\,t)$, $\quad y(0) = 0$, $y'(0) = 2$

   h) $y''+4y'+13y = 0$, $\quad y = c_1 e^{-2t}\, \mathrm{sen}(3t+c_2)$, $\quad y(0) = -1$, $\quad y'(0) = 1$

6. Comprobar que $y = e^{-2t} cos(3t)$ e $y = e^{-2t} sen(3t)$ son soluciones de la ecuación diferencial $y'' + 4y' + 13y = 0$ y escribir la solución general.

7. Resolver los siguientes problemas:

   a) Hallar la solución general de $x\,dy = y\,dx$.

b) (∗) Hallar la solución del problema de valores iniciales $x\,y' = (x\,y - x)$, $y(0) = 2$.

c) Hallar la solución general de $y\,y' = x\ \mathrm{sen}(x^2)$.

d) (∗) Hallar la solución general de $x\,\frac{dy}{dx} - y^2 = x\,y^2$.

e) (∗) Hallar la solución del problema de valores iniciales $y' + 2\,x^2\,y = x^2$, $y(0) = 2$.

f) Hallar la solución del problema de valores iniciales $y' + y = 1$, $y(0) = 5/2$.

g) Hallar la solución del problema de valores iniciales $y' + y = x^3$, $y(0) = 1$.

h) Hallar la solución general de $y' + 3\,y = 2$.

i) (∗) Hallar la solución general de $y' + y\ \mathrm{sen}(x) = \mathrm{sen}(2\,x)$.

j) (∗) Hallar la solución del problema de valores iniciales $x\,y' + y = x^2$, $y(3) = 0$.

k) Hallar la solución del problema de valores iniciales $x\,y' = y^2 + x\,y$, $y(1) = 1$.

8. Hallar en cada caso la familia de curvas ortogonales a las de la familia dada. Ilustrar mediante un gráfico.

(a) (∗) $y = c\,x^2$ (b) (∗) $x^2 + y^2 = c$ (c) $x\,y = c$

(d) $2\,x + y = c$ (e) $x - 3 = c\,y^2$

9. (∗) Resolver:

a) Hallar las curvas planas tales que la recta normal en todo punto pasa por el origen.

b) Hallar las curvas planas tales que la recta tangente en todo punto pasa por el origen.

c) Hallar las curvas planas tales que la pendiente en cada punto es igual al cociente ordenada/abscisa del punto.

d) Hallar las curvas planas tales que la pendiente en cada punto es igual al cociente abscisa/ordenada del punto.

e) Hallar la curva plana que pasa por $(1, 6)$ y satisface que en cada punto de coordenadas (x, y) la recta tangente se interseca con el eje de ordenadas en el punto $(0, 5y)$.

f) Hallar las curvas para las que el área del triángulo que tiene como vértices un punto P de la curva, el punto de intersección de la tangente en el punto P con el eje x, y la proyección de P en el eje x es constante (no depende de P) y vale 2.

10. $(*)$ Un termómetro que marca 10℃ se lleva a una habitación a 20℃. En un minuto la temperatura del termómetro asciende a 15℃. Si la velocidad con que cambia la temperatura del termómetro es proporcional a la diferencia entre su temperatura y la de la habitación (que se supone constante [1]), obtener y graficar el comportamiento de la temperatura del termómetro en función del tiempo. ¿Cuándo estará a 1℃ de la temperatura ambiente?

11. Resolver los siguientes problemas:

a) La rapidez de desintegración de una sustancia radiactiva es proporcional a la cantidad de sustancia presente. Si hay inicialmente 50 gr de sustancia y al cabo de 3 días quedan solamente 10 gr, ¿qué porcentaje de la cantidad original quedará al cabo de 4 días?

b) Una población P de bacterias crece con $\frac{\frac{dP}{dT}}{P}$ constante 0,03 durante T días, al cabo de los cuales se incrementa a 0,05. Hallar T sabiendo que la población se duplicó en 20 días.

c) Una bola esférica de nieve se derrite de manera que la derivada de su volumen $V(t)$ respecto del tiempo t es proporcional a su área en ese mismo momento. Si para $t = 0$ el diámetro es de 5cm y 30 minutos después el diámetro es de 2cm. ¿En qué momento el diámetro será de 1cm?

[1] Caso del cuerpo colocado en un fluido (aire de la habitación) indefinido a temperatura uniforme.

d) Una bola esférica de nieve se derrite de manera que la razón de cambio de su diámetro $d(t)$ respecto del tiempo t es proporcional a su área en ese mismo momento. Si para $t = 0$ el diámetro es de 5cm y 30 minutos después el diámetro es de 3cm. ¿En qué momento el diámetro será de 1cm?

12. Resolver los siguientes problemas:

    a) Un objeto de masa m cae hacia la superficie de la Tierra, su caída está retardada por la resistencia del aire que es proporcional a su velocidad por lo tanto, a partir de la segunda Ley de Newton sabemos que $m\,\frac{dv}{dt} = m\,g - k\,v$, donde g es la aceleración de la gravedad y $v(t)$ es la velocidad del cuerpo en el instante t. Si la caída comienza en $t = 0$ con $v(0) = 0$, hallar la velocidad del objeto $v(t)$ hasta que llega al piso.

    b) Resolver el problema anterior suponiendo que la resistencia del aire es proporcional al cuadrado de la velocidad.

13. La posición de un punto que se desplaza con movimiento rectilíneo es $e = f(t)$, donde t es el tiempo. Determinar $f(t)$ en los siguientes casos:

    a) Movimiento rectilíneo uniforme (con velocidad $e' = v$ constante), suponiendo que $f(0) = e_0$ es dato.

    b) Movimiento rectilíneo uniformemente acelerado (con aceleración $e'' = a$ constante), suponiendo que $f(0) = e_0$ y $f'(0) = v_0$ son datos.

14. Usar el modelo del Ejercicio 13 para plantear como problema de valores iniciales y resolver: ¿Cuánto tardará en volver a su punto inicial una bala que se dispara hacia arriba verticalmente con velocidad inicial $v_0 = 200m/s$, y a qué altura llegará? (usar $g = 10m/s^2$)

15. ($*$) La ley de Malthus supone que la tasa (o velocidad) de crecimiento de una población (p') es en cada instante directamente proporcional a la cantidad de individuos (p) existentes.

a) Escribir la ecuación diferencial que representa esta relación y verificar que si $p(t_0) = p_0$, resulta $p(t) = p_0\, e^{\alpha\,(t-t_0)}$.

b) Sabiendo que la población de la tierra aumentó en promedio el 2 % anual desde 1960 a 1970 ($\alpha = 0{,}02$) y que al principio de 1965 se estimaba en 3340 millones de personas, calcular mediante este modelo en cuánto tiempo se predice la duplicación de la población (el valor observado fue de 35 años).

c) Cuando el tamaño p de la población es demasiado grande el modelo de Malthus debe ser corregido para contemplar el hecho que los individuos compiten por alimento, recursos naturales y espacio vital disponibles. Así surge la ley logística de crecimiento $p' = \alpha\, p - \beta\, p^2$ propuesta por Verhulst en 1837, donde las constantes α y β se llaman coeficientes vitales de la población.

Resolver la ecuación logística y demostrar que, independientemente de la condición inicial ($p(t_0) = p_0$), la población tiende a α/β cuando $t \to \infty$ (observar que en el modelo lineal es divergente).

16. Considerando la segunda ley de Newton (fuerza(F)=masa(m) aceleración($\frac{dv}{dt}$)), si el movimiento de un punto material con masa m se produce en un medio que le opone una resistencia del tipo $\alpha v + \beta v^n$, donde v es la velocidad, debe cumplirse que $-\alpha\, v - \beta\, v^n = m\, v'$; es decir, $v' + \frac{\alpha}{m}\, v = -\frac{\beta}{m}\, v^n$.

Considerando $n = 2$, $m = 2$ kg, $\alpha = 2$ kg/seg, $\beta = 4$ kg/m, y que a los 0 seg la velocidad inicial es de 20 m/seg, determinar y graficar el comportamiento de la velocidad del punto en función del tiempo.

Nota: en general, la ecuación del tipo: $y' + P(x)\, y = Q(x)\, y^n (n > 1)$ se denomina ecuación de Bernoulli; esta ecuación se reduce a una del tipo lineal mediante la transformación $z = y^{1-n}$ (demostralo).

17. Suponga que un resorte se suspende verticalmente de un soporte rígido y luego se le fija una masa m en su extremo libre, éste se estira s unidades y cuelga en reposo en la posción de equilibrio como se muestra en la figura 1 *a*) y 1 *b*). Después el sistema *resorte/masa* se pone en movimiento, sea $x(t)$ la función que

mide la distancia de la masa al punto de equilibrio, como se indica en la figura 1 c), supongamos que la dirección hacia abajo es positiva y que el movimiento se efectúa a lo largo de una recta que pasa por el centro de gravedad de la masa y que las únicas fuerzas que actuan sobre el sistema son: el peso de la masa y la fuerza de restauración del resorte. Por la *Ley de Hooke*, el resorte mismo ejerce una fuerza restauradora F opuesta a la dirección de enlongación y proporcional a la cantidad de enlongación s, por lo tanto $F = ks$ donde k es una constante llamada *constante del resorte*. En la posición de equilibrio el peso W de la masa m es igual a la fuerza restauradora, es decir $W = F$. Con lo cual obtenemos $mg - ks = 0$. (¿Por qué? Justifique). Si la masa se desplaza de la posición de equilibrio la fuerza restauradora del resorte es ahora: $F = k(x + s)$ suponiendo que la masa vibre libremente se puede usar la *Segunda Ley de Newton* obteniendo: $m\frac{d^2x(t)}{d^2t} = -kx(t)$. Deduzca esta expresión. Una masa que pesa $2kg$ alarga 6 cm un resorte. En $t = 0$ se libera la masa desde un punto que está $8cm$ abajo de la posición de equilibrio con una velocidad ascendente de 3 cm/s. Determinar la ecuación del movimiento $x(t)$.

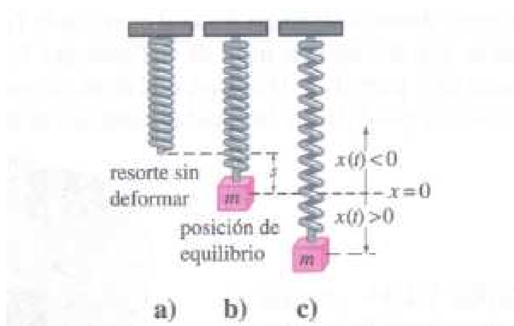


Figura 1: Resorte, Ley de Hooke

Guía II: Geometría del plano y el espacio

1. Describir mediante un gráfico las regiones planas dadas por:

   (a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \leq 1\}$

   (b) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \geq 1,\ x \geq 0\}$

   (c) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y - x^2 + 2x \geq 0, y \geq 2\}$

   (d) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq e^{-y}\}$

   (e) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - 2x + y^2/4 - y \leq 16\}$

   (f) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \mathrm{sen}(x) < 1/2\}$

   (g) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 5\ \mathrm{Senh}(x) < y < 3\ \mathrm{Cosh}(x)\}$

2. Describir mediante inecuaciones en coordenadas cartesianas las regiones planas dadas:

   a) Interior del círculo centrado en $(0, 0)$ y de radio 2.

   b) Cuadrado de lado 1 con ejes paralelos a los ejes coordenados y vértice inferior izquierdo en $(1, 1)$.

   c) Puntos por encima de la parábola de ecuación $y = 2\,x^2$.

   d) Puntos interiores a la elipse de semiejes 2 y 4, paralelos a los ejes coordenados, centrada en $(0, 0)$.

Coordenadas polares

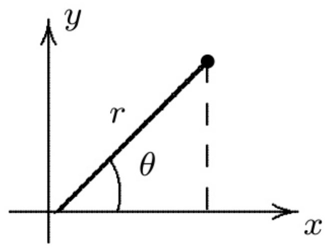


Figura 2: Coordenadas polares

Cambio de Coordenadas

$$\text{De coordenadas cartesianas a polares} = \begin{cases} r = \sqrt{(x^2+y^2)} & \\ \theta = \operatorname{arc\,tg}(\frac{y}{x}) & \text{si } x \neq 0 \\ \theta = \frac{\pi}{2} & \text{si } x = 0,\ y > 0 \\ \theta = \frac{3\pi}{2} & \text{si } x = 0,\ y < 0 \end{cases}$$

$$\text{De coordenadas polares a cartesianas} = \begin{cases} x = r\ \cos(\theta) & r \geq 0,\ 0 \leq \theta < 2\pi \\ y = r\ \text{sen}(\theta) & \end{cases}$$

3. Trazar aproximadamente las curvas descriptas, en coordenadas polares, por:

   (a) $r = constante$, (b) $\theta = constante$

   (c) $r = 2$, $0 \leq \theta < \pi/4$ (d)$1 \leq r \leq 2$, $\theta = \pi/6$

   (e) $r = \cos(\theta)$, $0 \leq \theta < \pi/2$

4. Describir mediante inecuaciones en coordenadas cartesianas las regiones planas descriptas, en coordenadas polares, por:

   (a) $\pi/6 \leq \theta \leq \pi/3$ (b) $1 \leq r < 2$

   (c) $1 < r \leq 2$, $\pi/6 \leq \theta < \pi/3$ (d) $r \geq \theta$

   (e) $r \leq 2\cos(\theta)$, $\theta \in [0, \pi/2] \cup [3/2\pi, 2\pi)$ (f) $r \leq 3\,\text{sen}(\theta)$, $\theta \in [0, \pi]$

¿Por qué fue necesario restringir el dominio de θ en los ítems (e) y (f)?

5. Describir mediante inecuaciones en coordenadas polares las regiones planas descriptas, en coordenadas cartesianas, por:

   (a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$

   (b) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 - 2\,y \leq 0,\ y > |x|\}$

   (c) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \geq 3\,y^2\}$

   (d) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq y,\ x < 3\,y\}$

Curvas en $\mathbb{R}^2$

Definición:

Una curva **C** es la imagen de una función continua $\vec{\alpha} : [a, b] \to \mathbb{R}^2$,
$\vec{\alpha}(t) = (x(t), y(t))$. La función $\vec{\alpha}(t)$ es una parametrización de **C**.

6. ($*$) Hallar una parametrización de:

   a) La circunferencia de radio 5 y centro en $(0, 0)$.

   b) La recta que pasa por $(0, 0)$ y $(2, 2)$.

   c) Todas las rectas que pasan por $(0, 0)$.

   d) Todas las rectas que pasan por $(2, 3)$.

   e) Las parábolas de ecuación $x = ay^2$.

Guía III: Funciones, límite, continuidad, derivadas

Topología y Conjuntos de Nivel

1. Describir mediante inecuaciones el interior y la frontera de los conjuntos dados por:

   (a) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x^2 + y^2 < 1\}$

   (b) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < x^2 + y^2 < 1\}$

   (c) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0,\ y < 0\}$

   (d) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$

   (e) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < |x| + |y| \leq 1\}$

   (f) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 5\}$

2. $(*)$ Dados los siguientes conjuntos, en cada caso analizar si el conjunto es cerrado, abierto y/o acotado y determinar cuáles son los puntos interiores, frontera, exteriores y de acumulación.

   (a) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 2\}$

   (b) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 9x^2 + y^2 \leq 9\}$

   (c) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x^2 - 2x + y^2 < 3\}$

   (d) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + \frac{y^2}{4} + z^2 = 4\}$

3. i) En todo los casos, describir el dominio de f, determinar si es un conjunto cerrado, abierto, acotado.

   ii) Para los incisos, (a), (d), (g); describir los conjuntos de nivel de f y esbozar su gráfico.

iii) Describir en coordenadas polares las curvas de nivel de las funciones de los incisos (b), (c) y (h) que pasan por los puntos $(1,0)$, $(0,1)$ y $(0,0)$, respectivamente. Graficar las mencionadas curvas.

(a) $(*)$ $f(x,y) = 3\,(1 - x/2 - y/2)$

(b)$(*)$ $f(x,y) = \ln(x - y^2)$

(c) $f(x,y) = 9\,x^2 + 4\,y^2$

(d) $f(x,y) = x^2 - y^2$

(e) $f(x,y) = \dfrac{ln(x^2 + y^2 - 9)}{\sqrt{x^2 + y^2 - 4}}$

(f) $f(x,y) = 25 - x^2$

(g)$(*)$ $f(x,y) = e^{-x^2 - y^2}$

(h) $(*)$ $f(x,y) = \sqrt{3x - x^2 - y^2}$

(i) $\vec{f}(x,y) = (\sqrt{x^2 + y^2 - 16}, \dfrac{x+y}{x}, \mathrm{Cosh}(x))$

(j) $(*) f(x,y) = \mathrm{mín}(x,y)$

4. $(*)$ Graficar el conjunto de nivel 0 y el conjunto de nivel 4 de las siguientes funciones:

(a) $f(x,y) = \begin{cases} x + y & \text{si } x \geq -2 \\ 0 & \text{si } x < -2 \end{cases}$

(b) $f(x,y) = sen(y - x)$

5. $(*)$ Describir el dominio y los conjuntos de nivel de los siguientes campos escalares:

a) $f(x,y,z) = x + y + 2z$

b) $f(x,y,z) = e^{x^2 + y^2 - z^2}$

c) $f(x,y,z) = \frac{2x^2 + y^2}{z}$

6. La función $T(x,y)$ representa la temperatura en el punto (x,y) de una placa metálica delgada de grandes dimensiones, ubicada en el plano xy. Las curvas de nivel de T se denominan *isotermas* porque en todos los puntos de una isoterma

la temperatura es la misma. Dibujar algunas isotermas si
$T(x,y) = 64 - 4x^2 - 8y^2$.

7. Si $V(x,y)$ es el potencial electrostático en un punto (x,y) del plano xy, cada conjunto de nivel de V se denomina conjunto equipotencial porque todos los puntos tienen el mismo valor de potencial. Dada $V(x,y) = c/\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$, donde c y r son constantes positivas que se suponen conocidas, analice cuáles son los valores de potencial posibles y dibuje algunos conjuntos equipotenciales.

8. Determinar cuál de las siguientes expresiones es la correcta:

   a) Entorno de un punto contenido en el dominio de una función.

   b) Entorno de un punto perteneciente al dominio de una función.

Límite

9. (∗) Estudiar la existencia de los límites que se indican más abajo fundamentando sus conclusiones con definiciones, propiedades o teoremas.

   (a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt{x^2+y^2}$

   (b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,2)} \frac{y^2\,(x-2)^2}{x^2+(y-2)^2}$

   (c) $\lim\limits_{(x,y)\to(2,0)} \frac{(x-2)^2\,y^2}{(x-2)^2+y^2}$

   (d) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3\,y}{x^2+y^2}$

   (e) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{y}$

   (f) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)} \frac{x^2\,y-2\,x^2-y+2}{x\,y-2\,x+y-2}$

   (g) $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,1,1)} \frac{y+1}{\sqrt{z^2-1}}$

   (h) $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{x}{|x|}, \sqrt{x})$

   i) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)}((y-1)\cos(\frac{1}{x}), \frac{\sin(3x)}{2\,x}, x-y)$

Continuidad

10. (*) Determinar el dominio y los puntos de continuidad de las siguientes funciones:

    a) $f(x,y) = \begin{cases} x^2 - y & \text{cuando } x \neq 2\,y \\ 3 & \text{cuando } x = 2\,y \end{cases}$

    b) $f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{cuando } x - y > 0 \\ 0 & \text{cuando } x - y \leq 0 \end{cases}$

    c) $f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{cuando } xy \neq 0 \\ 1 & \text{cuando } xy = 0 \end{cases}$

    d) $f(x,y) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{si } y = 0,\ \mid x \mid \leq 1 \\ 1 - y^2 & \text{si } x = 0,\ \mid y \mid \leq 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$

11. (*)Determinar, si es posible, el valor de a para que $f(x,y)$ resulte continua en el punto $(0,-1)$

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - x(y+1)^4}{x + (y+1)^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,-1) \\ a & \text{si } (x,y) = (0,-1) \end{cases}$$

12. Sea $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Se definen: g y h de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ mediante $g(x) = f(x,b)$ y $h(y) = f(a,y)$.

    a) Estudiar las relaciones entre los gráficos de h y g y el gráfico de f.

    b) Si f es continua en (a,b): ¿Es g continua en a? ¿Es h continua en b? Justificar.

    c) Si $f(x,y) = x^2 + y^3$ y $(a,b) = (1,2)$, hallar g y h.

    d) Dar un ejemplo para mostrar que g puede ser continua en a y h en b, sin que f sea continua en (a,b).

13. $(*)$ Sea $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, y $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Fijado $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$, se define: $h:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mediante $h(t) = f((a,b) + t\,(\alpha,\beta))$.

    a) Estudiar la relación entre el gráfico de h y el de f

    b) Dar un ejemplo para mostrar que aún cuando para cada $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ h resulte continua en 0, f puede no ser continua en (a,b).

    c) ¿Es cierto que si f es continua en (a,b) entonces h es continua en 0?

Derivadas Parciales

Sean D un conjunto abierto en $\mathbb{R}^2$, $f : D \to \mathbb{R}$, $(x_0, y_0) \in D$. La derivada parcial de f en (x_0, y_0) respecto de x se define como

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = \lim_{\lambda\to 0} \frac{f(x_0+\lambda, y_0) - f(x_0,y_0)}{\lambda}$$

si el límite existe. Analogamente, la derivada parcial de f en (x_0, y_0) respecto de y se define como

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = \lim_{\lambda\to 0} \frac{f(x_0, y_0+\lambda) - f(x_0,y_0)}{\lambda}$$

si el límite existe.

14. $(*)$ Calcular, usando la definición, las derivadas parciales de primer orden de las siguientes funciones en el punto dado:

    a) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{2x^3-y^3}{x^2+3y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$, $P_0 = (0,0)$

    b) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{(x+1)^2-y^2}{x+1-y} & \text{si } x+1 \neq y \\ 0 & \text{si } x+1 = y \end{cases}$, $P_0 = (-1,0)$

    c) $f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x\,y \neq 0 \\ 1 & \text{si } x\,y = 0 \end{cases}$, $P_0 = (0,0)$

    Analizar la continuidad de las funciones de los incisos b) y c) en los puntos indicados.

15. En los siguientes casos, calcular las funciones derivadas parciales de f y luego evaluarlas en el punto indicado. Fundamentar la respuesta con definiciones, propiedades o teoremas.

    a) $(*)$ $f(x, y) = x\,y + x^2, \quad P_0 = (2, 0)$

    b) $(*)$ $f(x, y) = \text{Senh}(x^2 + y), \quad P_0 = (1, -1)$

    c) $(*)$ $f(x, y, z) = x\,z/(y + z), \quad P_0 = (1, 1, 1)$

    d) $(*)$ $f(x, y, z) = \ln(1 + x + y^2\,z), \quad P_0 = (1, 2, 0)$

    e) $(*)$ $g(x, z) = \text{sen}(x\sqrt{z}), \quad P_0 = (\pi/3, 4).$

    f) $(*)$ $f(x, y) = 1/\sqrt{x^2 + y^2}, \quad P_0 = (-3, 4)$

    g) $f(x, y) = \int_x^{y^2} \text{sen}(\ln(1 + t^3))\,dt, \quad P_0 = (1, 2).$

    h) f es la función dada en $10d$) $P_0 = (0, 0)$

16. Hallar las derivadas de segundo orden de las siguientes funciones:

    a) $f(x, y) = \ln(x^2 + y)$. Determine el dominio de f.

    b) $f(x, y, z) = x\ \text{sen}(y) + y\ \cos(z)$

17. Probar que la función $f(x, y) = e^x sen(y)$ satisface la ecuación $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ (*Ecuación de Laplace*).

18. Enunciar algún teorema que asegure la igualdad de las derivadas segundas cruzadas de un campo escalar.

Derivada Direccional

Sean D un conjunto abierto en $\mathbb{R}^n$, $f : D \to \mathbb{R}$, $\bar{x}_0 \in D$ y $\breve{v} \in \mathbb{R}^n$, un versor. La derivada direccional de f en $\bar{x}_0$ en la dirección de $\breve{v}$ se define como

$$\frac{\partial f}{\partial \breve{v}}(\bar{x}_0) = \lim_{\lambda \to 0} \frac{f(\bar{x}_0 + \lambda \breve{v}) - f(\bar{x}_0)}{\lambda}$$

si el límite existe.

Otras notaciones $\frac{\partial f}{\partial \breve{v}}(\bar{x}_0) = f'(\bar{x}_0, \breve{v}) = D_{\breve{v}}(\bar{x}_0)$.

19. Analizar la existencia de las derivadas direccionales de la siguientes funciones en los puntos y direcciones dadas:

    a) $f(x,y) = 3x^2 - 2xy \quad P_0 = (0,2) \quad \breve{v} = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$

    b) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2(y+1)}{x^2+(y+1)^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,-1) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,-1) \end{cases} \quad P_0 = (0,-1) \quad \breve{v} = (v_1, v_2)$

    c) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{e^{x^3}+y^3-1)}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases} \quad P_0 = (0,0) \quad \breve{v} = (v_1, v_2)$

    d) $f(x,y) = \begin{cases} \sqrt{xy} & \text{si } xy \geq 0 \\ x+y & \text{si } xy < 0 \end{cases} \quad P_0 = (0,0) \quad \breve{v} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) \quad \breve{v} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$

Curvas en $\mathbb{R}^n$

20. (∗) Sea C la curva dada por $\vec{\sigma}(t) = (t^2, t^3+1, t^3-1), t \in [0,4]$.

    a) Hallar la ecuación de su recta tangente y su plano normal en $t = 2$.

    b) Probar que la curva es plana.

    c) Hallar la intersección de C con el plano de ecuación $y + z = 2$.

    d) Muestre que la parametrización dada no es regular y encuentre alguna que lo sea.

21. (∗) Sean $\vec{\gamma}_1(t) = (t, |\ t\ |)$ con $t \in [-1,1]$ y $\vec{\gamma}_2(t) = (t^3, |\ t^3\ |)$ con $t \in [-1,1]$.

    a) Verificar que ambas parametrizaciones definen la misma curva plana y graficarla.

    b) Hallar los vectores tangentes a la curva y la rapidez para cada parametrización.

       ¿Existen los vectores tangentes para todo valor del parámetro?

22. (∗) En los siguientes casos, hallar una parametrización regular de la curva definida por el par de ecuaciones, y calcular su recta tangente en el punto indicado.

a) $y = 4 - x$, $z = 4 - x^2$, $(1, 3, 3)$

b) $x^2 + y^2 + z^2 = 2$, $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $(0, 1, 1)$

c) $z = x + y^2$, $x = y^2$, $(4, 2, 8)$

d) $x^2 + y^2 + z^2 = 6$, $z = x^2 + y^2$, $(1, 1, 2)$

e) $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $x = y + z + 2$, $(0, 0, -2)$

23. (∗) Sean $f,\ g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definidas por: $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ y $g(x, y, z) = x^2 - 2\,x + y^2$. Hallar una parametrización para la curva determinada por la intersección de las superficies de nivel de f y g que pasan por $(0, 0, -2)$.

24. Parametrizar las siguientes curvas planas y graficarlas:

    (a) $(x^2 + y^2)^3 = 4x^2y^2$

    (b) $(x^2 + y^2 + y)^2 = x^2 + y^2$

    Estudiar la existencia de los vectores tangentes a las curvas según las parametrizaciones propuestas.

    ¿Las parametrizaciones encontradas son regulares?

25. (∗) Resolver los siguientes problemas:

    a) Una abeja vuela ascendiendo a lo largo de la curva intersección de $z = x^4 + xy^3 + 12$ con $x = 1$. En el punto $(1, -2, 5)$ sigue a lo largo de la tangente. ¿Dónde cruza la abeja el plano $y = 1$?

    b) Una partícula se mueve en el plano de manera que su posición al tiempo t es $\vec{r}(t) = (t - \text{sen}(t), 1 - \cos(t))$. Hallar los máximos de los módulos de su velocidad y su aceleración. Dibujar aproximadamente la trayectoria y los vectores velocidad y aceleración.

    c) Una partícula se mueve a lo largo de la parte superior de la parábola de ecuación $y^2 = 2\,x$ de izquierda a derecha con rapidez de 5 metros por segundo . ¿Cuál es su vector velocidad al pasar por $(2, 2)$?

Guía IV: Diferenciabilidad, superficies

Definición:

Sean D un conjunto abierto en $\mathbb{R}^n$, $\vec{f}: D \to \mathbb{R}^m$ y $\bar{x}_0 \in D$. Si las componentes de $\vec{f}$ $f_1, ..., f_n$ admiten derivadas parciales respecto de todas sus variables en $\bar{x}_0$ la matriz jacobiana de $\vec{f}$ en $\bar{x}_0$ es

$$D\vec{f}(\bar{x}_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\bar{x}_0) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\bar{x}_0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\bar{x}_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\bar{x}_0) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\bar{x}_0) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\bar{x}_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\bar{x}_0) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(\bar{x}_0) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\bar{x}_0) \end{pmatrix} \tag{1}$$

1. Obtener la matriz jacobiana de los siguientes campos escalares y vectoriales:

   a) $(*)$ $f(x, y) = x^2 + 2y$

   b) $\vec{f}(x, y) = (x + y, y - x^2)$

   c) $\vec{f}(u, v) = (u - v^2, ln(u), \sqrt{v})$

   d) $(*)$ $f(\vec{x}) = \|\vec{x}\|$ con $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$

   e) $\vec{f}(r, \theta, z) = (rcos(\theta), rsen(\theta), z)$

   f) $\vec{f}(\rho, \theta, \varphi) = (\rho\ sen(\varphi)\ cos(\theta), \rho\ sen(\varphi)\ sen(\theta), \rho\ cos(\varphi))$

2. *a*) (∗) Sea $f(x,y) = x^2y^2 - 3xy$ un campo escalar definido sobre $\mathbb{R}^2$. Justificar que f es diferenciable en $P_0 = (1,2)$ y hallar la expresión de la diferencial del campo en el punto P_0.

   b) (∗) Sea $\vec{F}(x,y) = (x^2y, y^2x^3, x+y)$ una función vectorial de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^3$. Justificar que la función es diferenciable en $P_0 = (0,1)$ y hallar la expresión de la diferencial de la función vectorial en el punto P_0.

3. (∗) Analizar la diferenciabilidad de las siguientes funciones:

   a) $f(x,y) = \sqrt{x^2 + (y-1)^2}$ en $(0,1)$

   b) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$ en $(0,0)$.

   c) $f(x,y) = \begin{cases} y^2 cos\frac{1}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$ en $(0,0)$.

   d) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x\,y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$ en $(0,0)$.

   e) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x\,|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

   en el origen y sobre los ejes.

4. (∗) Dada $f(x,y) = \begin{cases} xy \ \text{sen}(\dfrac{1}{xy}) & \text{si } x \neq 0,\ y \neq 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$

   Probar que el campo escalar f es diferenciable en el origen de coordenadas y que las derivadas parciales no son funciones continuas en dicho punto.

5. Dados el campo escalar $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y $P_0 \in D$ se pide en cada caso:

   i. Hallar $\nabla f(P_0)$, la curva de nivel de f que pasa por $P_0 = (x_0, y_0)$ y su recta tangente en ese punto. Graficar.

   ii. Representar el gráfico de f, $Q_0 = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$, el plano tangente a la superficie en Q_0 y el vector $\vec{N} = (f'_x(P_0), f'_y(P_0), -1)$

iii. Relacionar lo hecho en (i) y (ii)

a) $f(x,y) = x^2 + y^2, P_0 = (1,1)$

b) $(*)$ $f(x,y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}, P_0 = (1,-1)$

c) $f(x,y) = 5 + 2x - 3y, P_0 = (0,0)$

Justificar que las funciones dadas son diferenciables en los puntos indicados.

¿Esas funciones son diferenciables en sus dominios?

6. $(*)$ Dada la superficie de ecuación $z = x\,y - x^2$,

   a) hallar la ecuación de su plano tangente en $(2,3,2)$;

   b) hallar la ecuación de la recta intersección del plano con la superficie $x + y = 4$.

7. $(*)$ Hallar la ecuación del plano tangente a la superficie de nivel de $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - z$ que pasa por el punto $(0,-1,1)$ en ese punto.

8. $(*)$ Hallar los puntos del cilindro $x = 4 - z^2$ en los que el plano tangente es paralelo al plano yz.

9. $(*)$ Hallar los puntos donde el plano normal a la curva intersección de las superficies $z = 5 - y^2$ y $x = y - 1$ es paralelo al plano tangente a la superficie $x^2 + 3\,x\,y + y^2 - z = 0$ en el $(1,1,5)$.

10. Hallar para cada f el valor aproximado en el punto dado, usando una aproximación lineal:

    a) $(*)$ $f(x,y) = x^3\,y^2$, $\qquad P_0 = (1{,}1\,;\,2{,}99)$

    b) $f(x,y) = x\,e^{x+y}$, $\qquad P_0 = (2{,}05\,;\,-0{,}02)$

    Para la función dada en el inciso (a) calcular el valor $f(P_0)$ y comparar con el valor obtenido con la aproximación lineal.

11. (∗) Probar que la siguiente función definida en $\mathbb{R}^2$ tiene derivadas en todas las direcciones en el origen de coordenadas pero no es diferenciable.

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(x-1)y^2}{(x-1)^2+y^4} & \text{si } (x,y) \neq (1,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (1,0) \end{cases}$$

12. Hallar la derivada direccional de las funciones dadas en los puntos y en las direcciones indicadas.

    a) $f(x,y) = x^2 + sen(y+1)$ en $(-1,-1)$ en la dirección del vector $\breve{i} + \breve{j}$.

    b) (∗) $f(x,y) = x^2\,y + y^2$ en $(1,-1)$ en la dirección del vector que forma una ángulo de $30°$ con el eje x.

13. Hallar los versores para los cuales la derivada direccional de las funciones dadas en los puntos indicados, es máxima, mínima y nula y sus valores:

    a) (∗) $f(x,y) = 2\,x + x\,y$ en $(2,1)$

    b) (∗) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4+(y+1)^3}{x^2+(y+1)^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,-1) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,-1) \end{cases}$ en $(0,-1)$ y en $(1,0)$.

    c) calculada en la guía anterior $19b$

14. (∗) Sea f una función diferenciable tal que $\dfrac{\partial f}{\partial \breve{v}_1} f(a,b) = \sqrt{2}$ siendo $\breve{v}_1 = (\breve{i} - \breve{j})/\sqrt{2}$ y $\dfrac{\partial f}{\partial \breve{v}_2} f(a,b) = \sqrt{5}$ siendo $\breve{v}_2 = (\breve{i} + 2\,\breve{j})/\sqrt{5}$. Hallar la dirección de mínima derivada direccional de f en (a,b) y el valor de dicha derivada.

    Indicar claramente el uso de todas las hipótesis dadas en el ejercicio.

15. En los siguientes casos, suponga que f es una función diferenciable en un punto interior de su dominio, $P_0 = (x_0, y_0)$. A partir de los datos dados, hallar:

    i. el gradiente de f en P_0,

    ii. la dirección de máximo crecimiento de f,

    iii. la dirección de la curva de nivel de f que pasa por P_0,

iv. si es posible, dos direcciones en P_0 sobre las que la pendiente de la superficie S de ecuación $z = f(x,y)$ en el punto $Q_0 = (x_0, y_0, f(P_0))$ sea m.

a) $\frac{\partial f}{\partial x}(P_0) = 1$, $\nabla(f)(P_0) \cdot (1,1) = 3$, $m = 1$.

b) La curva de nivel de f que pasa por P_0 tiene ecuación $x^2 - y = 1$, y la pendiente de $z = f(x,y)$ en la dirección $(1,1)$ es $\sqrt{2}$.

c) $(*)$ El plano tangente a S en el punto Q_0 es paralelo al plano de ecuación $6\,x + 12\,y - 3\,z = 0$, $m = 4$.

d) $(*)$ La recta de ecuación $3x - y = 0$ es perpendicular a la curva de nivel de f por P_0, y la máxima pendiente de S en Q_0 es $\sqrt{5}$, $m = -\sqrt{5}/2$.

e) El vector $(6, 2, -2)$ es perpendicular a S en Q_0, $m = 10$.

f) Los vectores $(1, 0, -1)$ y $(1, 1, 1)$ son tangentes a S en Q_0, $m = 0$.

16. $(*)$ La elevación de una montaña sobre el nivel del mar está dada por la función $f(x,y) = 1500\, e^{-(x^2+y^2)/200}$. El semieje positivo de las x apunta hacia el este y el de las y hacia el norte.

a) Hallar y dibujar algunas curvas de nivel de f.

b) Un alpinista está en $(10, 10)$, si se mueve hacia el noreste, ¿asciende o desciende?, ¿con qué pendiente?

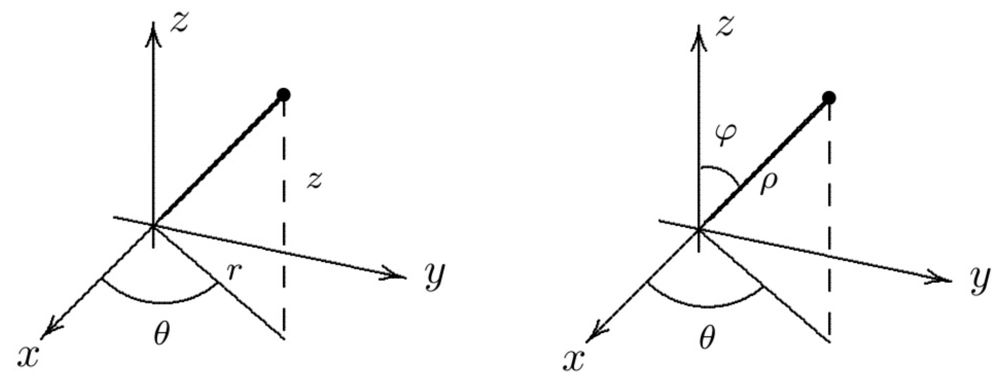
17. El nivel de toxicidad en un laboratorio está dado por $T(x,y) = -3\,x^2 + 4\,y^2$. Un empleado se encuentra en el recinto ubicado en el punto de coordenadas $(-1, 2)$.

a) Hallar y dibujar algunas curvas de nivel de T.

b) ¿En qué dirección deberá moverse para reducir la toxicidad tan rápido como sea posible?

c) ¿A qué razón habría decrecido la toxicidad si se hubiese movido desde el punto $(-1, 2)$ en la dirección del vector $-\breve{\imath} - 2\,\breve{\jmath}$.

Coordenadas Cilíndricas y Esféricas



coordenadas cilíndricas *coordenadas esféricas*

Figura 3: Coordenadas Cilíndricas y esféricas

18. *a*) Los siguientes puntos están dados en coordenadas cilíndricas (r, θ, z)). Hallar su expresión en coordenadas rectangulares y esféricas: $(1, \pi/4, 2)$; $(2, \pi/2, -4)$; $(2, 5\pi/4, 0)$.

    b) Escribir los siguientes puntos de coordenadas rectangulares en coordenadas esféricas y en coordenadas cilíndricas: $(2, 1, 2)$; $(-2, -1, 4)$; $(2, -2\sqrt{2}, -1)$.

19. Describir las superficies $r = constante$, $\theta = constante$ y $z = constante$ en coordenadas cilíndricas. Lo mismo para ,$\rho = constante$, $\theta = constante$ y $\varphi = constante$ en coordenadas esféricas.

20. $(*)$ Describir las superficies dadas en coordenadas cilíndricas, en coordenadas cartesianas. (a) $r^2 \leq z$; $z \geq 4$ (b) $z^2 \geq 2r^2$; $|z| \leq 1$

21. Describir las superficies dadas en coordenadas esféricas, en coordenadas cartesianas. (a) $\theta < \pi/2$; $\varphi < \pi/2$; $\rho = 2$ (b) $\rho \leq 8sen(\varphi)cos(\theta)$; $0 \leq \theta \leq \pi/2$

Superficies Parametrizadas

Definición:

Una superficie $\mathbf{\Sigma}$ es la imagen de una función continua $\vec{X} : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $\vec{X}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$. La función $\vec{X}(u,v)$ parametriza $\mathbf{\Sigma}$.

22. Dada la parametrización de una superficie Σ,
$\vec{X}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$, $(u,v) \in D$ y un punto $Q_0 \in \Sigma$, se pide en cada caso:

    i. Hallar $(u_0, v_0) \in D$ tal que $\vec{X}(u_0, v_0) = Q_0$.
    ii. Obtener la ecuación de Σ en coordenadas cartesianas.
    iii. Dibujar la superficie, trazar las curvas paramétricas por P_0 y sus vectores tangentes en Q_0.
    iv. Hallar una ecuación vectorial y la ecuación cartesiana del plano tangente a Σ en Q_0

    a) (∗) (plano)

    $$\vec{X}(u,v) = (u, v, 3-u-v), \quad D = [0,3] \times [0,3], \quad Q_0 = (1,1,1)$$

    b) (∗) (paraboloide)

    $$\vec{X}(u,v) = (u, v, u^2+v^2), \quad u^2+v^2 \leq 9, \quad Q_0 = (0,2,4)$$

    c) (paraboloide)

    $$\vec{X}(u,v) = (u\,\cos(v), u\,\mathrm{sen}(v), u^2), \quad 0 \leq u \leq 3,\ 0 \leq v \leq 2\,\pi, \quad Q_0 = (0,2,4)$$

    d) (∗) (cilindro elíptico)

    $$\vec{X}(u,v) = (v, 2+\cos(u), 2\,\mathrm{sen}(u)), \quad 0 \leq u \leq \pi,\ 0 \leq v \leq 4, \quad Q_0 = (2, 3/2, \sqrt{3})$$

    e) (∗)(cono)

    $$\overline{X}(u,v) = (v\,\cos(u), 2\,v, v\,\mathrm{sen}(u)), \quad 0 \leq u \leq \pi,\ 0 \leq v \leq 3, \quad Q_0 = (0,4,2)$$

f) (cilindro hiperbólico)

$\vec{X}(u,v) = (\cosh(u), \operatorname{senh}(u), v), \quad -1 \leq u \leq 1,\ 0 \leq v \leq 2, \quad Q_0 = (1,0,1)$

g) (∗)(esfera)

$\vec{X}(u,v) = (3\, sen(u)\, cos(v), 3\, sen(u)\, sen(v), 3\, cos(u) - 1), \quad D = [0,\pi] \times [0, \frac{3}{2}\pi],$
$Q_0 = (-3, 0, -1)$

h) (hiperboloide de una hoja)

$\vec{X}(u,v) = (cos(u) \cosh(v) + 1, sen(u) \cosh(v), \operatorname{senh}(v)), \quad D = [0,\pi] \times [-1,1],$
$Q_0 = (1,1,0)$

23. Hallar una parametrización de:

    a) $x = 4y^2 + z^2$

    b) (∗) $(x-2)^2 + y^2 + (z+4)^2 = 2$

    c) $(y-1)^2 = x^2 + z^2$

    d) (∗) $(y-1)^2 = x^2 + z^2,\ y > 1$

24. (∗) Dada la superficie Σ en forma paramétrica por $\vec{X}(u,v) = (u+v, u-v, u\,v)$, $(u,v) \in R^2$:

    a) Hallar una ecuación cartesiana para Σ.

    b) Hallar la ecuación del plano tangente a Σ en $(3,-1,2)$.

    c) Aproximar el valor de z para que $(3{,}02, -1{,}01, z) \in \Sigma$.

    d) Calcular la distancia desde $(3,-1,2)$ hasta el punto en que la recta normal a Σ en $(3,-1,2)$ interseca al cilindro de ecuación $72\,y = x^2$.

25. (∗) Sean las superficies:
    $\Sigma_1 : \vec{X}(u,v) = (cos(u), 3sen(u), v),\ (u,v) \in\ [\pi, 2\pi] \times [0,5]$ y
    $\Sigma_2 : z = 4 - x^2 - y^2 - 2y.$
    Hallar los puntos de Σ_1 para los cuales el plano tangente a dicha superficie es paralelo al plano tangente a Σ_2 en el punto $(0,0,4)$.

Guía V: Funciones compuestas

Funciones compuestas

1. Determinar, en cada caso, funciones $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que $f = h \circ g$

   a) $f(x, y) = cos(x + y^2)$

   b) $(*)$ $f(x, y) = ln(x^2 - sen(y) + 2)$

2. Determinar, en cada caso, funciones $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\vec{h} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tales que $f = g \circ \vec{h}$

   a) $(*)$ $f(x, y) = senh(xy) + cosh(x^2)$

   b) $f(x, y) = \sqrt{x + y + (x^2 + y^3)^2}$

3. Determinar, en cada caso, funciones $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $\vec{h} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tales que $f = g \circ \vec{h}$

   a) $f(x, y, z) = sen(x + y) + z^2 cos(x - y)$

   b) $(*)$ $f(x, y, z) = e^{x+z+y^2} - (x + z)^2 + xyz$

4. Dado $A = (x_0, y_0)$ y $h = f \circ \vec{g}$, calcular $\nabla h(A)$ en los siguientes casos:

   a) $A = (0, 1)$, $f(u, v) = \sqrt{u/v}$ y $\vec{g}(x, y) = (1 + \ln(x + y), \cos(x\,y))$.

   b) $(*)$ $A = (1, 0)$, $\vec{g}(x, y) = (x, xe^{y^2}, x - y)$, sabiendo que $\nabla f(1, 1, 1) = (3, 1, 2)$ y $f \in C^1(\mathbb{R}^3)$.

5. $(*)$ Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ diferenciable tal que $\nabla f(1, 0, 0) = (-2, 3, 1)$.
   Si $h(t) = f(t, ln(t), t^2 - 1)$ hallar $h'(1)$.

6. Sabiendo que $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es diferenciable, hallar las derivadas parciales de g.

a) (∗) $g(x,y) = f(x-y, x^2) + f(y^2, y-x)$,

b) $g(r,\theta) = f(r\,cos(\theta), r\,sen(\theta))$

7. Sabiendo que $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ es diferenciable, hallar las derivadas parciales de g.

   a) (∗) $g(x,y,z) = f(x, xy, xyz)$ en $(1,1,1)$, si $\nabla f(1,1,1) = (a,b,c)$.

   b) $g(\rho,\theta,\varphi) = f(\rho\,cos(\theta)\,sen(\varphi), \rho\,sen(\theta)\,sen(\varphi), \rho\,cos(\varphi))$ con $\rho \geq 0$ y $\theta,\ \varphi \in \mathbb{R}$.

8. (∗) Dada $w = e^{x-y} - z^2\,y + x$ con $x = u - v$, $y = u + u^3\,\ln(v-1)$, $z = u\,v$, hallar la dirección de máxima derivada direccional de $w = w(u,v)$ en $(1,2)$ y el valor de dicha derivada máxima. Justificar la respuesta.

9. Analizar si $z = g(x\,y, x-y)$ satisface la ecuación $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 0$ en puntos de la recta $x + y = 0$. ¿Se han dado todas las hipótesis necesarias?

10. (∗)Dada $z = h(x-y, x\,y)$, $h \in C^2(\mathbb{R}^2)$, demostrar que en puntos de la recta $y + x = 0$ resulta $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$. ¿Es necesaria la hipótesis impuesta para h? ¿Por qué?

11. (∗)Dadas $\vec{f}(x,y) = (\ln(y)\,,\, x\,y^4 - 3x^2\,y)$ y $\vec{g} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ $C^1(\mathbb{R}^2)$ tal que

$$D\vec{g}(0,-2) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

    Calcular $D(\vec{g} \circ \vec{f})(1,1)$.

12. Suponiendo que f tiene derivadas parciales continuas de todos los órdenes, si $z = f(x,y)$ donde $x = 2\,s + 3\,t$ y $y = 3\,s - 2\,t$, calcular

    (a) $\frac{\partial^2 z}{\partial s^2}(s,t)$ (b) $\frac{\partial^2 z}{\partial s\,\partial t}(s,t)$ (c) $\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}(s,t)$

13. Mostrar que si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es una función armónica en $\mathbb{R}^2$ (i.e. $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} = 0$), entonces $h(x,y) = f(x^3 - 3\,x\,y^2, 3\,x^2\,y - y^3)$ también es armónica en $\mathbb{R}^2$.

    No olvide probar que $h \in C^2(\mathbb{R}^2)$.

14. (*) Hallar el plano tangente a la superficie de ecuación $z = f(x, y)$ en $(0, 1, z_0)$ cuando $f = h \circ \vec{g}$ con $h(u, v) = u - v^2$ y $\vec{g}(x, y) = (x - y, \text{sen}(x/y))$.

    ¿Por qué existe el plano tangente a la superficie en ese punto?

15. Sea $\vec{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ una función vectorial diferenciable e inyectiva y sea $C \subset \mathbb{R}^3$ una curva regular. $\vec{F}(C) = C^*$ es la imagen de C a través de la función vectorial. Probar que la matriz derivada de $\vec{F}$ transforma vectores tangentes a C en vectores tangentes a C^* y que C^* resulta también una curva regular.

16. Sea Σ la superficie de ecuación paramétrica $\vec{F}(u, v) = (u\cos(v), u\,\text{sen}(v), u)$ con $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ y C la curva de ecuación $v = u^2 - 1$ en el plano u, v.

    a) Hallar una parametrización regular para la curva C^*, imagen de C a través de $\vec{F}$.

    b) Sea A un punto cualquiera de C^*, probar que el plano tangente a Σ en A contiene a la recta tangente a C^* en dicho punto.

17. (*) Sea $\vec{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,
    $\vec{F}(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$ una función biyectiva y $C^2(\mathbb{R}^2)$ que satisface

    $$D\vec{F}(1, -2) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

    y $\vec{F}(1, -2) = (1, 2)$.

    a) Hallar un vector tangente en $(1, 2)$ de la curva imagen por $\vec{F}$ de la circunferencia de ecuación $u^2 + v^2 = 5$.

    b) Hallar un vector tangente en $(1, -2)$ de la preimagen por $\vec{F}$ de la recta de ecuación $y = 2\,x$.

18. Sea $\vec{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una función inyectiva y diferenciable en $\mathbb{R}^2$,
    $\vec{F}(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$, tal que $\vec{F}(1, 1) = (3, 2)$, y la matriz jacobiana de $\vec{F}$

en $(1,1)$ es

$$D\vec{F}(1,1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Hallar una ecuación para la recta tangente en $(3,2)$ a la imagen por $\vec{F}$ de la curva de ecuación $x^2 + y^2 = 2$.

Guía VI: Funciones Implícitas

Funciones implícitas

1. ($*$) Dados $1 - y^2 + x^2 - y = 0$ y $P = (1, 1)$, probar que la ecuación define implícitamente una función $y = f(x)$ en un entorno de $x = 1$ y hallar $f'(1)$.

2. Verificar las hipótesis del Teorema de la Función Implícita para aseguar que las siguientes ecuaciones definen a $z = f(x, y)$ en un entorno del punto A y calcular $\nabla f(A)$ en cada caso.

   a) $x^2 - y^2 + z^2 = 0$, $A = (4, 5)$, $z > 0$.

   b) ($*$) $z = 2 - \ln(z + 3\,x - y^2)$, $A = (1, 2)$.

   c) $z - x\,v + y^2 = 0$, $A = (1, 0)$, con $v = h(x, y)$ tal que $x\,v + ye^{y\,v} = 0$.

   d) Determinar si alguna de las ecuaciones de los ítems anteriores definen $x = g(y, z)$ o $y = g(x, z)$ en un entorno del punto A.

3. De ser posible, calcular las derivadas segundas del campo f del ejercicio anterior. ¿Las derivadas cruzadas resultaron iguales? ¿Por qué?

4. Un cierto gas satisface la ecuación $p\,V = T - \frac{4\,p}{T^2}$ donde p es la presión, V el volumen, y T la temperatura. Hallar el conjunto de puntos en donde la temperatura se pueda definir como una función del volumen y la presión. Calcular $\frac{\partial T}{\partial p}$ y $\frac{\partial T}{\partial V}$ en un punto donde $p = 1$, $V = 1$, $T = 2$.

5. ($*$) Demostrar que $(x^2 + \ln(x + z) - y, y\,z + e^{x\,z} - 1) = (0, 0)$ define una curva C regular en un entorno de $(1, 1, 0)$ y hallar el plano normal a C en dicho punto.

6. *a*) (∗) Mostrar que el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x - u^3 - v^3 &= 0 \\ y - u\,v + v^2 &= 0 \end{cases}$$

define a u y v como funciones de x e y en un entorno de $(x_0, y_0, u_0, v_0) = (2, 0, 1, 1)$ y calcular $\frac{\partial u}{\partial x}(2, 0)$, $\frac{\partial u}{\partial y}(2, 0)$, $\frac{\partial v}{\partial x}(2, 0)$, $\frac{\partial v}{\partial y}(2, 0)$, $\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}(2, 0)$.

   b) Mostrar que el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} y^2 + x\,u + v^2 &= 3 \\ x\,u + 2\,y\,v - x\,y &= 0 \end{cases}$$

define a x y y como funciones de u y v un el entorno de $(x_0, y_0, u_0, v_0) = (2, 1, 1, 0)$ y calcular $\frac{\partial x}{\partial u}(1, 0)$, $\frac{\partial y}{\partial v}(1, 0)$

7. (∗) Sea $xy + z + e^z = 1$ y $(0, 0, 0)$ una solución.

   a) Mostrar que la ecuación define a $z = g(x, y)$ en un entorno de $(0, 0)$.

   b) Hallar $\nabla g(0, 0)$, $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(0, 0)$ y $\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(0, 0)$.

8. Hallar una ecuación cartesiana para la recta tangente a C en los siguientes casos:

   a) $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x^2 + y^2 + 2\,x\,y = 4\}$, en $(1, 1)$.

   b) (∗) $C = \{\vec{X} \in \mathbb{R}^2 \,/\, \vec{X} = (t, v)$, con $v(t)$ tal que $t\,v + e^v = 1\}$, en $(1, 0)$.

   c) (∗) $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x\,y + \ln y = e^x\}$, en $(0, \mathrm{e})$.

   d) $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, (x\,y + z, y + x - 2) = (3, 5)\}$, en $(1, 6, -3)$.

¿Al resolver los ejercicios anteriores hizo cálculos dispersos y sin comentarios o fue justificando paso a paso el desarrollo?

9. Mostrar que la ecuación $e^{yz} + xz + 2z - x^2 + 3 = 0$ define a $z = f(x, y)$ en un entorno de $(1, 0)$. Hallar la ecuación del plano tangente al gráfico de f en el punto $(1, 0, z_0)$.

10. $(*)$ Sean $w(x,y) = f(x^2 + x\,y, y^2 - x)$, y $z = f(u,v)$ un campo escalar en $\mathbb{R}^2$ definido implícitamente en un entorno de $(3,3,-2)$ por la ecuación $z\,u - \ln(z+v) + 6 = 0$, hallar un valor aproximado de $w(1{,}03; 1,98)$ usando una aproximación lineal.

11. $(*)$ Demostrar que la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ y el cono $z^2 = a^2\,x^2 + b^2\,y^2$ son superficies ortogonales en todo punto de su intersección.

12. Sea C la curva definida como intersección de las superficies $e^{x\,z-1} - x\,y + \ln(y\,z) = 0$ con $y = x^2$, si L es la recta tangente a C en $A = (1,1,1)$. Calcular la distancia desde A hasta el punto en que L corta al plano de ecuación $x + y = 8$.

Guía VII: Integrales de línea

Integrales de línea

1. Para las siguientes curvas:

   a) $(*)$ Hallar una parametrización regular.

   b) $(*)$ Hallar una parametrización orientada en sentido opuesto al dado en el item anterior.

   c) Hallar otra parametrización que la recorra 4 veces más rápido.

   (i) $C : \begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ z = 2 \end{cases}$ (ii) $C : \begin{cases} \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{3} = 4 \\ 2\,x + z = 1 \end{cases}$

   Integral de línea

   Definiciones:

   Sea $\vec{\alpha} : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ una parametrización regular de la curva $\mathbf{C}$, y U un abierto conexo de R^3, tal que $\mathbf{C}$ está contenida en U.

   - Si $f : U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ es continua en U entonces $\int_C f dl = \int_a^b f(\vec{\alpha}(t))||\vec{\alpha}'(t)||dt$
   - Si $\vec{F} : U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ es continua en U entonces $\int_{C^+} \vec{F} d\vec{l} = \int_a^b \vec{F}(\vec{\alpha}(t)).\vec{\alpha}'(t)dt$
   - Longitud de una curva $\int_C dl = \int_a^b ||\vec{\alpha}'(t)||dt$
   - Sea un alambre, representado por la curva $\mathbf{C}$, con densidad lineal $\delta(\overline{X})$; $\overline{X} \in C$

     Masa: M= $\int_C \delta(\overline{X})\ dl = \int_a^b \delta(\vec{\alpha}(t))||\vec{\alpha}'(t)||dt$

- Momentos Estáticos con respecto a los planos coordenados:
  $M_{x=0} = M_{yz} = \int_C x\,\delta(\overline{X})\ dl = \int_a^b x(t)\,\delta(\vec{\alpha}(t))\,||\vec{\alpha}'(t)||dt$
  $M_{y=0} = M_{xz} = \int_C y\,\delta(\overline{X})\ dl = \int_a^b y(t)\,\delta(\vec{\alpha}(t))\,||\vec{\alpha}'(t)||dt$
  $M_{z=0} = M_{xy} = \int_C z\,\delta(\overline{X})\ dl = \int_a^b z(t)\,\delta(\vec{\alpha}(t))\,||\vec{\alpha}'(t)||dt$
- Centro de masa: $\overline{X}_G = \left(\frac{M_{yz}}{M}, \frac{M_{xz}}{M}, \frac{M_{xy}}{M}\right)$
- Momento de Inercia con respecto a una recta L:
  $I_L = \int_C d^2\ \delta(\overline{X})\ dl = \int_a^b d^2(\vec{\alpha}(t))\delta(\vec{\alpha}(t))||\vec{\alpha}'(t)||dt$
  siendo d la distancia desde un punto del alambre a la recta L
- Valor Medio de un campo escalar sobre una curva C, $f_m = \dfrac{\int_C f\,dl}{\int_C dl}$

2. Calcular la longitud de las siguientes curvas:

   a) (∗) Parametrizada por $\vec{\sigma}(t) = (\cos(t), \operatorname{sen}(t), 4)$ con $t \in [0, 2\,\pi]$. Dibujarla. Reparametrizarla en sentido contrario y verificar que la longitud no depende de la parametrización.

   b) (∗) Hélice de ecuación paramétrica $\vec{\sigma}(t) = (3\,\cos(t), 3\,\operatorname{sen}(t), 4\,t)$ con $t \in [0, 2\,\pi]$. Hallar su recta tangente y su plano normal en $(3\,\sqrt{2}/2, 3\,\sqrt{2}/2, \pi)$.

   c) Parametrizada por $\vec{\sigma}(t) = (\frac{1}{3}t^3, \frac{1}{2}t^2),\ t \in [0, 6]$. Graficar.

3. Calcular $\int_C f dl$ en los siguientes casos:

   a) $f(x, y) = 1/(x^2 + y^2)$, $C : x^2 + y^2 = 4, y > 0$.

   b) (∗) $f(x, y, z) = 2\,x - y\,z$, C recta intersección de los planos $2\,y - x + z = 2$ con $x - y + z = 4$ desde $(7, 4, 1)$ hasta $(4, 2, 2)$.

4. Resolver:

   a) (∗) Hallar la masa de un alambre en forma de V, cuya forma es la de la curva $y = |x|$, comprendida entre $x_1 = -1$ y $x_2 = 1$, si su densidad lineal de masa en cada punto es igual al valor absoluto del producto de las coordenadas del punto.

b) (∗) Hallar la masa de un alambre que es intersección de $z = x^2 + y^2$ y $z = 2\,x$, en el primer octante, entre $(2, 0, 4)$ y $(1, 1, 2)$ si su densidad lineal de masa es $\delta(x, y, z) = (x - 1)\,y$.

c) (∗) Calcular la masa de un hilo metálico con densidad lineal de masa en cada punto igual al producto de las distancias desde el punto a los planos coordenados, si la forma del alambre coincide con la de la curva intersección del cilindro $x^2 + y^2 = 4$ con el plano $z = 2$.

d) Hallar la masa, el centro de masa y la densidad media de un alambre en forma de hélice, $\vec{\lambda}(t) = (\cos(t), \operatorname{sen}(t), t)$, $t \in [0, 2\,\pi]$, cuya función de densidad lineal de masa es $\delta(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$.

e) (∗) Hallar el momento de inercia de un alambre homogéneo de masa m cuya forma es la de la curva parametrizada por $\vec{\sigma} : [-1, 1] \to \mathbb{R}^2$, $\vec{\sigma}(t) = (t, \cosh(t))$, respecto de cada uno de los ejes coordenados.

f) Suponga que la curva parametrizada por $\vec{\lambda} : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ de clase $C^1([a, b])$ es la curva de nivel 3 de la función continua $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. ¿Cuál es el valor medio de f sobre la curva?

5. Calcular las circulaciones

a) (∗) $\oint_{C^+} (2\,x, -y) \cdot d\vec{l}$, donde C es el cuadrado $|x| + |y| = 1$.

b) $\oint_{C^+} (x\,y, x^2) \cdot d\vec{l}$, siendo C la frontera de la región del primer cuadrante limitada por $x\,y \leq 1$, $y \leq x^2$, $8\,y \geq x^2$.

6. Dado el campo $\vec{F}(x, y) = (y, -x)$, calcular la circulación desde el $(1, 0)$ hasta el $(0, -1)$ a lo largo de:

a) un segmento que une los puntos,

b) las 3/4 partes del círculo unitario.

c) Resolver a) y b) para el campo $\vec{F}(x, y) = (y - 1, x + 2 + e^{2y})$

7. Sea C parametrizada por $\vec{\sigma}(t) = (t, t^2, 2\,t)$, $0 \leq t \leq 2$. Expresar C como intersección de dos superficies y graficarla. Calcular la circulación de $\vec{F}(x, y, z) = (xy, x, zy)$ a lo largo de C. ¿Cuáles son los puntos inicial y final del recorrido?

8. $(*)$ Analizar si los siguientes campos admiten función potencial, en caso afirmativo hallarla:

   a) $\vec{F}(x, y) = (2\,x + y^2 \operatorname{sen}(2\,x), 2\,y \operatorname{sen}^2 x)$.

   b) $\vec{F}(x, y, z) = (x\,y, x + z\,y, y\,z)$.

   c) $\vec{F}(x, y, z) = (y - 2\,x\,z + 1, x + 2\,y, -x^2)$.

   d) $\vec{F}(x, y, z) = ((1 + x\,z)\,e^{x\,z}, x\,e^{x\,z}, y\,x^2\,e^{x\,z})$.

9. Sea $\vec{F}(x, y) = (x, x - y^2)$

   a) Mostrar que $\vec{F}$ no admite función potencial.

   b) Hallar la circulación de $\vec{F}$ a lo largo de la curva positivamente orientada C, perímetro de la región descripta por $0 \leq y \leq 1$, $0 \leq x \leq y^2$.

10. $(*)$ Sea $\vec{F}(x, y, z) = (4\,x/z, 2\,y/z, -(2\,x^2 + y^2)/z^2)$, $z \neq 0$

    a) Mostrar que $\vec{F}$ admite función potencial para $z > 0$.

    b) Describir las superficies equipotenciales de $\vec{F}$.

    c) Calcular la circulación de $\vec{F}$ a lo largo de la curva descripta por $x = 1 + \log(1 + |\operatorname{sen}(t)|)$, $y = e^{t\,(\pi - t)}$, $z = 1 + t/\pi$, $t \in [0, \pi]$.

11. Resolver:

    a) ¿Para qué valores de a y b , y en qué dominio posible que contenga a $(1, 1, 1)$, resulta conservativo el campo $\vec{F}(x, y, z) = (a\,x \ln(z))\,\breve{i} + (b\,y^2\,z)\,\breve{j} + (\frac{x^2}{z} + y^3)\,\breve{k}$? Para esa elección de a y b calcular la circulación de $\vec{F}$ a lo largo del segmento que une el punto $(1, 1, 1)$ al $(2, 1, 2)$.

b) (∗) Verificar que $\int_C (3\,x - 2\,y^2)\;dx + (y^3 - 4\,x\,y)\;dy$ no depende de C, sólo de los puntos inicial y final del arco de curva. Calcular la integral cuando se circula desde $(1, 3)$ hasta $(2, 4)$.

c) (∗) Evaluar $\int_C (e^x\;\mathrm{sen}(y) + 3\,y)\;dx + (e^x\;\cos(y) + 2\,x - 2\,y)\;dy$, sobre la elipse $4\,x^2 + y^2 = 4$. Indicar el sentido elegido.

12. (∗) ¿Cuál es el trabajo que realiza $\vec{F}(x, y, z) = (y^2\;\cos(x) + z^3)\,\breve{i} + (2\,y\;\mathrm{sen}(x) - 4)\,\breve{j} + (3\,x\,z^2 + 2)\,\breve{k}$ para mover una partícula a lo largo de la curva parametrizada por $x = \arcsin(t)$, $y = 1 - 2\,t$, $z = 3\,t - 1$, $0 \le t \le 1$?.

13. Calcular el trabajo que se necesita para llevar un punto de $(0, -1)$ a $(0, 1)$, por la circunferencia unitaria, si en cada punto del plano actúa una fuerza constante de magnitud 2gr, en la dirección positiva del eje y.

14. Calcular la circulación del campo $\vec{F}(x, y, z) = (2\,g(x, y, z), x\,y - 9\,x\,g(x, y, z), 3\,y\,g(x, y, z))$ desde $(1, y_0, z_0)$ hasta $(8, y_1, z_1)$ a lo largo de la curva C cuyos puntos pertenecen a la superficie de ecuación $z = x - y^2$, y su proyección sobre el plano x, y cumple con la ecuación $x = y^3$. Suponga g continua en $\mathbb{R}^3$.

15. (∗) Mostrar que:

a) Si f y g son campos escalares C^1 en un D conexo, entonces

$$\int_C (f\,\nabla g + g\,\nabla f) \cdot d\vec{l} = f(B)\,g(B) - f(A)\,g(A)$$

siendo C una curva contenida en D que va de A a B.

b) Si f y g son campos escalares C^1 en un D conexo, entonces

$$\int_C (2\,f\,g\,\nabla f + f^2\,\nabla g) \cdot d\vec{l} = f^2(B)\,g(B) - f^2(A)\,g(A)$$

siendo C una curva contenida en D que va de A a B.

c) Si f y g son campos escalares C^1 en un D conexo, $g \neq 0$ en D, entonces

$$\int_C \frac{g\,\nabla f - f\,\nabla g}{g^2} \cdot d\vec{l} = f(B)/g(B) - f(A)/g(A)$$

siendo C una curva contenida en D, que va de A a B.

16. $(*)$ Sea $\varphi \in C^2(\mathbb{R}^3)$, demostrar que $\vec{F} = \varphi \nabla \varphi$ es un campo de gradientes y calcular $\int_{\lambda_{AB}} \vec{F} \cdot d\vec{l}$ sabiendo que $\varphi(B) = 7$ y que $\int_{\lambda_{AB}} \nabla\varphi \cdot d\vec{l} = 4$. ($A$ y B son los puntos inicial y final del arco de curva suave λ_{AB}).

17. Sea $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, una función C^2 en $\mathbb{R}^3$ tal que $\Phi(x_1, x_2, x_3) > 0$, $\forall (x_1, x_2, x_3)$. Mostrar que $\vec{F} = \frac{\nabla \Phi}{\Phi}$ es un campo de gradientes y calcular $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{l}$ siendo C un arco de curva que recorre desde A hasta B sabiendo que $\int_C \nabla\Phi \cdot d\vec{l} = 0$.

18. $(*)$ Sea C una curva simple cerrada, que no pasa por el origen y que encierra una región R. Sea $\vec{F}(x, y) = (\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2})$.

   a) Probar que si $(0, 0) \notin R$, entonces $\oint_{C^+} \vec{F} \cdot d\vec{l} = 0$.

   b) Probar que si C es una circunferencia centrada en el origen de cualquier radio, orientada en sentido horario, entonces $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{l} = -2\pi$.

   c) A partir de los resultados de los incisos anteriores deducir que

$$\oint_{C^+} \vec{F} \cdot d\vec{l} = \begin{cases} 0 & (0,0) \notin R \\ 2\pi & (0,0) \in R \end{cases}$$

   d) Probar que el campo $\vec{F}$ tiene matriz jacobiana continua y simétrica en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. ¿Es $\vec{F}$ un campo gradiente?

19. $(*)$ Sea $\vec{F}(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y))$ un campo de gradientes con matriz jacobiana

$$D\vec{F}(x, y) = \begin{pmatrix} -6\,x & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Sabiendo que la gráfica de su función potencial pasa por $(1, 2, 1)$ y que su plano tangente en ese punto tiene ecuación $x - y + z = 0$, comprobar que la circulación de $\vec{F}$ a lo largo de cualquier curva que una un punto A en el eje y con un punto B en la parábola $y = x^2$ es 0.

Aplicaciones.

Ecuaciones diferenciales totales exactas.

1. Resolver

   a) Solución que pasa por $(1,0)$ de $3\,x^2\,y\,dx + (x^3 + \operatorname{sen}(y))\,dy = 0$.

   b) $(*)$ Solución general de $(2\,x\,y^{-3} + 1)\,dx - (3\,x^2\,y^{-4} - 2\,y)\,dy = 0$.

   c) Solución que pasa por el punto $(3,2)$ de $2\,x\,y\,y' = x^2 - y^2$. ¿Puede resolverse como homogénea?.

   d) Solución general de $(x - y + 3)\,y' = (4 - x - y)$.

   e) $(*)$ Solución tal que $y(2) = 2$ de $(y/x - 1)\,dx + dy = 0$. Observar que, además de existir un factor integrante, también puede tratársela como lineal o como homogénea.

   f) Solución tal que $y(2) = 1$ de $2\,x\,dx + x^2\,y^{-1}\,dy = 0$.

   g) $(*)$ Solución general de $(x\,y + y\,\cos(x))\,dx + (x^2 + 2\operatorname{sen}(x))\,dy = 0$.

Líneas de campo

2. Calcular las líneas de campo de:

   a) $\vec{F}(x,y,z) = \dfrac{1}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}(x - x_0, y - y_0, z - z_0)$

   b) $\vec{F}(x,y) = (-y, x)$

   c) $\vec{F}(x,y,z) = (x\,z, 2\,x^2\,z, x^2)$

3. Comprobar que la curva parametrizada por $\vec{\gamma}(t)$ es una línea de campo del campo $\vec{F}$ en los siguientes casos:

   a) $\vec{\gamma}(t) = (t^2, 2\,t - 1, \sqrt{t})$, $t > 0$, $\vec{F}(x,y,z) = (y + 1, 2, \frac{1}{2\,z})$

   b) $(*)$ $\vec{\gamma}(t) = (\frac{1}{t^3}, e^t, 1/t)$, $\vec{F}(x,y,z) = (-3\,z^4, y, -z^2)$

   c) $(*)$ $\vec{\gamma}(t) = (\operatorname{sen}(t), \cos(t), e^t)$, $\vec{F}(x,y,z) = (y, -x, z)$

4. (*) Si $\vec{F}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ es un campo de gradientes, y U su función potencial, entonces las líneas de campo y las líneas equipotenciales son familias de curvas ortogonales. Comprobar este resultado para $\vec{F}(x,y)=(x,y)$ y $\vec{F}(x,y)=(-4\,x,1)$

5. (*) Si $\vec{F}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ es un campo conservativo y U su función potencial, entonces las líneas de campo son perpendiculares a las superficies equipotenciales.

   Construya un ejemplo para ilustrar este resultado.

Ley de Conservación de la Energía

6. Resolver

   a) Un cuerpo de masa $m=1$gr se mueve bajo la acción de una única fuerza $\overline{F}$ siguiendo el camino parametrizado por $\vec{\lambda}:[a,b]\to\mathbb{R}^3$ (en los tres ejes de $\mathbb{R}^3$ la unidad es la misma). Si el parámetro $t\in[a,b]$ representa el tiempo, y $\vec{\lambda}'(a)=(1,2,1)$, $\vec{\lambda}'(b)=(1,3,2)$, calcular el trabajo que realiza dicha fuerza para llevar el cuerpo desde $p=\vec{\lambda}(a)$ hasta $q=\vec{\lambda}(b)$.

   Sugerencia: para integrar hacer uso de $m\,\vec{\lambda}''(t)=\vec{F}(\vec{\lambda}(t))\ldots$

   b) Rehacer el inciso anterior, probando antes en general que el trabajo realizado por la resultante $\vec{F}$ es la variación en la energía cinética $(m\,\frac{\|\vec{\lambda}'\|^2}{2})$ producida por $\vec{F}$.

7. Resolver:

   a) Verificar la ley de conservación de la energía con un cuerpo de masa $m=1$gr moviéndose en el campo de fuerzas $\vec{F}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, $\vec{F}(x,y)=(y,x)$, por la curva $\vec{\lambda}:[0,\pi]\to\mathbb{R}^2$, $\vec{\lambda}(t)=(e^t-\operatorname{sen}(t),e^t+\operatorname{sen}(t))$, donde $t\in[0,\pi]$ representa el tiempo. Es decir, siendo $\vec{F}$ conservativo, probar que la energía cinética más la energía potencial en $p=\vec{\lambda}(0)$ es igual a la suma de la energía cinética más la energía potencial en $q=\vec{\lambda}(\pi)$.

   Sugerencia: Comprobar en primer lugar que la trayectoria dada satisface la ecuación del movimiento correspondiente al campo de fuerzas,

$m\,\vec{\lambda}''(t) = \vec{F}(\vec{\lambda}(t))$. Encontrar una función potencial $U(x,y)$ de manera que $\vec{F}$ sea el campo de fuerzas asociado, es decir tal que $\vec{F}(x,y) = -\nabla U(x,y)$. La energía (cinética más potencial) a lo largo de la trayectoria es entonces:

$$E(t) = m\,\frac{\|\vec{\lambda}'(t)\|^2}{2} + U(\vec{\lambda}(t))$$

Comprobar que $E(0) = E(\pi)$.

$b)$ En las mismas condiciones del inciso anterior, probar que $E(t)$ es constante.

Guía VIII: Integrales Múltiples

Integrales dobles

Definiciones:

- Área de una región plana $D \subset \mathbb{R}^2$
  A(D)=$\iint\limits_D \, dxdy$
- Masa de una placa plana con densidad superficial $\delta(x,y)$ con $(x,y) \in D$
  M= $\iint\limits_D \delta(x,y)\, dxdy$
- Momentos Estáticos con respecto a los ejes coordenados:
  $M_{x=0} = M_y = \iint\limits_D x\,\delta(x,y)\, dxdy$
  $M_{y=0} = M_x = \iint\limits_D y\,\delta(x,y)\, dxdy$
- Centro de masa:
  $\overline{X}_G = \ (\frac{M_y}{M}, \frac{M_x}{M})$
- Momento de Inercia con respecto a una recta L:
  $I_L = \iint\limits_D d^2(x,y)\ \delta(x,y)\ dxdy$ siendo $d(x,y)$ la distancia de cada punto de la placa D a la recta L

1. Calcular el área de las siguientes regiones planas y graficarlas:

   a) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y \geq x^2 \, , \, y \leq x\}$

   b) $(*)$ $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x + y \leq 2 \, , \, y \leq x \, , \, y \geq 0\}$

c) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y = x^3 \, , \, y = x\}$

d) $(*)$ D limitada por el conjunto de nivel 4 de $f(x, y) = |x| + |y|$

e) D limitada por las curvas de nivel 2 y 4 de $f(x, y) = x + 2\,y$ en el 1° cuadrante.

f) $(*)$ D es el conjunto de positividad de $f(x, y) = (y - 2|x|)\sqrt{20 - x^2 - y^2}$

2. Interpretar gráficamente la región de integración y calcular las siguientes integrales (en algunos casos puede ser conveniente invertir el orden de integración).

   (a) $\int_{-1}^{1} \int_{|y|}^{1} 2x \; dxdy$ (b) $(*)$ $\int_{-2}^{2} \int\limits_{\sqrt{4-x^2}}^{\frac{17}{4}-x^2} x \; dydx$

   (c) $(*)$ $\int_{0}^{1} \int_{y}^{1} e^{x^2} \; dxdy$ (d) $\iint\limits_{D} y \; dxdy$ siendo D el disco de radio 1 y centro $\bar{0}$.

3. Resolver:

   a) $\int_{-4}^{0} dy \int\limits_{-\sqrt{y+4}}^{\sqrt{y+4}} dx + \int_{0}^{5} dy \int\limits_{y-2}^{\sqrt{y+4}} dx$

   b) $\iint\limits_{D} f(x, y) \; dxdy$ *donde* $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 - 1 \leq y \leq 1 - x^2\}$

   $$f(x, y) = \begin{cases} xy & \text{cuando } x \geq 0 \\ -2x & \text{cuando } x < 0 \end{cases}$$

4. Calcular la masa y el centro de masa de una placa plana definida por $|x| \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, si su densidad de masa superficial en cada punto es proporcional a la distancia desde el punto al eje y.

5. $(*)$ Calcular el centro de masa de la placa plana definida por $|x| \leq y \leq 2$ cuando la densidad de masa superficial en cada punto es proporcional a la distancia desde el punto a la recta $x = 1$.

6. Resolver los siguientes ejercicios utilizando los cambios de coordenadas propuestos.

   a) (∗) Calcular el área de D siendo, $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / |x| + |y| \leq 2\}$, usando $(x, y) = (\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2})$.

   b) Calcular $\iint\limits_D e^{x+y}\, dx\, dy$, D descripta por $1 \leq x + y \leq 4$ en el 1° cuadrante, usando

   $x + y = u$, $x = v$.

   c) (∗) Calcular el área de la región encerrada por la elipse: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$ con $a > 0, b > 0$, usando una transformación conveniente.

   d) Calcular $\iint\limits_D \frac{dx\, dy}{x}$, D descripta por $x^2 \leq y \leq 4x^2$, $x \geq 1, y \leq 9$ usando la transformación $(x, y) = \big(v/u, v^2/u\big)$.

7. Calcular las siguientes integrales aplicando una transformación lineal conveniente.

   a) $\iint\limits_D e^{(y-x)/(x+y)}\, dx\, dy$, D descripta por $x + y \leq 2$, $x \geq 0$, $y \geq 0$.

   b) (∗) $\iint\limits_D (x - y)^2 \operatorname{sen}^2(x + y)\ dx\, dy$, D descripta por $-\pi \leq y - x \leq \pi$, $\pi \leq x + y \leq 3\pi$.

   c) $\iint\limits_D (x + y)^3\, dx\, dy$, D descripta por $1 \leq x + y \leq 4$, $-2 \leq x - 2\,y \leq 1$.

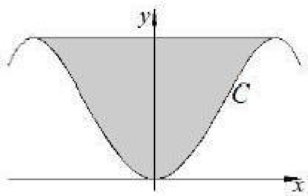
8. Resolver utilizando coordenadas polares.

   a) $\iint\limits_D e^{x^2+y^2}\, dx\, dy$, D círculo de radio R con centro en $(0, 0)$.

   b) (∗) $\iint\limits_D \frac{x+y}{x^2}\, dx\, dy$, D descripta por $0 \leq y \leq x$, $x + y \leq 2$. ¿Qué ocurre en $(0, 0)$?

   c) (∗) Área(D), D descripta por $x^2 + y^2 \leq 4\,a^2$, $x^2 + y^2 \geq 2\,a\,x$, con $a > 0$.

9. Calcule mediante una integral doble el área sombreada de la siguiente figura, sabiendo que la curva C tiene ecuación cartesiana $y = x^2 - x^4$.



Integrales triples.

Definiciones:

- Volumen de un sólido $K \subset \mathbb{R}^3$
  V(K)=$\iiint\limits_K dxdydz$
- Masa de un sólido con densidad volumétrica $\delta(x, y, z)$ con $(x, y, z) \in K$
  M= $\iiint\limits_K \delta(x, y, z)\, dxdydz$
- Momentos Estáticos con respecto a los planos coordenados:
  $M_{x=0} = M_{yz} = \iiint\limits_K x\ \delta(x, y, z)\, dxdydz$
  $M_{y=0} = M_{xz} = \iiint\limits_K y\ \delta(x, y, z)\, dxdydz$
  $M_{z=0} = M_{xy} = \iiint\limits_K z\ \delta(x, y, z)\, dxdydz$
- Centro de masa:
  $\overline{X}_G = (\frac{M_{yz}}{M}, \frac{M_{xz}}{M}, \frac{M_{xy}}{M})$
- Momento de Inercia con respecto a una recta L:
  $I_L = \iiint\limits_K d^2(x, y, z)\ \delta(x, y, z)\, dxdydz$ siendo $d(x, y, z)$ la distancia de un punto (x, y, z) al sólido K.

10. Calcular el volumen del cuerpo K mediante una integral triple usando el sistema de coordenadas que crea conveniente.

a) (*) $K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x + y \leq z \leq 1 \wedge x \geq 0 \wedge y \geq 0\}$.

b) (*)$K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 \leq 1 \wedge y^2 + z^2 \leq 1\}$.

c) (*)$K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / z \leq \sqrt{x^2+y^2} \wedge x^2 + y^2 + z^2 \leq 2\}$.

d) K limitado por $z = 2x^2 + y^2$ y $z + y^2 = 8$.

e) K definido por: $y \geq x^2, y \leq x, z \geq x + y, x + y + z \leq 6$.

f) (*) K definido por: $x^2 + y^2 - 6 \leq z \leq \sqrt{x^2+y^2}$.

g) (*)K interior a la esfera de ecuación $x^2+y^2+z^2 = 4\,a^2$, con $x^2+y^2 \geq 2\,a\,x$, en el primer octante. ($a > 0$).

11. Graficar y calcular el volumen de las siguientes regiones dadas en coordenadas cilíndricas:
    (a) $r \leq 1,\ 1 \leq z \leq 2$ (b) (*) $r < 2,\ 0 < \theta < \pi/4,\ |z| \leq 2$
    (c) $r^2 \leq z \leq 4$ (d) $z^2 \geq 2\,r^2,\ |z| \leq 1$
    (e) (*) $z^2 \geq 1 + r^2,\ |z| \leq 4$

12. Graficar y calcular el volumen de las siguientes regiones dadas en coordenadas esféricas:
    (a) $\rho \leq 2$ (b)(*) $\varphi \leq \pi/4,\ \rho \leq 3$
    (c) $\theta < \pi/2,\ \varphi < \pi/2, \rho \leq 2$ (d) $\rho \leq 1,\ \theta \geq 2\pi/3$
    (e) (*) $\rho \leq 8\ \mathrm{sen}(\varphi)\cos(\theta),\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$

13. Demostrar que $V = \frac{9}{2}\,a^3$ es el volumen del tetraedro limitado por los planos coordenados y el plano tangente a la superficie de ecuación $x\,y\,z = a^3$ en el punto (x_0, y_0, z_0) de la misma. ($a \neq 0$)

14. (*) Calcular la masa del cuerpo limitado por $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ con $y \geq x^2 + z^2$ cuando la densidad de masa volumétrica en cada punto es proporcional a la distancia desde el punto al eje y.

15. (*) Calcular el momento estático del cuerpo H respecto del plano xz si la densidad de masa volumétrica en cada punto es proporcional a la distancia

desde el punto al plano xy. H está en el primer octante definido por: $x+y+z \leq 2, z \geq x+y, y \leq x$.

16. ($*$) Calcular las coordenadas del centro de gravedad de un cuerpo con densidad de masa volumétrica constante limitado por $x^2 + z^2 = 1$, $y - x = 1$, primer octante.

17. ($*$) Calcular el momento de inercia respecto del eje x de un cuerpo con densidad constante limitado por $x = y^2 + z^2$, $5\,x = y^2 + z^2 + 4$.

18. ($*$) Dada $f(x, y, z) = \dfrac{x + y + z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$ plantear (indicando los correspondientes límites de integración), la integral triple de f extendida al cuerpo en el primer octante con $x + y + z \leq 4$, en coordenadas cartesianas, cilíndricas y esféricas. Resolver la integral en el sistema que crea más conveniente.

Guía IX: Integrales de Superficie

Definiciones:

- Área de una superficie $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$
  $A(\Sigma) = \iint\limits_{\Sigma} dS$
- Masa de una superficie con densidad superficial $\delta(x, y, z)$ con $(x, y, z) \in \Sigma$
  M$= \iint\limits_{\Sigma} \delta(x, y, z)\, dS$
- Momentos Estáticos con respecto a los planos coordenados:
  $M_{x=0} = M_{yz} = \iint\limits_{\Sigma} x\, \delta(x, y, z)\, dS$
  $M_{y=0} = M_{xz} = \iint\limits_{\Sigma} y\, \delta(x, y, z)\, dS$
  $M_{z=0} = M_{xy} = \iint\limits_{\Sigma} z\, \delta(x, y, z)\, dS$
- Centro de masa:
  $\overline{X}_G = \left(\frac{M_{yz}}{M}, \frac{M_{xz}}{M}, \frac{M_{xy}}{M}\right)$
- Momento de Inercia con respecto a una recta L:
  $I_L = \iint\limits_{\Sigma} d^2(x, y, z)\, \delta(x, y, z)\, dS$ siendo $d(x, y, z)$ la distancia desde cada punto de la superficie Σ a la recta L

1. Calcular el área de las siguientes superficies:

   a) (∗) Σ: trozo de cilindro $x^2 + y^2 = 4$ con $0 \leq z \leq 2$.

b) Σ: frontera del cuerpo definido por $x + y + z \leq 4,\ y \geq 2x$ en el primer octante.

c) $(*)$ Σ: trozo de cilindro $x^2 + y^2 = 2\,a\,y$ con $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4a^2$. $(a > 0)$

d) $(*)$ Σ: trozo de cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ con $z \leq 4,\ y \leq \sqrt{3}\,x$.

2. Calcular la masa de la porción de superficie cónica dada por $4z^2 = x^2 + y^2$, con $0 \leq z \leq 1$; $x \leq y$, sabiendo que la densidad superficial de masa en cada punto es proporcional a su distancia al plano xy.

3. $(*)$ Calcular el momento de inercia respecto del eje y de una chapa con forma de tronco de cono $y = \sqrt{x^2 + z^2}$ con $1 \leq y \leq 4$, si la densidad de masa superficial es constante.

4. Calcular la integral de $f(x, y, z) = x\,y - z$ sobre la superficie cilíndrica $y = z^2$ con $|x| \leq y \leq 2$.

5. Calcular el flujo de $\vec{f}$ a través de Σ, indicando claramente en un gráfico la orientación elegida o dada, para $\vec{n}$ en cada caso.

   a) $(*)$ $\vec{f}(x, y, z) = (x\,y, x, 2\,z)$ a través de la superficie frontera del cuerpo H con $\vec{n}$ saliente, si $H = [0, 2] \times [0, 2] \times [0, 2] \subset \mathbb{R}^3$.

   b) $(*)$ $\vec{f}(x, y, z) = (y, x^2 - y, x\,y)$ a través del trozo de superficie cilíndrica de ecuación $y = x^2$ en el primer octante, con $x + y + z \leq 2$.

   c) $\vec{f}(x, y, z) = (x - y, x, 2 - y)$ a través de la superficie frontera del cuerpo definido por $x + y \leq 4$, $y \geq x$, $z \leq x$, $z \geq 0$, con $\vec{n}$ saliente.

   d) $\vec{f}(x, y, z) = (y^3\,z, x\,z - y\,z, x^2\,z)$ a través de $2\,y = x^2$ con $x^2 + y^2 + z^2 \leq 3$ en el primer octante.

6. $(*)$ Dado $\vec{f}(x, y, z) = (x - y, a\,z, b\,y)$, determinar la relación entre a y b para que sea nulo el flujo de $\vec{f}$ a través de $y + z = 3$ en el primer octante, con $x \leq 2$.

7. (∗) Una porción Σ de la superficie de una esfera de radio 3 centrada en el origen tiene área 2. ¿Cuánto vale el flujo del campo $\vec{F}(x, y, z) = (x, y, z)$ a través de Σ hacia adentro de la esfera?

8. Calcular el flujo de $\vec{F}(x, y, z) = (4y, y, \varphi(x, y, z))$ continuo en $\mathbb{R}^3$, a través del trozo de cilindro $x^2 + y^2 = 1$ con $0 \le z \le 2$. Indicar en un gráfico el $\vec{n}$ elegido.

9. La familia de superficies equipotenciales del campo conservativo $\vec{f}$ está dada por $x^2 - yz + z^2 - x^3y = c$. Calcular el flujo del campo a través del disco $x^2 + y^2 \le 9$ en $z = 4$. Indicar en un gráfico el $\vec{n}$ considerado.

10. (∗) Sea $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ la superficie descripta por $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + z^2 - 2\,z \le 0$, $x \le 0$, $y \le 0$. Hallar el flujo a través de Σ del campo $\vec{F}(x, y, z) = (x, y, z^2)$ con Σ orientada de manera que la coordenada y de su vector normal resulte positiva.

Guía X: Teoremas Integrales

Definiciones:

- Gradiente del campo escalar $f : U \in \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

  $\nabla f = (\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}, \dfrac{\partial f}{\partial z})$

- Divergencia del campo vectorial $\vec{F} : U \in \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

  $\vec{F}(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$

  $\nabla \cdot \vec{F} = div\vec{F} = \dfrac{\partial P}{\partial x} + \dfrac{\partial Q}{\partial y} + \dfrac{\partial R}{\partial z}.$

- Rotor del campo vectorial $\vec{F} : U \in \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

  $\vec{F}(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$

  $$\nabla \mathbf{x} \vec{F} = rot\vec{F} = \begin{vmatrix} \breve{i} & \breve{j} & \breve{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = (R'_y - Q'_z, P'_z - R'_x, Q'_x - P'_y)$$

- Laplaciano del campo escalar $f : U \in \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

  $\nabla^2 f = div(grad(f))$

- Un campo vectorial es:
  - **Solenoidal** si $div\vec{F} = 0$
  - **Irrotacional** si $rot\vec{F} = \vec{0}$

- Un campo escalar es **Armónico** si $\nabla^2 f = 0$

1. Trabajando en coordenadas cartesianas y considerando las hipótesis que fueran necesarias en cada caso, demostrar que:

   a) $(*)$ $\text{div}(\text{rot}\vec{f}) = 0$.

   b) $(*)$ $\text{rot}(\text{grad}f) = \vec{0}$.

   c) $\nabla(f\,g) = f\,\nabla g + g\,\nabla f$.

   d) $(*)$ $\text{div}(f\,\vec{g}) = f\,\text{div}\vec{g} + \nabla f \cdot \vec{g}$.
   Aplicar a $\vec{r}(x, y, z) = (x, y, z)$ y $f(\vec{r}) = ||\vec{r}||^{-n}$ con $n \in \mathbb{N}$

   e) $\text{rot}(\text{rot}\vec{f}) = \nabla\text{div}\vec{f} - \nabla^2\vec{f}$, donde $\nabla^2\vec{f}$ se define como el vector cuyas componentes son los laplacianos de las componentes de $\vec{f}$.

   f) Demostrar que $\vec{F}$ es irrotacional si y sólo si, su matriz jacobiana es simétrica.

Teorema de Green:

2. Verifique el Teorema de Green para $\vec{F}(x, y) = (x^2y, y^2)$, en la región plana $x + y \leq 1$, $x \geq 0$, $y \geq 0$

3. Calcular la circulación de $\vec{F}(x, y) = (x^2 + y^2, 3xy + ln(y^2 + 1))$ a lo largo de la frontera de la región definida por $4x^2 + (y - 1)^2 \leq 1$ recorrida en sentido positivo.

4. $(*)$ Calcular el área de la región $D \subset \mathbb{R}^2$ definida por $(x/a)^2 + (y/b)^2 \leq 1$ con $a, b \in \mathbb{R}^+$ usando una integral de línea.

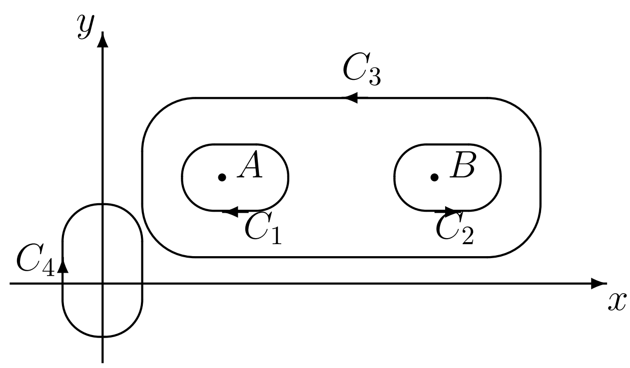
5. $(*)$ Sea $\vec{f} : \mathbb{R}^2 - \{0\} \to \mathbb{R}^2$ tal que $\vec{f}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$. Si $\vec{f} \in C^1$ y tal que $\left(\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y}\right)(x, y) = 4$ en su dominio. Calcular $\oint_{C^+} \vec{f} \cdot d\bar{l}$, siendo C una circunferencia con centro en el origen y radio r y sabiendo que para $r = 1$ el valor de dicha integral es $3\,\pi$.

6. Sea $\vec{f}:\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}\longrightarrow\mathbb{R}^2$, el campo definido por

$$\vec{f}(x,y)=\Big(\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2},\frac{-2\,x\,y}{(x^2+y^2)^2}\Big)$$

   Mostrar que $\oint_{C+}\vec{f}\cdot d\bar{l}=0$ a lo largo de cualquier curva C cerrada que rodee al punto $(0,0)$.

7. $(*)$ Sea $\vec{f}:D\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ un campo vectorial con matriz jacobiana continua y simétrica en $D=\mathbb{R}^2-\{\vec{A},\vec{B}\}$. Circulando en los sentidos indicados en el esquema, resulta que $\oint_{C_1}\vec{f}\cdot d\bar{l}=2$ y $\oint_{C_2}\vec{f}\cdot d\bar{l}=4$.



   Calcular, también con los sentidos indicados, $\oint_{C_3}\vec{f}\cdot d\bar{l}$ y $\oint_{C_4}\vec{f}\cdot d\bar{l}$, justificando teóricamente el método de cálculo utilizado.

Teorema de Stokes

8. $(*)$ Calcular la circulación de $\vec{f}(x,y,z)=(z-x\,y,y-z,x^3+y)$ a lo largo del borde de la región del plano $z=0$ limitada por $y=x$, $y=2\,x$, $x\,y=1$, $x\,y=4$ con $x>0$ en sentido positivo:

   a) Mediante un integral de línea.

   b) Aplicando el teorema del rotor.

9. Dado el campo $\vec{f}$ con matriz jacobiana $D\vec{f}(x,y,z)=\begin{pmatrix} y^2 & 2\,x\,y & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & z^2 & 2\,y\,z\end{pmatrix}$, calcular la circulación de $\vec{f}$ a lo largo de la curva intersección del plano $x+y+z=4$

con los planos coordenados; indicar claramente en un esquema el sentido de la curva considerado.

10. $(*)$ Calcular la circulación de un campo $\vec{f}$ tal que rot$\vec{f} = (x-y, y-x, z)$ a lo largo de la curva parametrizada por $\vec{g}(t) = (3\ \cos(t), 3\ \text{sen}(t), 6 - 3\ \cos(t) - 3\ \text{sen}(t))$ con $t \in [0, 2\pi]$.

11. $(*)$ Sea $\vec{F}(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), 2)$ un campo vectorial C^2 en la región $R \subset \mathbb{R}^3$ descripta por $x^2+y^2+z^2 < 9$. Suponiendo que $\nabla \times \vec{F} = \bar{0}$ en R, calcular la circulación de $\vec{F}$ a lo largo de la curva parametrizada por $\vec{\sigma}(t) = (\text{sen}(t), 1, \cos(t))$, con t variando desde 0 hasta π.

Teorema de Gauss

12. $(*)$ Calcular el flujo del campo $\vec{F}(x, y, z) = (xy, yz, xz)$ a través de la superficie frontera del paralelepípedo $[0, 1]$x$[0, 2]$x$[0, 3]$.

    a) Mediante un integral de superficie.

    b) Aplicando el teorema de la divergencia.

13. Demostar que el flujo de $\vec{f}(x, y, z) = (x + y\, e^z, Q(x, z), 5\, z)$ a través del trozo de esfera de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 13$ con $z \geq 2$ no depende de la función Q. Indicar gráficamente la orientación elegida para el versor normal a la superficie, y otras hipótesis que sean necesarias.

14. $(*)$ Calcular el flujo de $\vec{f}$ a través de la semiesfera de ecuación $z = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$ sabiendo que existe un campo $\vec{g} \in C^2(\mathbb{R}^3)$ tal que $\vec{f} = \text{rot}\vec{g}$ y que $\vec{f}(x, y, 0) = (0, y, x - 1)$. Indicar gráficamente la orientación elegida para $\vec{n}$.

15. Si div$\vec{f}(x, y, z) = 2\, y$, calcular el flujo de $\vec{f}$ a través del casquete de esfera de ecuación $x = \sqrt{4 - y^2 - z^2}$ sabiendo que $\vec{f}(0, y, z) = \left(e^{y^2+z^2}, z, y^2\right)$. Indicar en un esquema la orientación del versor normal elegida.

16. (∗) Sea Σ la superficie frontera del cuerpo limitado por $x^2 + z^2 = 4$, $x = 0$, $y = 0$ con $z \geq y$, salvo la cara perteneciente al plano $y = 0$. Calcular el flujo de $\vec{f}$ a través de Σ, si $\operatorname{div}\vec{f}(x, y, z) = 2\,x$ y $\vec{f}(x, 0, z) = (0, 2\,x\,z, 0)$. Indicar gráficamente el $\vec{n}$ elegido en cada trozo de superficie.

Problemas varios

17. (∗) Sea $\vec{F}(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), 2)$ un campo vectorial C^2 en la región $R \subset \mathbb{R}^3$ descripta por $x^2 + y^2 + z^2 < 9$. Suponiendo que $\iiint\limits_D \nabla \cdot \vec{F}\,dx\,dy\,dz = 3$, siendo D la región descripta por $0 \leq z \leq 1$, $x^2 + y^2 \leq 1$, calcular el flujo de $\vec{F}$ a través de Σ, siendo Σ la superficie cilíndrica descripta, en coordenadas cilíndricas, por $r = 1$, $0 \leq z \leq 1$, orientada de manera que el vector normal se dirija hacia afuera del cilindro.

18. (∗) Sea $\vec{F}(x, y, z) = (P(x, y, z), 5, R(x, y, z))$ un campo vectorial C^2 en la región $D \subset \mathbb{R}^3$ descripta por $x^2 + y^2 + z^2 < 9$. Suponiendo que $\nabla \times \vec{F} = \vec{0}$ en D, calcular, usando el teorema de la divergencia, el flujo de $\vec{G}(x, y, z) = (x^3 + R(x, y, z), y^3 - P(x, y, z), z^3 - P(x, y, z))$ a través de la superficie esférica de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, con el vector normal orientado hacia el exterior de la esfera.

19. (∗) Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función $C^2(\mathbb{R}^2)$, y sea $\vec{F}(x, y, z) = (\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, z), 0, x + y + \dfrac{\partial f}{\partial z}(x, z))$. Calcular la circulación de $\vec{F}$ a lo largo de la curva cerrada definida por $x^2 + y^2 + z^2 = 25$, $y = 4$ orientada de manera que su vector tangente en $(3, 4, 0)$ tenga coordenada z negativa.

20. (∗) Sea $\vec{F}(x, y, z) = (x\,P(x, y, z), y\,P(x, y, z), z\,P(x, y, z) - 2)$ un campo vectorial C^2 en la región $D \subset \mathbb{R}^3$ descripta por $x^2 + y^2 + z^2 < 100$. Suponiendo que $\iiint\limits_M \nabla \cdot \vec{F}\,dx\,dy\,dz = 3$, siendo $M \subset \mathbb{R}^3$ la región descripta por $x^2 + y^2 + z^2 \leq 25$, $4\sqrt{x^2 + y^2} \leq 3\,z$, hallar el flujo de $\vec{F}$ a través del casquete esférico definido por $x^2 + y^2 + z^2 = 25$, $z \geq 4$, con el vector normal orientado hacia el exterior

de la esfera.

21. Responder a cada uno de los siguientes problemas, justificando claramente la respuesta.

    a) Sea $\vec{F}(x,y,z) = (0,0,z\,R(x,y))$ un campo vectorial C^2 en la región $D \subset \mathbb{R}^3$ descripta por $x^2+y^2+z^2 < 9$. Suponiendo que el flujo de $\vec{F}$ a través del borde del cilindro definido por $x^2+y^2 \leq 1$, $0 \leq z \leq 2$ es 3, calcular $\iint\limits_M R(x,y)\,dx\,dy$, siendo M el disco descripto en el plano xy por $x^2+y^2 \leq 1$.

    b) Una función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $f \in C(\mathbb{R}^2)$ tiene extremos en puntos P_1 y P_2. Calcular la circulación del campo $\vec{F}(x,y) = (\dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}, \dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y})$ a lo largo del segmento que va desde P_1 hasta P_2.

    c) Sea C una curva regular en $\mathbb{R}^2$, positivamente orientada, que encierra una región R de área 4. Calcular $\int\limits_C P\,dx + Q\,dy$, siendo $P(x,y) = 3\,x^2\,y + 5$, $Q(x,y) = x^3 - 4\,x - 3$.

22. (*) Demostrar las siguientes igualdades indicando las hipótesis necesarias en cada caso.

    a) $\iiint_D (f\nabla^2 g - g\nabla^2 f)\,dx\,dy\,dz = \iint_{\partial D} (f\,\nabla g - g\,\nabla f)\cdot \breve{n}\,dS.$

    b) $\iint_{\partial D} (\nabla f \times \nabla g)\cdot \breve{n}\,dS = 0.$

    c) $\oint_{\partial D^+} f\,\nabla g \cdot d\vec{l} = \iint_D (\nabla f \times \nabla g)\cdot \breve{n}\,dS.$

Guía XI: Polinomio de Taylor-Extremos

Polinomio de Taylor

1. Hallar los polinomios de Taylor de primer y segundo orden para los siguientes campos escalares definidos sobre $\mathbb{R}^2$ en el punto A.

   a) $f(x,y) = \cos(x+y)\,,\ A = (0,0)$

   b) $(*) f(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}\,,\ A = (0,0)$

   c) $f(x,y,z) = e^{xy} - (z+1)\sqrt{(y-x)}\ ,\ A = (1,2,0)$

   d) $(*)\ z = u - v^2$ con $\begin{cases} u = 2\,x + y^2 \\ v = g(x,y) \text{ tal que } vx + e^{yv} = 1 \end{cases}$ $, A = (1,0)$.

2. Expresar el polinomio $p(x,y) = x^3 - 2\,x\,y + y^2$ en potencias de $(x-1)$ e $(y+1)$.

3. $(*)$Calcular un valor aproximado de $0,98^{2,01}$.

4. Desarrollar f por Taylor hasta 2° orden en un entorno de A.

   a) $f(x,y) = \cos(x+y)$, $A = (0,0)$.

   b) $f(x,y) = e^{x+y}\cos(y-1)$, $A = (-1,1)$.

   c) $f(x,y,z) = \sqrt{x\,y}\,\ln z$, $A = (1,4,1)$.

5. $(*)$El polinomio de Taylor de 2° orden para f en un entorno de $(2,1)$ es $p(x,y) = x^2 - 3\,x\,y + 2\,x + y - 1$, hallar una ecuación cartesiana para el plano tangente a la gráfica de f en $(2,1,z_0)$.

6. (*) Sea $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $C^3(\mathbb{R}^2)$, cuyo polinomio de Taylor de segundo orden en el punto $(2,2)$ es $p(u,v) = 14 + v^2 - 2\,u\,v - u^2$.
   Si $h(x,y) = f(x^2 - 2\,y, y^2 + x\,y - 1)$, estimar el valor de $h(1{,}98, 1{,}02)$ usando una aproximación lineal.

Extremos

Definiciones: Sea $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y $P \in U$

- P es un **punto crítico de f si f no es diferenciable en P o f es diferenciable en P y $\nabla f(P) = \overline{O}$.**
- P **es un punto donde f alcanza un mínimo relativo / máximo relativo si $f(P) \leq f(\overline{X})$ / $f(P) \geq f(\overline{X})$ para todo $\overline{X}$ perteneciente a un entorno de P.**
- P **es un punto donde f alcanza un mínimo absoluto / máximo absoluto si $f(P) \leq f(\overline{X})$ / $f(P) \geq f(\overline{X})$ para todo $\overline{X} \in U$**

7. Dadas las siguientes funciones $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, hallar los puntos estacionarios. Analizar si en ellos la función alcanza extremo relativo y, en ese caso, clasificarlo.

   (a) (*) $z = x^3 + y^3 + \frac{48}{x} + \frac{48}{y}$

   (b) $z = (2\,x - 3\,y + 4)^2$

   (c) (*)$z = x^2 + x\,y + y^2 - a\,x - b\,y$

   (d) (*)$z = f(x,y)$ definida por $x\,y + z + e^z - 1$

   (e) $f(x,y) = x^3 + y^3 + 3\,x^2 - 2\,y^2 - 8$

   (f) $f(x,y) = 6 + x^3$

8. Dadas las siguientes funciones $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

   a) (*) Mostrar que $f(x,y,z) = 4\,x\,y\,z - x^4 - y^4 - z^4$ tiene un máximo local en $(1,1,1)$.

   b) Hallar los máximos y mínimos de $f(x,y,z) = x\,y\,z\,e^{-x^2-y^2-z^2}$.

9. Dada la familia de funciones $f(x,y) = x^2 + k\,x\,y + y^2$ siendo k una constante, mostrar que hay un único punto crítico (x_0, y_0), común a **todos** los miembros de la familia y determinar, en cada uno de los siguentes casos, **todos** los k que aseguren que:

   a) en (x_0, y_0) f no alcance un extremo local,

   b) en (x_0, y_0) f alcance un mínimo local.

   ¿Puede alguna de estas funciones tener un máximo local en ese punto crítico?

10. Analizar la existencia de extremos relativos y de extremos absolutos de los valores de f en su dominio.

    (a) $(*)$ $f(x,y) = (x^3 + y^3)(x^3 - y^3)$

    (b) $f(x,y) = \sqrt{(x-1)\,y}$

    (c) $f(x,y,z) = (x^2 + y^2)(2 - e^{z^2})$

    (d)$(*)$ $f(x,y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$

    (e) $f(x,y) = \sqrt{\ln(2 - x^2 - y^2)}$

    (f) $(*)$ $f(x,y) = \ln(1 + x^4 + y^4)$

11. $(*)$Supongamos que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función $C^2(\mathbb{R})$ que satisface $f'(1) = 0$, $f''(1) > 0$, $f'(2) = 0$, $f''(2) < 0$ y $f'(x) \neq 0$ en otros puntos, y $g(u) = 2\,u^3 - 9\,u^2 + 12\,u$. Hallar y clasificar los extremos de $h(x,y) = f(x-1) - g(-y+1)$.

    ¿Es necesario que la función f tenga derivada segunda continua en $\mathbb{R}$?

12. $(*)$Supongamos que $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es una función positiva y $C^3(\mathbb{R}^2)$ cuyo gradiente se anula sólo en $P_1 = (1,-1)$ y en $P_2 = (-1,1)$, cuyo determinante Hessiano en esos puntos es no nulo, y tal que en P_1 tiene un máximo 10 y en P_2 tiene un mínimo 3. Estudiar los extremos de $g(x,y) = \frac{1}{f(x,y)}$.

13. $(*)$ Supongamos que $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es una función $C^3(\mathbb{R}^2)$ cuyo gradiente se anula sólo en $P_1 = (1,-1)$ y en $P_2 = (-1,1)$, cuyo determinante Hessiano en esos

puntos es no nulo, y tal que en P_1 tiene un máximo 10 y en P_2 tiene un mínimo 3. Estudiar los extremos de $g(x, y, z) = z^3/3 - z + f(x, y)$.

¿Es necesario que el campo f tenga derivadas terceras continuas en $\mathbb{R}^2$?

14. Dada $f(x, y) = a\,x^3 + b\,x\,y + c\,y^2$, hallar a, b y c de manera que en $(0, 0)$ haya punto silla de f y en $(1, 1)$ un mínimo de f.

15. $(*)$ Sean $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dos funciones $C^2(\mathbb{R})$ tales que g tiene en $x = 2$ mínimo 1, h tiene en $y = 3$ mínimo 5, y $g''(x) > 0$, $h''(y) > 0$ para todo x, y (observe que en estas condiciones $g(x) > 0$, $h(y) > 0$ para toda $x,\ y \in \mathbb{R}$). Estudiar los extremos de $f(x, y) = g(2\,x)\,h(3\,y + 1)$. Justificar

16. Resolver:

    a) Una función $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$, $z = f(x, y)$ tiene máximo relativo 3 en $(1, 2)$. Hallar una ecuación del plano tangente en $(1, 2, 4)$ a la superficie de ecuación $z = f(x, y) + x^2$.

    b) $(*)$ Una función $G \in C^2(\mathbb{R}^3)$ tiene máximo relativo 0 en $(1, 2, 3)$. Hallar una ecuación del plano tangente en $(1, 2, 3)$ a la superficie de **ecuación** $G(x, y, z) - 4\,x + y^2 = 0$.

    c) $(*)$ Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función $C^3(\mathbb{R}^2)$ que satisface $\nabla f(1, 2) = (1, 0)$, y cuya matriz Hessiana en $(1, 2)$ es

    $$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

    Hallar a de manera que la función $g(x, y) = f(x, y) + ax + (y - 2)^2$ tenga extremo en $(1, 2)$. ¿Qué tipo de extremo es?

17. $(*)$ Hallar los extremos de $f(x, y) = x^2 + (y - 1)^2$ sobre la curva de ecuación $y = x^2$.

18. Hallar la mínima distancia del punto $(0, 2)$ a la curva plana de ecuación $y^2 - x^3 = 0$.

19. (*) Hallar los puntos de la superficie $z = \sqrt{x\,y+1}$ más cercanos al origen.

20. (*) Un envase cilíndrico debe tener 1 litro de capacidad. El material para las tapas cuesta 0,02\$/cm^2 mientras que el de la cara lateral 0,01\$/cm^2. Calcular las dimensiones del envase para que el costo sea mínimo.

21. Determinar los valores de a y b para los que se produce un mínimo relativo del flujo de $\vec{f}(x, y, z) = (a\,b\,x, y/a, -z/b)$ a través de $z = x\,y$ con $(x, y) \in [1, 2] \times [1, 2]$, cuando el $\vec{n}$ se orienta de manera que $\breve{n} \cdot (0, 0, 1) < 0$.