Facultad de Ingeniería **UBA**

Probabilidad y Estadística

Guía de Ejercicios

Segundo Cuatrimestre del 2014

Versión 1.2

Glosario de símbolos

: El ejercicio requiere simulación con computadora.

: Alto. Estos ejercicios son importantes, pudiendo ser o no difíciles de resolver. Se recomienda fuertemente resolverlos.

: "Siga siga". Lea detenidamente el enunciado. Si cree entender qué es lo que hay que hacer (ya ha resuelto un ejercicio previamente de espíritu similar), pase al siguiente. Ante la duda, resuélvalo.

: Curva peligrosa. Estos ejercicios pueden ser más difíciles de lo que parecen a simple vista, o por el contrario, si se miran bien resultan más fáciles de lo que parecen.

: Ejercicios muy difíciles.

: Sólo para audaces. Viaje de ida al paraíso o al infierno.

Guía 1

1.1 Se hace una encuesta con un grupo de 1000 suscriptores a una revista. De la misma resultan: 312 varones, 470 casados, 525 graduados universitarios, 42 varones graduados universitarios, 147 graduados universitarios casados, 86 varones casados y 25 varones casados graduados universitarios. Mostrar que estos datos no son consistentes.

1.2 [*DeGroot, pág. 42*] En una ciudad se publican los periódicos A, B y C. El 22 % de la población lee el periódico A, el 25 % lee el B, y el 28 % lee el C. El 11 % de la población lee los periódicos A y B, el 5 % lee los periódicos A y C, y el 7 % de la población lee los periódicos B y C. Sólo el 1 % lee los tres periódicos. Hallar la probabilidad de que una persona de la población (para cada caso representar los eventos en un diagrama de Venn)

(**a**) lea alguno de los periódicos A o B.

(**b**) no lea ni el periódico A ni el B.

(**c**) lea alguno de los tres periódicos.

(**d**) lea sólo el periódico C.

(**e**) no lea ni el periódico A ni el B, o lea el C.

1.3 [*Maronna, pág. 10*]

(**a**) Una canasta roja contiene 5 botellas de champagne y 6 de vino común, mientras que una canasta blanca contiene 3 de champagne y 4 de vino. Se le ofrece a Ud. elegir una canasta y extraer al azar una botella de ella. ¿Cuál canasta le conviene elegir si desea tomar champagne y no vino?

(**b**) Otra canasta roja contiene 6 botellas de champagne de primera y 3 de vino de cuarta, mientras que otra canasta blanca tiene 9 de champagne y 5 de vino. ¿De cuál le conviene extraer?

(**c**) Los contenidos de las dos canastas blancas se unen y lo mismo se hace con los de las dos rojas. ¿De cuál le conviene extraer ahora? (el resultado es un ejemplo de la llamada *paradoja de Simpson*)

1.4 STOP Sea $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Definimos en los subconjuntos $A \subset \Omega$ una probabilidad $\mathbf{P}$ mediante $\mathbf{P}(A) = \sum_{i \in A} p_i$, donde $p_1 = 0.1, p_2 = 0.2, p_3 = 0.3, p_4 = 0.05, p_5 = 0.35$. Sea $A = \{1, 5\}$.

(**a**) Calcular $\mathbf{P}(A)$.

(**b**) Hallar, si existe, un evento $B \subset \Omega$ tal que $A \subset B$ y $\mathbf{P}(B) = 0.65$.

(**c**) Hallar todos los eventos C tales que $\mathbf{P}(A \cap C) = 0$ y $\mathbf{P}(C) = 0.3$.

(**d**) Hallar todos los eventos D tales que $A \cap D = \varnothing$ y $\mathbf{P}(A \cup D) \geqslant 0.6$.

(**e**) Repetir los incisos anteriores si $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, con $p_6 = 0$, y $A = \{1, 5, 6\}$.

1.5 Se tienen dos urnas a y b. En a hay 3 bolas rojas y 2 blancas, y en b hay 2 rojas y 5 blancas. Si se extraen al azar una bola de cada urna, hallar la probabilidad de que

(**a**) ambas sean blancas.

(**b**) ambas sean del mismo color.

(**c**) sean de distinto color.

(**d**) la bola extraída de la urna a sea blanca.

1.6 Cada noche después de cenar, el matrimonio Galíndez tira 4 dados. Si no sale ningún 6, le toca al Sr. Galíndez lavar los platos. En caso contrario, a su esposo. En promedio, ¿quién lava los platos más seguido?

1.7 Un dado equilibrado se arroja dos veces. Hallar la probabilidad de que

(**a**) los dos resultados sean iguales.

(**b**) los dos resultados sean distintos y su suma no supere 9.

(**c**) la suma de los resultados sea 10.

(**d**) el primer resultado sea inferior a 4 y el segundo sea impar.

(**e**) el módulo de la diferencia de los resultados sea 1.

1.8 [*Feller, pág. 18 y 24*] Juan, Pedro y María juegan al ping-pong. El que gana un partido sigue jugando, mientras que el que lo pierde es reemplazado por el que no jugaba. El primer partido es entre Juan y María. Se gana una cerveza el primero que gana dos partidos seguidos, completando así un juego.

Para cada k, asignamos a cada juego posible que dura exactamente k partidos, la probabilidad $\frac{1}{2^k}$. Si describimos un juego indicando la secuencia de ganadores mediante la de sus iniciales, el juego $JPMM$ tendrá probabilidad $1/16$, el juego $(MPJ)^6MPP$ (dejamos a cargo del lector la interpretación de la notación) probabilidad $\frac{1}{2^{21}}$.

(**a**) Describir un espacio muestral para los resultados del juego. (*sugerencia*: analizar las secuencias posibles usando la notación ya introducida.)

(**b**) Hallar las probabilidades de que cada uno de los jugadores Juan, María o Pedro se tome la cerveza.

(**c**) Hallar la probabilidad de que el juego dure para siempre sin que nadie se gane la cerveza.

1.9 Lucas y Monk juegan al ajedrez. Se gana un libro el primero que gana un partido. (Cada partido de ajedrez puede ser ganado por algún jugador o empatado). La probabilidad de que haya k partidos hasta que uno de ellos gane es $1/2^{k+2}$, $k = 1, 2, \ldots$. La probabilidad de que Lucas gane el libro en el partido k es el doble de la probabilidad de que lo gane Monk en dicho partido.

(**a**) Calcular la probabilidad de que Monk gane el libro.

(**b**) Calcular la probabilidad de que el juego dure más de 1000 partidos.

1.10 Se realiza el experimento de tirar un dado hasta que sale el primer as, anotando el número K de tiradas necesarias.

(**a**) Describir un posible espacio muestral para este experimento.

(**b**) Sea A_k el evento descrito por $K = k$. Hallar $\mathbf{P}(A_1), \mathbf{P}(A_7), \mathbf{P}(A_{1017})$.

(**c**) Sea B_k el evento descrito por $K \geqslant k$. Hallar $\mathbf{P}(B_1), \mathbf{P}(B_5)$. ¿Cómo se describiría en términos de lo que pasa con el dado el evento B_{1000}?

(**d**) Mostrar que para cualquier k, $B_{k+1} \subset B_k$.

(**e**) Sea $B = \bigcap_{k=1}^{\infty} B_k$. ¿Cómo se describiría en términos de lo que pasa con el dado el evento B? Hallar $\mathbf{P}(B)$.

1.11 Se sortea un número al azar dentro del intervalo $[0, 1]$.

(**a**) Hallar la probabilidad de que los primeros tres dígitos sean 1, 2, 2 (es decir, $0.122\ldots$).

(**b**) Hallar la probabilidad de que el 8 no esté entre los primeros 5 dígitos.

(**c**) Hallar la probabilidad de que el 7 no sea uno de sus dígitos.

1.12 *Simulación de experimentos aleatorios.* Sea $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$ el espacio muestral correspondiente a un experimento aleatorio. Suponga que cada punto $\omega_k \in \Omega$ tiene asignada la probabilidad p_k. Definimos el siguiente mecanismo para *simular el experimento*.

- Sean $a_0 = 0$, $a_i = \sum_{k=1}^{i} p_k$. Subdividimos el intervalo $(0, 1]$ en los n intervalos $I_i = (a_{i-1}, a_i]$, $i = 1, \cdots, n$. Observar que $\bigcup_{i=1}^{n} I_i = (0, 1]$, y que la longitud de I_i es p_i.
- Dado un número aleatorio $U \in (0, 1]$, determinamos a cuál de los intervalos I_i pertenece, y consideramos que el resultado simulado de la realización del experimento ha sido ω_i.

Si queremos simular m realizaciones del experimento, usaremos m veces el mecanismo anterior, cada vez con un nuevo número aleatorio U.

(**a**) Dados los números aleatorios $0.2, 0.7, 0.9, 0.1$, simular el resultado de 4 tiradas sucesivas de un dado equilibrado.

(**b**) Mediante diez mil simulaciones estimar la probabilidad de que al arrojar 2 dados equilibrados la suma de los resultados sea menor que 11. Comparar la estimación obtenida con el valor verdadero de la probabilidad.

1.13 Mediante 20 simulaciones estimar las siguientes probabilidades

(**a**) Obtener al menos un as en seis tiros de un dado.

(**b**) Obtener al menos dos ases en doce tiros de un dado.

(**c**) De acuerdo con los resultados, si se quiere apostar a uno de los resultados, ¿cuál de las dos apuestas es más conveniente?

(**d**) Repetir los incisos anteriores mediante 10000 simulaciones.

1.14 Se tiene un naipe español de 40 cartas.

(**a**) Se extraen al azar *con reposición* tres cartas. Hallar

1. la probabilidad de que las tres sean de oro.
2. la probabilidad de que las tres sean del mismo palo.
3. la probabilidad de que las tres sean iguales.
4. la probabilidad de que las tres sean de palos diferentes.

(**b**) Hallar cada una de las probabilidades del inciso anterior, suponiendo que la extracción se hace *sin reposición*.

1.15 [*Feller, pág. 56*] La encargada del edificio donde viven otras 40 personas echa a rodar un rumor. A la mañana temprano se lo dice a una vecina, quien a su vez lo repite a una tercera, etcétera. En cada paso el emisor del rumor elige al azar al receptor entre los restantes 40 habitantes del edificio.

(**a**) Hallar la probabilidad de que el rumor se transmita 15 veces sin retornar a la encargada que lo originó.

(**b**) Hallar la probabilidad de que el rumor se transmita 15 veces sin que ninguna persona lo reciba más de una vez.

1.16 Una planta de ensamblaje recibe una partida de 100 piezas de precisión que incluye exactamente k defectuosas. La división de control de calidad elige 10 piezas al azar para controlarlas y rechaza la partida si encuentra al menos 2 defectuosas.

(**a**) Si $k = 8$, ¿cuál es la probabilidad de que la partida pase la inspección?

(**b**) ¿Cómo se comporta la probabilidad $p(k)$ de que la partida pase la inspección?

(**c**) ¿Cuál es la máxima probabilidad de aceptar una partida que contenga más de 20 piezas defectuosas?

1.17 Un ascensor parte con 7 pasajeros y para en 3 pisos. Cada pasajero elige al azar el piso en que bajará.

(**a**) Calcular la probabilidad de que tres pasajeros bajen en el primer piso, dos pasajeros en el segundo y dos pasajeros en el tercero.

(**b**) Calcular la probabilidad de que exactamente dos pasajeros bajen en el primer piso y cuatro o más bajen en el segundo.

(**c**) Calcular la probabilidad de que en algún piso bajen exactamente tres pasajeros y en algún otro exactamente dos.

1.18 Se colocarán 7 regalos navideños en 5 cajas. Suponiendo que las regalos son indistinguibles y que todas las configuraciones distintas son equiprobables.

(**a**) Calcular la probabilidad de que la primera caja contenga exactamente 2 regalos y que la última caja quede vacía.

(**b**) Calcular la probabilidad de que la cuarta caja contenga más de 3 regalos.

1.19 Un dado equilibrado se arroja dos veces. Hallar la probabilidad de que la suma supere 10 sabiendo que

(**a**) la primer tirada es un 5.

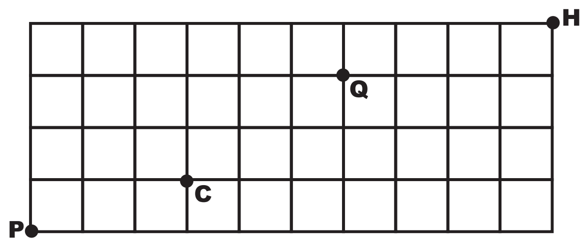
(**b**) la primer tirada es mayor a 3.

(**c**) la primer tirada es menor que 5.

(**d**) la suma de los resultados supera 9.

(**e**) el módulo de la diferencia de los resultados es 1.

1.20 La figura siguiente representa el mapa de una localidad turística de 40 manzanas situada en la costa atlántica. Un paseo desde el hotel, situado en el



punto H, hasta el puerto de pescadores, situado en el punto P, es una sucesión de 14 cuadras –dentro de la localidad– recorridas hacia la izquierda o hacia abajo (ver la figura). Se elige al azar un paseo desde el hotel hasta el puerto de pescadores (esto es, todos los paseos tienen la misma probabilidad de ser elegidos).

(**a**) Calcular la probabilidad de pasar por el quiosco de diarios y revistas situado en el punto Q.

(**b**) Sabiendo que se pasó por el café situado en el punto C, hallar la probabilidad de haber pasado por el quiosco de diarios y revistas.

1.21 En una urna hay una bola verde y dos bolas rojas. En cada paso se extrae una bola al azar y se la repone junto con otra del mismo color.

(**a**) Calcular la probabilidad de que al finalizar el segundo paso la urna contenga dos bolas verdes y tres rojas.

(**b**) Si al finalizar el segundo paso la urna contiene dos bolas verdes y tres rojas, ¿cuál es la probabilidad de que en el primer paso se haya extraído una bola roja?

1.22 Juan y María juegan a cara o ceca con una moneda equilibrada. Inicialmente Juan tiene cinco monedas y María tres. Cuando sale cara Juan le da una moneda a María, cuando sale ceca María le da una moneda a Juan. Arrojan sucesivamente la moneda hasta que alguno se queda sin monedas. Hallar la probabilidad de que Juan sea el primero en quedarse sin monedas. (*sugerencia*: si entre los dos tienen 8 monedas, sea p_n la probabilidad de que Juan sea el primero en quedarse sin monedas *si inicialmente tiene* n, con $n = 0, \dots, 8$. Hallar p_0 y p_8. Mostrar que $p_{n+1} - p_n = p_n - p_{n-1}$ y resolver ecuaciones. Aplicar al caso $n = 5$).

1.23 Harvey "*dos caras*" tiene dos monedas normales y una moneda de dos caras.

(**a**) Elige una moneda al azar y la arroja al aire dos veces consecutivas. Si el primer resultado fue cara, ¿cuál es la probabilidad de que el segundo también sea cara?

(**b**) Elige una moneda al azar, la arroja al aire y sale cara. ¿Cuál es la probabilidad de que sea una de las monedas normales?

(**c**) Harvey arroja la misma moneda por segunda vez y de nuevo sale cara. ¿Cuál es la probabilidad de que sea una de las monedas normales?

(**d**) Harvey arroja la misma moneda por tercera vez y de nuevo sale cara. ¿Cuál es la probabilidad de que sea una de las monedas normales?

1.24 Un canal de comunicación binario simple transporta mensajes usando sólo dos señales (bits): 0 y 1. Supongamos que en un canal de comunicación binario dado el 40 % de las señales emitidas son 1, que si se emitió un 0 la probabilidad de que se reciba un 0 es 0.90, y que si se emitió un 1 la probabilidad de que se reciba un 1 es 0.95. Calcular

(**a**) la probabilidad de que una señal recibida sea 1.

(**b**) dado que se recibió un 1, la probabilidad de que se haya emitido un 1.

1.25 El 1 % de los bits transmitidos por un canal de comunicación binario es 0. El programa receptor indica que hay un 0 en el mensaje cuando efectivamente el 0 ha sido emitido, con probabilidad 0.91. ¿Cuál debe ser la probabilidad de que el receptor indique que hay un 1 cuando efectivamente el 1 ha sido emitido, para que la probabilidad de que haya sido emitido un 0 cuando el receptor indica que hay un 0 sea 0.99?

1.26 Se tienen 3 urnas a, b, c. En a hay dos bolas rojas y una blanca, en b una roja y dos blancas, en c tres rojas y cuatro blancas. Se extrae una bola de a: si es roja, se extrae una bola de b, en caso contrario se extrae una bola de c. Indiquemos $R_i, i = 1, 2$ el evento de que la bola en la extracción i fue roja, y $B_i, i = 1, 2$ el evento de que la bola en la extracción i fue blanca.

(**a**) Calcular $\mathbf{P}(B_1)$.

(**b**) Calcular $\mathbf{P}(B_2)$.

(**c**) Describir mediante la notación detallada antes y calcular la probabilidad de que la primer bola extraída haya sido blanca sabiendo que la segunda fue roja.

(**d**) Calcular la probabilidad de que alguna de las bolas extraídas sea roja.

(**e**) Suponiendo ahora que en a hay 2000 bolas rojas y 1000 blancas, en b 100 rojas y 200 blancas, y en c 9 rojas y 12 blancas, resolver en estas nuevas condiciones los incisos anteriores. Si se obtienen los mismos resultados, explicar por qué.

1.27 Se elige al azar una permutación de las letras C, H, Q, P. Mostrar que

(**a**) Los eventos “C precede a H” y “Q precede a P” son independientes.

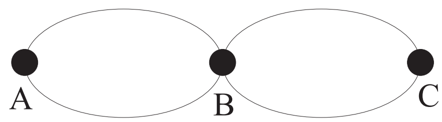
(**b**) Los eventos “C precede *inmediatamente* a H” y “Q precede *inmediatamente* a P” *no* son independientes.

1.28 Se elige un número al azar en el intervalo $(0, 1)$

(**a**) Probar que los eventos “el primer dígito es 1” y “el segundo dígito es 2” son independientes.

(**b**) Probar que los eventos “el primer dígito es 1” y “el segundo dígito no es 2” son independientes.

1.29 Existen dos caminos de A hasta B y dos caminos de B hasta C. Cada uno de estos caminos está bloqueado con probabilidad 0.2 independientemente de los demás. Hallar la probabilidad de que exista un camino abierto desde A hasta B sabiendo que no hay ningún camino abierto desde A hasta C.



1.30 Un dado equilibrado se arroja dos veces. Sea A el evento “el primer resultado es par”, B el evento “el segundo resultado es par” y C el evento “la suma de los resultados es par”.

(**a**) Mostrar que los eventos A, B, C son dos a dos independientes.

(**b**) Mostrar que el conjunto de eventos $\{A, B, C\}$ no es independiente.

1.31 Se transmiten tres bits por un canal de comunicación binario (ver **Ejercicio 1.24**). Asumir que las ternas de bits son equiprobables. A_1 es el evento “el primer bit es un 0”, A_2 es “la suma de los tres bits es menor o igual a 1” y A_3 es “se transmite $(0, 0, 0)$ o $(1, 0, 1)$ o $(1, 1, 0)$ o $(1, 1, 1)$”. Mostrar que la probabilidad de la intersección $A_1 \cap A_2 \cap A_3$ es el producto de las probabilidades de cada evento, pero los eventos no son independientes.

1.32 Sea A, B, C, D eventos independientes en un espacio de probabilidad. ¿De cuáles de las siguientes familias de eventos puede asegurarse que son independientes?

(**a**) $A^c, B \cap C, D$.

(**b**) $A \cup B, C \cup D^c$.

(**c**) $A \cup B, B \cup C, D$.

(**d**) $A \cup D, B \cup C, D$.

(**e**) En los casos en que su respuesta fue negativa, exhiba un ejemplo para justificarla.

1.33 Se elige un número al azar en el intervalo $(0, 1)$.

(**a**) Probar que los eventos “el primer dígito es 2”, “el segundo dígito es 3”, el “tercer dígito es 5” y el “cuarto dígito es 8 y el 1 aparece alguna vez después del décimo dígito” son independientes.

(**b**) Analizar la independencia de los eventos: “el primer dígito no es 2”, “el segundo dígito es 3 y el tercero es 5”.

(**c**) Analizar la independencia de los eventos: “el primer dígito es 1 o el tercero no es 5”, “el segundo dígito es 3 y el cuarto es 8 y el 1 aparece alguna vez después del décimo dígito”.

1.34 El motor de un automóvil consta de 300 componentes individuales. Cada uno de éstos es entregado independientemente por un proveedor diferente. Los 300 proveedores garantizan que la probabilidad de entregar un componente defectuoso es 0.01 o menor. Se considera aceptable el motor sólo cuando ninguno de sus componentes es defectuoso.

(**a**) Calcular la probabilidad de que el motor sea aceptable.

(**b**) ¿Qué nivel de calidad debe exigirse a cada proveedor (es decir, qué probabilidad de componente defectuoso) si se desea que al menos el 98 % de los motores armados sea aceptable?

1.35 Una empresa compra una gran de cantidad de bulones a un mismo proveedor. Cada vez que se recibe un envío, se realiza un control de calidad por muestreo: se prueban 80 bulones seleccionados al azar del total; si se encuentra más de un bulón defectuoso se rechaza el envío. En caso contrario, se lo acepta. Sea p la probabilidad de producir un bulón defectuoso en el proceso de fabricación. De acuerdo a los estándares de calidad, se desea satisfacer la condición $p < 0.005$. Los defectos de los bulones son independientes entre sí.

(**a**) Hallar la probabilidad de rechazar un lote fabricado bajo la condición $p = 0.004$.

(**b**) Hallar la probabilidad de aceptar un lote fabricado bajo la condición $p = 0.05$.

(**c**) Graficar la probabilidad de aceptar un envío en función de p (*Curva característica del plan de muestreo*).

(**d**) Si se sabe que el lote cumple los estándares de calidad, ¿cuál es la máxima probabilidad de tomar una decisión errónea sobre el mismo?

1.36 Una materia de la FIUBA se aprueba con un examen *multiple choice* de 10 preguntas, con 5 opciones de respuesta en cada pregunta. Se asume que los eventos $A_i =$“el alumno contesta correctamente la pregunta i” son independientes y tienen todos la misma probabilidad p.

(**a**) ¿Cómo debería establecerse un criterio de aprobación (cantidad de respuestas correctas) para asegurar que sean reprobados al menos el 95 % los alumnos que no saben nada de la materia y responden totalmente al azar?

(**b**) Fijado el criterio anterior, si un alumno estudió lo suficiente como para que la probabilidad de responder bien cada una de las preguntas sea $p = 0.4$, ¿con qué probabilidad aprobará el examen?

(**c**) Graficar la probabilidad de aprobar en función de p. ¿Para qué valor de p se aprueba el examen con probabilidad mayor a 0.95?

1.37 La urna a contiene 3 bolas blancas y 7 rojas. La urna b contiene 12 blancas y 8 rojas. Se elige una urna al azar y se extrae una bola; esta bola se reintegra a la misma urna y se vuelve a extraer una bola de ella.

(**a**) Si la primer bola extraída fue blanca, ¿cuál es la probabilidad de que la segunda también lo sea?

(**b**) ¿Son independientes los sucesos "primera bola es blanca" y "segunda bola es blanca" aun cuando hay reposición?

1.38 Sea $\Omega = [0,1] \times [0,1]$ el cuadrado unitario. Consideraremos eventos a los subconjuntos $\Lambda \subset \Omega$ que admiten área $|\Lambda|$, y definimos $\mathbf{P}(\Lambda) = |\Lambda|$.

$$\begin{aligned} A &= \{(x,y) \in \Omega : |x - 1/2| + |y - 1/2| \leqslant 1/3\}, \\ B &= \{(x,y) \in \Omega : \text{máx}\{|x - 1/2|, |y - 1/2|\} \leqslant 1/3\}, \\ C &= \{(x,y) \in \Omega : x \leqslant 2/3\}, \\ D &= \{(x,y) \in \Omega : y \geqslant 2/3\}. \end{aligned}$$

(**a**) Dado A, ¿son C y D independientes?

(**b**) Dado B, ¿son C y D independientes?

1.39 [*Abramson*] Dado un experimento aleatorio E con $r_1, r_2, \ldots, r_n$ resultados posibles, que tienen probabilidades respectivas $p_1, p_2, \ldots, p_n$, se llama *entropía* del experimento E al valor

$$H(E) = -\sum_{i=1}^{n} p_i \log(p_i).$$

(**a**) Si $n = 2$, mostrar que la entropía es máxima cuando los resultados son equiprobables, es decir, cuando $p_1 = p_2 = 1/2$.

(**b**) ¿Cómo generalizaría este resultado para cualquier $n > 2$? ¿Puede usted probarlo?

Ejercicios Complementarios

1.40 Se hace un estudio sobre 900 graduados, después de 25 años de graduados, resultando que 300 se han destacado, 300 habían estudiado probabilidades en la Universidad y 100 cumplían ambas condiciones. Hallar, para $k = 0, 1, 2$, el número de personas en el grupo que tiene de esas condiciones

(**a**) exactamente k.

(**b**) al menos k.

(**c**) a lo sumo k.

1.41 Sea $\Omega = [0,1] \times [0,1]$ el cuadrado unitario. Consideraremos eventos a los subconjuntos $\Lambda \subset \Omega$ que admiten área $|\Lambda|$, y definimos $\mathbf{P}(\Lambda) = |\Lambda|$.

(**a**) Sea $A = \{(x,y) \in \Omega : x + y \leqslant 1\}$. Hallar $\mathbf{P}(A)$.

(**b**) Sea $B = \{(x,y) \in \Omega : x^2 + y^2 \leqslant 1\}$. Hallar $\mathbf{P}(B)$.

(**c**) Sean, para $k = 1, 2, \ldots$, $C_k = \{(x,y) \in \Omega : x + y \leqslant 1/2 + 1/k\}$. Hallar $\mathbf{P}(C_k)$ y $\mathbf{P}(\bigcap_{k=1}^{\infty} C_k)$.

(**d**) Sean, para $k = 1, 2, \ldots$, $D_k = \{(x,y) \in \Omega : (x - 1/2)^2 + (y - 1/2)^2 \leqslant 1/k^2\}$ y $D = \bigcap_{k=1}^{\infty} D_k$. Hallar $\mathbf{P}(D_k)$ y $\mathbf{P}(D)$.

(**e**) Suponer que Ω modela un blanco cuadrado al que se dispara un dardo, y $\mathbf{P}(\Lambda)$ es la probabilidad de que el dardo se clave en la zona del blanco descrita por Λ. ¿Cómo se describirían en términos de lo que pasa con el dardo los eventos D_k y D del inciso anterior?

1.42 Sea $\Omega = [0, 100] \times [0, 100]$. Supongamos que $\mathbf{P}$ es una probabilidad definida en una familia de subconjuntos de Ω que incluye todos los rectángulos R, y satisface que si R es un rectángulo:

$$\mathbf{P}(R) = \begin{cases} |R| \cdot \frac{6}{30000} & \text{si } R \subset [0, 50] \times [0, 50] \\ |R| \cdot \frac{1}{30000} & \text{si } R \subset [0, 50] \times [50, 100] \\ |R| \cdot \frac{5}{30000} & \text{si } R \subset [50, 100] \times [0, 50] \\ 0 & \text{si } R \subset [50, 100] \times [50, 100] \end{cases}$$

(**a**) Comprobar que $\mathbf{P}(\Omega) = 1$.

(**b**) Calcular $\mathbf{P}([30, 60] \times [10, 40])$.

(**c**) Calcular $\mathbf{P}([30, 60] \times [60, 70])$.

(**d**) Calcular $\mathbf{P}(\{(x, y) \in \Omega : x + y \leqslant 20\})$.

(**e**) Calcular $\mathbf{P}(\{(x, y) \in \Omega : 20 \leqslant x + y \leqslant 130\})$.

(**f**) Calcular $\mathbf{P}(\{(x, y) \in \Omega : (x - 50)^2 + (y - 50)^2 < 100\})$.

1.43 Rodriguez y Rivas juegan una partida de truco. Se asume que el mazo se encuentra bien mezclado. Se reparte una mano de cartas (tres a cada uno).

(**a**) Hallar la probabilidad de que Rodriguez tenga flor (tres cartas del mismo palo).

(**b**) Mostrar que el resultado anterior no se ve afectado por la forma de repartir las cartas (una y una por vez, o tres para uno y luego tres para el otro).

(**c**) ¿Cuál es la probabilidad de que Rivas tenga flor?

(**d**) Hallar la probabilidad de que ambos tengan flor.

(**e**) Comparar el valor de la probabilidad hallada en **Inciso** (**a**) con el de la probabilidad de que Rodriguez tenga flor si se sabe que Rivas la tiene.

1.44 En el juego de poker son posibles las siguientes manos, que se listarán en orden creciente de conveniencia. En las definiciones la palabra *valor* se refiere a $A, K, Q, J, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3$ ó 2. Esta sucesión también describe el rango relativo de los naipes, con una excepción: un as (A) puede verse como un 1 para usarlo en una escalera.

(a) *un par:* dos naipes de igual valor más tres naipes con diferentes valores.
Por ej. $J\spadesuit\ J\diamondsuit\ 9\heartsuit\ Q\clubsuit\ 3\spadesuit$

(b) *dos pares:* dos pares más un naipe de diferente valor.
Por ej. $J\spadesuit\ J\diamondsuit\ 9\heartsuit\ 9\clubsuit\ 3\spadesuit$

(c) *terna:* tres naipes del mismo valor y dos naipes de diferentes valores.
Por ej. $J\spadesuit\ J\diamondsuit\ J\heartsuit\ 9\clubsuit\ 3\spadesuit$

(d) *escalera:* cinco naipes con valores consecutivos.
Por ej. $5\heartsuit\ 4\spadesuit\ 3\spadesuit\ 2\heartsuit\ A\clubsuit$

(e) *color:* cinco naipes del mismo palo.

Por ej. $K\clubsuit$ $9\clubsuit$ $7\clubsuit$ $6\clubsuit$ $3\clubsuit$

(f) *full:* una terna y un par.
Por ej. $J\spadesuit$ $J\diamondsuit$ $J\heartsuit$ $9\clubsuit$ $9\spadesuit$

(g) *poker:* cuatro naipes del mismo valor y otro naipe.
Por ej. $J\spadesuit$ $J\diamondsuit$ $J\heartsuit$ $J\clubsuit$ $9\spadesuit$

(h) *escalera de color:* cinco naipes del mismo palo con valores consecutivos.
Por ej. $A\clubsuit$ $K\clubsuit$ $Q\clubsuit$ $J\clubsuit$ $10\clubsuit$ (a este ejemplo se lo llama *escalera real*).

Calcular las probabilidades de todas las manos de poker. Construir una tabla con los valores obtenidos. No olvidar la mano perdedora.

1.45 Se tienen dos monedas. Una moneda está cargada con probabilidad p_1 de salir cara y la otra con probabilidad p_2. Se puede optar por una de las siguientes estrategias: la primera consiste en elegir una moneda al azar y arrojarla dos veces; la segunda consiste en arrojar ambas monedas. El juego se gana si salen dos caras, en caso contrario se pierde. ¿Cuál de las dos estrategias es más conveniente?

1.46 Se tienen dos bolas. Cada una se pinta de rojo o de verde, independientemente y con probabilidad $1/2$ para cada color. Luego ambas son colocadas en una urna.

(**a**) Si se extrae una bola de la urna y es roja, ¿cuál es la probabilidad de que la otra bola sea roja?

(**b**) Si se sabe que en la urna hay una bola roja, ¿cuál es la probabilidad de que la otra sea roja?

1.47 Pedro vive en Corrientes al 3400. Una noche de sábado, después de tomar una copa de más con Juan en "La Giralda" (Corrientes 1453), trata de volver caminando por Corrientes a su casa, pero elige la dirección al azar, y como sabe que está borracho, en cada esquina vacila y vuelve a elegir la dirección al azar. En un rapto de lucidez, decide que si llega antes a Alem que al Abasto, se echará a dormir en La Recova.

(**a**) Hallar la probabilidad de que Pedro duerma en su cama. (*sugerencia*: comparar con **Ejercicio 1.22**)

(**b**) Validar por simulación el cálculo hecho en el inciso anterior.

1.48 En el contexto del **Ejercicio 1.8**:

(**a**) Hallar la probabilidad de que Juan gane la primera partida.

(**b**) Hallar la probabilidad de que Pedro gane la segunda partida.

(**c**) Hallar la probabilidad de que Pedro gane la duodécima partida.

(**d**) Hallar la probabilidad de que María haya ganado la primera partida sabiendo que ganó la cerveza.

(**e**) Hallar la probabilidad de que Juan haya ganado la cerveza sabiendo que el juego duró 25 partidos.

1.49 ☣ Capablanca y Lasker juegan un *match* de ajedrez a muerte súbita. Cada partida es ganada por Capablanca (con probabilidad p), por Lasker (con probabilidad q) o termina en tablas (empate). El *match* continúa hasta que alguno gane una partida. Si la partida debe jugarse (aun no hay ganador), el resultado es independiente de las anteriores y la distribución de probabilidades con que cada uno gana una partida no cambia.

(**a**) Hallar la probabilidad de que Capablanca gane el *match*.

(**b**) Dado que el *match* duró no más de 3 partidas, calcular la probabilidad de que Capablanca haya ganado la primera partida.

(**c**) Dado que el *match* duró no más de 3 partidas, calcular la probabilidad de que Capablanca sea el vencedor del *match*.

(**d**) Dado que Capablanca ganó el *match*, hallar la probabilidad de que lo haya hecho en la 3ª partida o antes.

(**e**) En cada uno de los siguientes casos, analizar la independencia de los eventos: *i)* "Capablanca gana el match" y "el *match* duró no más de k partidas", *ii)* "Capablanca ganó la partida j $(j < k)$" y "el *match* duró no más de k partidas".

1.50 ⌨ Mediante simulaciones, estimar el número medio de la cantidad de tiradas de un dado equilibrado hasta que la suma de los resultados supera 100.

1.51 ⌨ *Método de Monte Carlo.* Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua y no negativa. Sea $M > 0$ el valor máximo de la función f sobre el intervalo $[a, b]$.

(**a**) Se elige al azar un punto de coordenadas (X, Y) dentro del rectángulo de vértices $(a, 0), (b, 0), (b, M), (a, M)$. Relacionar la probabilidad del evento $A = \{Y \leqslant f(X)\}$ con el valor de la integral $\int_a^b f(x)dx$.

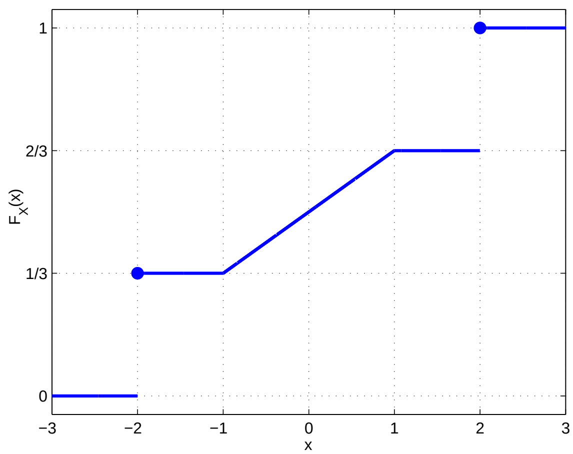
(**b**) Si se conoce el valor de la probabilidad, $\mathbf{P}(A)$, del evento $A = \{Y \leqslant f(X)\}$, ¿cómo se calcula la integral $\int_a^b f(x)dx$?

(**c**) Obtener un método que permita estimar el valor de la integral $\int_a^b f(x)dx$ en base a los resultados de n simulaciones del experimento descrito en **Inciso** (**a**).

(**d**) Estimar el valor de la integral $\int_0^2 e^{-x^2} dx$ utilizando el método obtenido en **Inciso** (**c**) basándose en los resultados de 10000 simulaciones.

Guía 2

2.1 Sea X una variable aleatoria cuya función de distribución $F_X(x) = \mathbf{P}(X \leqslant x)$ tiene gráfico de forma



(**a**) ¿En qué puntos de $\mathbb{R}$ la variable X concentra masa positiva?

(**b**) Calcular $\mathbf{P}(-2 < X \leqslant 2)$, $\mathbf{P}(-2 \leqslant X \leqslant 2)$, $\mathbf{P}(-2 \leqslant X < 2)$ y $\mathbf{P}(-2 < X < 2)$.

(**c**) Calcular $\mathbf{P}(X \in (-2,-1))$, $\mathbf{P}(|X| \leqslant 1)$ y $\mathbf{P}(X \in (1,2))$.

(**d**) Calcular $\mathbf{P}(X \leqslant 1.5 | X < 2)$ y $\mathbf{P}(X \leqslant 1.5 | X \leqslant 2)$.

(**e**) Calcular $\mathbf{P}(X = -2 | \, |X| = 2)$.

2.2 [*Maronna, pág. 56 y 57*] Para la variable aleatoria X con función de distribución $F_X(x) = \mathbf{P}(X \leqslant x)$ dada en el **Ejercicio 2.1** hacer lo siguiente:

(**a**) Para cada $\alpha \in \{1/5, 1/3, 3/5, 2/3\}$ hallar todos los valores $x_\alpha \in \mathbb{R}$ tales que

$$\mathbf{P}(X < x_\alpha) \leqslant \alpha \qquad \text{y} \qquad \mathbf{P}(X \leqslant x_\alpha) \geqslant \alpha.$$

(**b**) Para cada $\alpha \in (0,1)$ hallar todos los valores $x_\alpha \in \mathbb{R}$ tales que

$$F(x_\alpha) = \alpha.$$

(**c**) Calcular el primer cuartil, la mediana y el tercer cuartil.

2.3 Hallar una función h de manera que si U es una variable aleatoria con distribución uniforme sobre el intervalo $[0,1]$, $X = h(U)$ tiene la función de distribución dada en **Ejercicio 2.1**. Mediante simulaciones, estimar las probabilidades calculadas en dicho ejercicio. Simular la función de distribución empírica y comparar con la original.

2.4 Mostrar que cada una de las siguientes funciones son funciones de distribución de variables aleatorias.

(**a**)

$$F_X(x) = x^3\ \mathbf{1}\{0 \leqslant x < 1\} +\ \mathbf{1}\{1 \leqslant x\}.$$

(**b**)

$$F_X(x) = (1 - e^{-3x}\ \mathbf{1}\{x \leqslant 0\}.$$

2.5 Mostrar que existe una variable aleatoria X tal que su función de distribución es de la forma

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt.$$

(**a**) Consultar algún libro de Probabilidad y Estadística (o recurrir a un software adecuado) para construir una tabla de valores de $\Phi(x)$ para $x = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

(**b**) Hallar los cuantiles α para $\alpha = 0.5$; 0.75; 0.9; 0.95; 0.99; 0.995; 0.999.

2.6 Sea T la duración del tiempo de trabajo sin fallas de un sistema electrónico cuya función distribución de probabilidad es $F_T(t) = (1 - e^{-t})\ \mathbf{1}\{t > 0\}$.

(**a**) Hallar y graficar la función de distribución de $T^* = \text{mín}(T, 1)$.

(**b**) Calcular $\mathbf{P}(T^* = 1)$.

(**c**) Mediante simulaciones estimar $\mathbf{P}(T^* = 1)$.

2.7 Los siguientes datos son una muestra aleatoria de la duración en años de cierto tipo de baterías:

$$2.75,\ \ 0.40,\ \ 0.59,\ \ 0.59,\ \ 0.45,\ \ 0.36$$

Graficar la función de distribución empírica basada en esa muestra y estimar la probabilidad de que una batería de ese tipo tenga duración entre medio año y un año y medio.

2.8 La demanda de aceite pesado en cientos de litros durante una temporada tiene la siguiente función de densidad:

$$f_X(x) = \frac{1}{3}(4x + 1)\, \mathbf{1}\{0 \leqslant x \leqslant 1\}.$$

(**a**) Hallar la función de distribución de X.

(**b**) Calcular $\mathbf{P}\left(\frac{1}{3} < X \leqslant \frac{2}{3}\right)$ y $\mathbf{P}\left(\frac{1}{3} < X \leqslant \frac{2}{3} | X < \frac{1}{2}\right)$.

(**c**) Hallar el valor de k tal que $\mathbf{P}(X \leqslant k) = 0.04$.

(**d**) Simular 1000 valores de la variable aleatoria X. Graficar la función de distribución empírica y construir un histograma.

2.9 Los siguientes datos corresponden a los tamaños (en MB) de 10 archivos:

$$1.20,\ 1.27,\ 1.01,\ 1.85,\ 2.35, 2.04,\ 1.16,\ 1.09,\ 1.06,\ 1.84.$$

Usando los intervalos con extremos 1, 1.25, 1.75, 6.75, hallar la función histograma basada en la muestra observada e integrarla para estimar la probabilidad de que un archivo del mismo tipo tenga un tamaño menor que 1.5 MB.

2.10 En una urna hay 3 bolas blancas y 4 bolas negras.

(**a**) Se realizan 5 extracciones con reposición. Hallar y graficar la función de probabilidad de la cantidad de bolas blancas observadas.

(**b**) Se realizan 5 extracciones sin reposición. Hallar y graficar la función de probabilidad de la cantidad de bolas blancas observadas.

2.11 Se tiene una moneda cargada con probabilidad $p = 3/4$ de salir "cara".

(**a**) Hallar la función de probabilidad de la cantidad N de lanzamientos necesarios de dicha moneda hasta observar la primer cara.

(**b**) Calcular la probabilidad de que N sea impar.

2.12 Se arroja repetidas veces una moneda equilibrada. Llamamos N a la variable aleatoria "cantidad de tiradas hasta que por primera se obtiene cara en dos tiradas consecutivas".

(**a**) Mostrar que $\mathbf{P}(N = 1) = 0$, $\mathbf{P}(N = 2) = \frac{1}{4}$, $\mathbf{P}(N = 3) = \frac{1}{8}$.

(**b**) Sean los eventos A_1 ="salió ceca la primera tirada", A_2 ="salió cara la primera tirada y ceca la segunda", A_3 ="salieron cara las dos primeras tiradas". Mostrar que forman una partición, y por aplicación del teorema de probabilidades totales deducir que:

$$\mathbf{P}(N = n + 2) = \frac{1}{2}\,\mathbf{P}(N = n + 1) + \frac{1}{4}\,\mathbf{P}(N = n) \qquad \text{para } n \geqslant 1$$

y que $\mathbf{P}(N = 2|A_3) = 1$.

(**c**) Notando $p_n = \mathbf{P}(N = n), n \geqslant 1$ tenemos entonces: $p_1 = 0$, $p_2 = \frac{1}{4}$, $p_{n+2} = \frac{1}{2}p_{n+1} + \frac{1}{4}p_n, n \geqslant 1$. Resolviendo la ecuación en diferencias, hallar la expresión general de p_n. ¿Cuál es la relación de estas probabilidades con los números de Fibonacci?

(**d**) Calcular $\mathbf{P}(N > 10)$.

2.13 Se quiebra una vara en un punto al azar. Calcular la probabilidad de que la longitud de la pieza más larga sea mayor que el doble de la longitud de la pieza más corta.

2.14 El diámetro X (en mm.) de las arandelas fabricadas por una máquina tiene como función de densidad a

$$f_X(x) = \frac{x}{200}\,\mathbf{1}\{0 < x < 20\}.$$

Un sistema de control descarta las arandelas cuyo diámetro es inferior a 3 o superior a 17.

(**a**) Hallar la densidad del diámetro de las arandelas no descartadas.

(**b**) Hallar la densidad del diámetro de las arandelas descartadas.

2.15 Sea X, la distancia (en decímetros) del punto de impacto al centro de un blanco circular, una variable aleatoria continua con función de densidad

$$f_X(x) = \frac{2}{7}\,\mathbf{1}\{0 \leqslant x < 2\} + \frac{10 - 2x}{21}\,\mathbf{1}\{2 \leqslant x < 5\}.$$

(**a**) Hallar la función de densidad de las distancias de impacto menores que 30 cm.

(**b**) Hallar la función de densidad de las distancias de impacto mayores que 30 cm.

2.16 Sea T el tiempo hasta que ocurre la primera falla en un producto industrial, con función intensidad de fallas $\lambda(t)$ de la forma

$$\lambda(t) = \frac{\beta}{\alpha}\left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\beta-1} \mathbf{1}\{t > 0\},$$

donde $\alpha, \beta > 0$.

(**a**) Hallar la función de distribución y la función densidad de T.

(**b**) Si $\beta < 1$ se dice que el producto tiene *fallas tempranas*, si $\beta = 1$ se dice que tiene *fallas casuales o con falta de memoria*, y si $\beta > 1$ se dice que tiene *fallas por desgaste*. Indicar en cuál de estas tres categorías clasificaría usted a los siguientes productos según su modo de falla

- Producto: un neumático; T: tiempo hasta una pinchadura causada por objetos punzantes en las calles.
- Producto: un neumático; T: tiempo hasta que se desgasta el surco y pierde agarre.
- Producto: un neumático; T: tiempo hasta que revienta como consecuencia de una falla de fábrica.
- Producto: un heladera; T: tiempo hasta que el usuario se da cuenta que salió fallada de fábrica.
- Producto: un heladera; T: tiempo hasta que falla el sistema de enfriamiento.
- Producto: un heladera; T: tiempo hasta que el motor se quema por un brusco cambio de tensión.

(**c**) Comparar e interpretar probabilísticamente los gráficos de las densidades que se obtienen cuando $\alpha = 1$ y $\beta = 0.5, 1, 1.5$.

(**d**) Para cada caso del **Inciso** (**c**), calcular $\mathbf{P}(T > 1)$ y $\mathbf{P}(T > 4|T > 3)$.

(**e**) Para cada caso del **Inciso** (**c**), simular 1000 valores de la variable aleatoria T. Graficar la función de distribución empírica y construir un histograma.

2.17 Sea T el tiempo (en días) hasta que ocurre la primera falla en un producto industrial. La función de distribución de T es de la forma

$$F_T(t) = 1 - e^{-(t/\alpha)^{\beta}}, \quad t > 0,$$

donde $\alpha = 60$ y $\beta = 0.5$. El producto tiene una garantía de 30 días. Debido a la gran cantidad de reclamos se decidió someter todos los productos a una prueba de 30 días y descartar los que fallan. Hallar la proporción entre los productos no descartados de los que fallarán antes de los 30 días.

2.18 Sea T la duración en horas del tiempo de trabajo sin fallas de un sistema con función intensidad de fallas $\lambda(t)$. Calcular $\mathbf{P}(T > 4)$ y $\mathbf{P}(T > 12|T > 8)$, cuando $\lambda(t)$ está descrita por

(**a**) $\lambda(t) = \frac{1}{8}\,\mathbf{1}\{t > 0\}$.

(**b**) $\lambda(t) = \frac{t}{8}\,\mathbf{1}\{t > 0\}$.

(**c**) En cada caso, determinar si hay *pérdida de memoria*.

2.19 Una urna contiene 3 bolas blancas, 2 rojas y 3 negras.

(**a**) Se seleccionan 4 bolas al azar (sin reposición). Sean X la cantidad de bolas blancas observadas e Y la cantidad de bolas rojas observadas. Hallar la función de probabilidad conjunta y las funciones de probabilidad marginales. ¿Cuál es la probabilidad de que la cantidad total de bolas blancas y rojas observadas no supere a 2?

(**b**) Repetir el inciso anterior para extracciones con reposición.

2.20 Sea (X, Y) un punto uniformemente distribuido sobre el semicírculo superior de radio 1 centrado en el origen $\Lambda = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leqslant 1,\, y \geqslant 0\}$.

(**a**) Calcular $\mathbf{P}(|X| < Y)$.

(**b**) Hallar las densidades marginales de X y de Y.

(**c**) ¿X e Y son variables aleatorias independientes?

2.21 Sean X e Y dos variables aleatorias con función de densidad conjunta

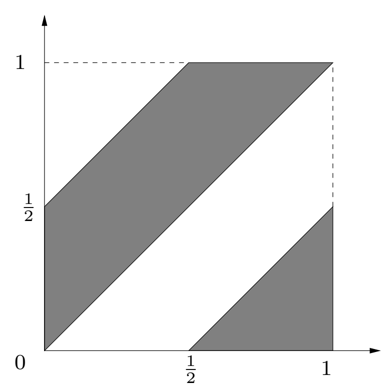
$$f_{X,Y}(x, y) = kxy\, \mathbf{1}\{0 \leqslant x \leqslant y \leqslant 1\}.$$

(**a**) Calcular $\mathbf{P}(X + 1 > 2Y)$.

(**b**) Hallar las densidades marginales de X y de Y.

(**c**) ¿X e Y son variables aleatorias independientes?

2.22 Sea (X, Y) un punto aleatorio con distribución uniforme sobre el recinto que aparece en la figura



(**a**) Hallar las densidades marginales de X e Y.

(**b**) Hallar la densidad de $X + Y$.

2.23 Para ir todos los días al trabajo, Dana se dirige en auto hasta la estación de tren y luego sigue su camino en tren. Dana sale de su casa en un intervalo distribuido uniformemente entre las 7:30 y las 7:50. El tiempo de viaje hasta la estación es también uniforme entre 20 y 40 minutos. Hay un tren que sale a las 8:12 y otro que sale a las 8:26.

(**a**) ¿Cuál es la probabilidad de que Dana pierda ambos trenes?

(**b**) ¿Cuál es la probabilidad de que tenga que esperar más de 8 minutos en la estación hasta que sale el tren?

(**c**) Si se sabe que salió de su casa después de las 7:38 y que no llegó a tomar el tren de las 8:12, ¿cuál es la probabilidad de que haya llegado al otro tren?

(**d**) Si se sabe que salió de su casa después de las 7:38 y que logró tomar el tren de las 8:26, hallar y graficar la función densidad del tiempo de viaje hasta la estación.

Ejercicios Complementarios

2.24 Sea X una variable aleatoria cuya función de densidad está descrita por:

$$f_X(x) = \frac{2\theta x + 1}{2}\mathbf{1}\{-1 \leqslant x \leqslant 1\}.$$

(**a**) Describir los posibles valores de θ para que la densidad esté bien definida.

(**b**) En cada uno de los siguientes casos hallar la mediana de X: $\theta = -1/2$, $\theta = 0$, $\theta = 1/4$.

(**c**) Hallar la mediana de X como función de θ para los valores de θ obtenidos en **Inciso** (**a**).

(**d**) Calcular $\mathbf{P}(X < 1)$, $\mathbf{P}(0 < X \leqslant 1)$ y $\mathbf{P}(X < 0 | -1/2 < X < 1/2)$.

2.25 [*ver* **Ejercicio 2.16**] Sea $t_0 > 0$. Mostrar que si $\lambda(t)$ es la función de intensidad de fallas de la variable aleatoria positiva T, la variable aleatoria $\tilde{T} = (T|T > t_0) - t_0$ tendrá una función de intensidad de fallas $\tilde{\lambda}(t) = \lambda(t + t_0)$, para $t > 0$.

2.26 [*ver* **Ejercicio 2.16**] La cantidad de llamadas que llegan a un *call center* en una hora es una variable aleatoria N. Calcular la función de probabilidad de la cantidad de llamadas recibidas si se sabe que llegaron al menos 2 llamadas, cuando N está descrita según

(**a**) $p_N(n) = 0.35 \cdot 0.65^n$, $n = 0, 1, \dots$

(**b**) $p_N(n) = 1.25^n e^{-1.25}/n!$, $n = 0, 1, \dots$

(**c**) En cada caso, determinar si hay *pérdida de memoria.*

2.27 Se realiza repetidas veces un experimento, en forma independiente una de la otra. Cada vez que se realiza cierto evento B puede suceder, con probabilidad p, o no, con probabilidad $1 - p$. Notaremos B_n al evento "sucedió B en la n-ésima realización del experimento".

Llamamos N a la variable aleatoria "cantidad de realizaciones del experimento hasta que por primera vez B sucede en dos realizaciones consecutivas".

(**a**) Mostrar que $\mathbf{P}(N = 1) = 0, \mathbf{P}(N = 2) = p^2, \mathbf{P}(N = 3) = (1 - p)p^2$.

(**b**) Sean los eventos $A_1 = \bar{B}_1$, $A_2 = B_1 \cap \bar{B}_2$, $A_3 = \bar{B}_1 \cap \bar{B}_2$. Mostrar que forman una partición, y por aplicación del teorema de probabilidades totales deducir que:

$$\mathbf{P}(N = n+2) = \mathbf{P}(N = n+1)\mathbf{P}(A_1) + \mathbf{P}(N = n)\mathbf{P}(A_2) \text{ para } n \geqslant 1$$

y que $\mathbf{P}(N = 2|A_3) = 1$.

(**c**) Notando $p_n = \mathbf{P}(N = n), n \geqslant 1$ tenemos entonces: $p_1 = 0$, $p_2 = p^2$, $p_{n+2} = (1-p)p_{n+1} + (1-p)pp_n, n \geqslant 1$. Resolviendo la ecuación en diferencias, hallar la expresión general de p_n.

2.28 Sean X e Y variables aleatorias independientes con distribución uniforme sobre el intervalo $[0, 1]$. Una vara de longitud 1 se quiebra en dos puntos cuyas distancias a una de sus puntas son X e Y. Calcular la probabilidad que las tres piezas puedan usarse para construir un triángulo.

2.29 Sea (X, Y) un vector aleatorio con función de densidad conjunta

$$f_{X,Y}(x, y) = kx(x - y)\,\mathbf{1}\{0 < x < 2, |y| < x\}.$$

(**a**) Hallar las densidades marginales de X y de Y.

(**b**) ¿X e Y son variables aleatorias independientes?

2.30 De un mazo de naipes de Poker se extraen repetidamente cartas con reposición. Sean X e Y los números de extracciones en que salen el primer corazón y el primer trébol.

(**a**) ¿X e Y, son variables aleatorias independientes?

(**b**) Hallar las distribuciones marginales de X e Y.

(**c**) Hallar la función de probabilidad conjunta de (X, Y).

2.31 Se arrojan dos dados piramidales equilibrados con los números $1, 2, 3, 4$ en sus caras. Sea X el mayor de los resultados observados e Y la suma. Hallar la distribución conjunta de (X, Y) y las distribuciones marginales de X e Y. ¿X e Y son independientes?

2.32 [*ver* **Ejercicio 1.28**] Sean X_1 y X_2 variables aleatorias con distribución Bernoulli. Para $i = 1, 2$ sea $A_i = \{X_i = 1\}$. Mostrar que si los eventos A_1 y A_2 son independientes, entonces la variables aleatorias X_1 y X_2 son independientes.

2.33 En una urna hay 3 bolas de distinto color. El experimento aleatorio consiste en lo siguiente: se extrae una bola, se registra el color observado y se repone la bola en la urna. Se realizan 3 experimentos. Sean X_i, $i = 1, 2, 3$ las variables aleatorias definidas por

$$X_i = \mathbf{1}\{\text{ si el color } i \text{ está en la muestra observada}\}.$$

(**a**) Hallar la función de probabilidad conjunta de las variables X_1 y X_2 y las funciones de probabilidad marginales.

(**b**) ¿X_1 y X_2 son independientes?

(**c**) ¿Cuál es el significado de la variable $N = X_1 + X_2 + X_3$?

(**d**) Hallar la función de probabilidad conjunta de las variables X_1 y N.

(**e**) ¿X_1 y N son independientes?

2.34 ☣ Sea $U = 0.X_1X_2X_3\dots$ el desarrollo decimal de un número al azar sobre el intervalo $(0, 1]$.

(**a**) Para cada $i = 1, 2, \dots,$ hallar la distribución del i-ésimo dígito de U.

(**b**) Mostrar que los dígitos de U son independientes entre sí.

Guía 3

3.1 Sea X un variable aleatoria con rango $\{x_1, x_2, x_3\}$, tal que $\mathbf{P}(X = x_i) = p_i$, $i = 1, 2, 3$.

(**a**) Si $x_1 = -1, x_2 = 1, x_3 = 2$ y $p_1 = 0.2, p_2 = 0.3, p_3 = 0.5$, hallar $\mathbf{E}[X]$.

(**b**) Si $x_1 = -1, x_2 = 1$ y $p_1 = 0.2, p_2 = 0.2$, y se sabe que $\mathbf{E}[X] = 0$, hallar p_3 y x_3.

(**c**) Hallar $\mathbf{E}[X|X > -1]$ con los datos del **Inciso** (**a**).

(**d**) Si se sabe que $x_1 = -1$, $p_1 = 0.2$, $\mathbf{P}(X > -1) = 0.8$, y $\mathbf{E}[X|X > -1] = 3$, hallar $\mathbf{E}[X]$.

3.2 Sea X un variable aleatoria con función de densidad $f_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(**a**) Si $f_X(x) = 2x\ \mathbf{1}\{x \in (0,1)\}$, hallar $\mathbf{E}[X]$.

(**b**) Si $f_X(x) \propto \frac{1}{(x+1)^3}\ \mathbf{1}\{x > 0\}$, hallar $\mathbf{E}[X]$.

(**c**) Hallar $\mathbf{E}[X|X > 1/2]$ con los datos del **Inciso** (**a**).

(**d**) Si $\mathbf{E}[X|X < 7] = 4$, $\mathbf{P}(X < 7) = 0.2$, $\mathbf{E}[X|X > 7] = 8$, hallar $\mathbf{E}[X]$.

3.3 STOP Sea X un variable aleatoria con función de distribución $F_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(**a**) Si $F_X(x) = \frac{x^2}{3}\ \mathbf{1}\{0 \leqslant x < 1\} + \frac{x+1}{3}\ \mathbf{1}\{1 \leqslant x < 2\} + \mathbf{1}\{x \geqslant 2\}$, hallar $\mathbf{E}[X]$.

(**b**) Con los mismos datos del **Inciso** (**a**), hallar $\mathbf{E}[X|X < 1]$ y $\mathbf{E}[X|X \leqslant 1]$.

(**c**) Con los mismos datos del **Inciso** (**a**), ¿es $X|X > 1$ una variable aleatoria continua? En tal caso, hallar su función de densidad.

3.4 STOP Sea X una variable normal estándar, φ su función de densidad (ver **Ejercicio 2.5**), y sea $x_0 > 0$.

(**a**) Hallar la media de $X|X > x_0$ (en función de x_0).

(**b**) Deducir que $1 - \Phi(x_0) \leqslant \frac{\varphi(x_0)}{x_0}$.

(**c**) Comparar la estimación que brinda el inciso anterior para $\mathbf{P}(X > 4)$ con el valor tabulado.

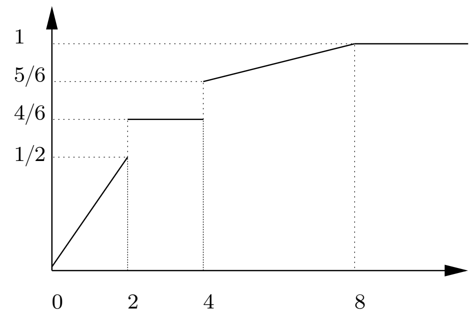
(**d**) Si $Y = \sigma X + \mu$ y $y_0 > \mu$, hallar la media de $Y|Y > y_0$ (en función de y_0, μ y σ).

3.5 STOP [ver **Ejercicio 2.12**] Se arroja repetidas veces una moneda equilibrada. Llamamos N a la variable aleatoria "cantidad de tiradas hasta que por primera se obtiene cara en dos tiradas consecutivas". Calcular $\mathbf{E}[N]$.

3.6 Sea X una variable aleatoria con distribución uniforme sobre el intervalo $(0, 1)$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ calcular $\mathbf{E}[X^n]$ y $\mathbf{var}[X^n]$.

3.7 Sea T^* la variable aleatoria definida en **Ejercicio 2.6**. Calcular $\mathbf{E}[T^*]$ y $\mathbf{var}[T^*]$.

3.8 Sea X una variable aleatoria X cuya función de distribución $F_X(x) = \mathbf{P}(X \leqslant x)$ tiene el siguiente gráfico:



(**a**) Calcular $\mathbf{E}[cos(\pi X)]$.

(**b**) Calcular $\mathbf{E}[X^2|X \geqslant 2]$.

(**c**) Calcular $\mathbf{var}(X)$.

3.9 ☣ El precio de uso de un teléfono público es de 20 centavos por pulso. Los pulsos se cuentan cada dos minutos o fracción. Suponga que las llamadas tienen duración exponencial de media 3 minutos. Hallar la media y la varianza del costo de cada llamada.

3.10 Sea X una variable aleatoria a valores en $\{1, 2, 3\}$ tal que $\mathbf{P}(X = i) = p_i$, $i \in \{1, 2, 3\}$, de media 2.

(**a**) Hallar p_1, p_2, p_3 para que $\mathbf{var}[X]$ sea la máxima posible.

(**b**) Hallar p_1, p_2, p_3 para que $\mathbf{var}[X]$ sea la mínima posible.

3.11 STOP Sea X una variable aleatoria de media 2 y varianza 9.

(**a**) Calcular la media y la varianza de $Y = 2(X - 1)$.

(**b**) Calcular la media de $Y = 2X^2 + 1$.

(**c**) Calcular la media de $Y = 2(X - 1)(X - 3)$.

(**d**) Hallar $\text{mín}_{c \in \mathbb{R}} \mathbf{E}[(X - c)^2]$.

(**e**) Hallar a y b tales que $aX + b$ tenga media 0 y desvío 1.

3.12 Sean X e Y variables aleatorias independientes con distribución uniforme sobre $(0, 2)$ y $(1, 3)$, respectivamente. Si $h(x, y) = x\,\mathbf{1}\{x > 1.5\} + (x^2 - y)\,\mathbf{1}\{x \leqslant 1.5\}$, hallar la media de $Z = h(X, Y)$.

3.13 STOP[*ver* **Ejercicio 2.33**] Se colocan 3 bolas en 3 urnas c_1, c_2, c_3 eligiendo al azar, para cada bola, la urna en que se coloca. Sea X_i la cantidad de bolas en c_i y sea N la cantidad de urnas que contienen alguna bola.

(**a**) Calcular $\mathbf{E}[N]$, $\mathbf{var}[N]$ y $\mathbf{cov}(N, X_1)$.

(**b**) Mostrar que N y X_1 no son independientes.

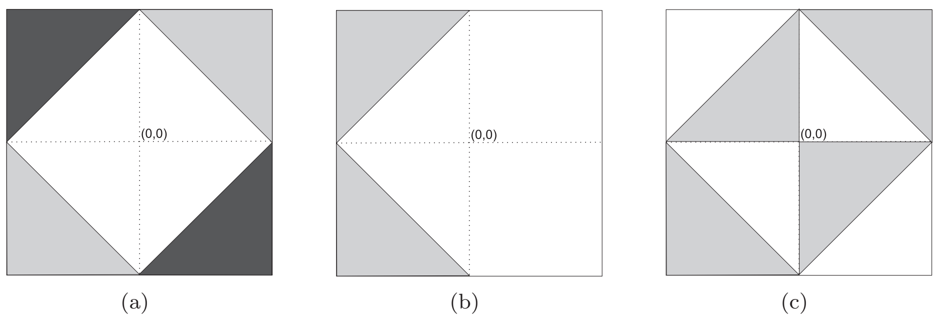
(**c**) Calcular $\mathbf{cov}(X_i, X_j)$, $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant 3$.

3.14 [*ver* **Ejercicio 2.32**] Sean X_1 y X_2 variables de Bernoulli, de parámetros p_1 y p_2.

(**a**) Mostrar que si $\mathbf{cov}(X_1, X_2) = 0$, entonces X_1 y X_2 son independientes.

(**b**) Si $p_1 = p_2 = 0.7$ y $\mathbf{cov}(X_1, X_2) = 0.1$, hallar $\rho(Y_1, Y_2)$, siendo $Y_1 = X_1(1 - X_2)$, $Y_2 = X_2(1 - X_1)$.

3.15 En cada uno de los casos que se ilustran en las siguientes figuras se define una distribución conjunta para las variables X e Y.



(a) La densidad vale 1 en la región blanca, 1/2 en la región gris clara y 3/2 en la región gris oscura. (b) y (c) La distribución es uniforme en la región grisada.

Hallar en cada caso el signo de la covarianza *sin escribir cuentas*.

3.16 Sea (X, Y) una variable aleatoria bidimensional, uniforme en el triángulo de vértices $(0, 0), (2, 2), (0, 2)$.

(**a**) Calcular $\mathbf{cov}(X, Y)$.

(**b**) Calcular $\mathbf{var}[X + Y]$

(**c**) Calcular $\mathbf{cov}(3X - Y + 2, X + Y)$.

3.17 A y B hacen una prueba para comparar sus reflejos. Cada uno tiene un pulsador y, cuando una luz se enciende, el que presiona primero gana el duelo. Los tiempos de reacción de cada uno son variables aleatorias $U(0, 1)$ (en segundos), y son i.i.d. Sean las variables W: "tiempo de reacción del ganador" y Z: "tiempo de reacción del perdedor".

(**a**) Hallar la esperanza y varianza de Z y W.

(**b**) Hallar el tiempo medio de reacción del ganador si se sabe que el perdedor reaccionó en más de 1/2 segundo.

(**c**) Hallar la covarianza entre W y Z.

3.18 Sea X una variable aleatoria positiva de media 15. Demostrar que $\mathbf{P}(X \geqslant 60 \leqslant 0.25$.

3.19 Sea X una variable aleatoria de media 10 y varianza 15. Demostrar que $\mathbf{P}(5 < X < 15) \geqslant 0.4$.

3.20 Sea X una variable aleatoria, $\mu_X = 2, \sigma_X^2 = 9$. Sea $X_1, X_2, \ldots$ una secuencia independiente de réplicas de X, y definamos, para $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{m=1}^{n} X_m$.

(**a**) Hallar $\mathbf{E}[S_n]$ y $\mathbf{var}[S_n]$.

(**b**) Hallar un n_0 tal que si $n > n_0$ se verifica que $\mathbf{P}(S_n > 0) > 0.9$.

(**c**) Hallar un n_0 tal que si $n > n_0$ se verifica que $\mathbf{P}\left(\left|\frac{1}{n}S_n - 2\right| > 0.1\right) \leqslant 0.01$.

Ejercicios Complementarios

3.21 Sea X una variable aleatoria con la función densidad del **Ejercicio 2.24**. Hallar $\mathbf{E}[X]$ y compararla con la mediana.

3.22 La Gorda (80 kg.) y El Flaco (60 kg.) quieren poner un subibaja en su jardín. Tienen un tablón de tres metros, pero no se deciden acerca de en que punto apoyarlo para que resulte equilibrado cuando ambos se sientan, y ya se han golpeado bastante haciendo pruebas. ¿Podría ayudarlos?

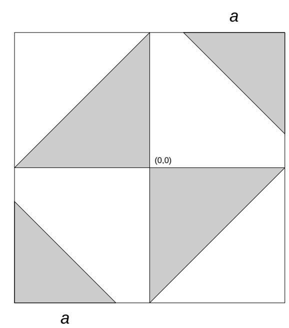
3.23 Se construye un círculo uniendo los extremos de un alambre.

(**a**) Si la longitud del alambre fuese una variable aleatoria L con distribución exponencial de media 60 cm., cuánto valdría $\mathbf{E}[A]$, siendo A el área del círculo obtenido.

(**b**) Si el área (en cm^2) del círculo obtenido fuese una variable aleatoria A con distribución uniforme sobre el intervalo $[0, 30]$, cuánto valdría $\mathbf{E}[L]$, siendo L el perímetro del círculo obtenido.

3.24 Sean X e Y dos variables aleatorias discretas cuya función de probabilidad conjunta $p_{X,Y}(x, y)$ se define por: $p_{X,Y}(-2, -8) = p_{X,Y}(-1, -1) = p_{X,Y}(0, 0) = p_{X,Y}(1, 1) = p_{X,Y}(2, 8) = 1/5$. Sin calcularla, indicar, justificando la respuesta, cuál es el signo de la covarianza entre X e Y.

3.25 La figura representa un cuadrado de lado 2. La variable aleatoria (X, Y) es uniforme en la región sombreada. Mostrar, calculando la covarianza en función de a, que existe un único $a \in (0, 1)$ tal que $\mathbf{cov}(X, Y) = 0$.



3.26 Sea B una variable de Bernoulli con parámetro $p = 0.01$.

(**a**) Si $B_1, \ldots, B_{100}$ son $n = 100$ réplicas independientes de B y $\bar{B} = \frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n} B_m$ es su promedio. Estimar por simulación $\mathbf{P}(|\bar{B} - p| < 0.03)$ y $\mathbf{P}(|\bar{B} - p| < 0.01)$.

(**b**) Lo mismo del inciso anterior pero con $n = 10000$.

3.27 Sea X una variable aleatoria, $\mu_X = \mu, \sigma_X^2 = \sigma^2$. Sea $X_1, X_2, \ldots$ una secuencia independiente de réplicas de X, y se definen

$$\begin{aligned} \bar{X} &= \frac{\sum_{m=1}^{n} X_m}{n} \\ W^2 &= \frac{\sum_{m=1}^{n}(X_m - \mu)^2}{n} \\ T^2 &= \frac{\sum_{m=1}^{n}(X_m - \bar{X})^2}{n} \end{aligned}$$

(**a**) Hallar $\mathbf{E}\left[\bar{X}\right]$ y $\mathbf{var}\left[\bar{X}\right]$, en función de μ y σ^2.

(**b**) Hallar $\mathbf{E}\left[W^2\right]$, en función de μ y σ^2.

(**c**) Mostrar que $T^2 = W^2 - (\bar{X} - \mu)^2$.

(**d**) Usar los incisos anteriores para mostrar que $\mathbf{E}\left[S^2\right] = \sigma^2$, donde $S^2 = \frac{n}{n-1}T^2$.

3.28 Sea X una variable aleatoria que representa la relación de níquel al resto de los metales en una aleación. Los siguientes datos corresponden a 18 muestras de una aleación: 1.75, 1.80, 1.29, 1.58, 0.95, 1.87, 1.99, 1.49, 1.12, 0.39, 1.62, 1.41, 1.35, 0.83, 0.71, 0.51, 1.19, 1.95.

(**a**) Calcular $\bar{X}$ y S^2 (ver **Ejercicio 3.27**).

(**b**) Según una publicación, la concentración de níquel en dicha aleación puede ser modelada a través de la distribución $f_X(x) = x/2\ \mathbf{1}\{0 < x < 2\}$. Comparar los resultados obtenidos en **Inciso** (**a**) con los valores teóricos de media y varianza asociados al modelo propuesto.

(**c**) Construir un histograma y explorar informalmente si el modelo propuesto podría considerarse correcto.

3.29 Sea X la duración (en horas) del tiempo de trabajo sin fallas de un sistema mecánico con función intensidad de fallas de la forma $\lambda(x) = x^{-1/2}\,\mathbf{1}\{x > 0\}$. Simular 100 valores $X_1, \dots, X_{100}$ de X y calcular $\bar{X}$ y S^2 (ver **Ejercicio 3.27**). Comparar con $\mathbf{E}[X]$ y $\mathbf{var}[X]$.

3.30 Sea (X, Y) una variable aleatoria bidimensional, tal que X e Y tienen media y varianza finitas, y sea $c = \mathbf{cov}(X, Y)$.

(**a**) Si $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$ son n réplicas independientes de (X, Y) y definimos

$$
\begin{aligned}
A &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mathbf{E}[X])(Y_i - \mathbf{E}[Y]) \\
B &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})
\end{aligned}
$$

(**b**) Hallar (en términos de c) $\mathbf{E}[A]$.

(**c**) Mostrar que $B = A - (\bar{X} - \mathbf{E}[X])(\bar{Y} - \mathbf{E}[Y])$

(**d**) Hallar (en términos de c) $\mathbf{cov}(\bar{X}, \bar{Y})$.

(**e**) Usando los incisos anteriores, hallar (en términos de c) $\mathbf{E}[B]$.

3.31 Se considera un sistema mecánico como el del **Ejercicio 3.29**. Cada vez que ocurre una falla el sistema se repara y sigue funcionando hasta que ocurre la siguiente falla. Se consideran variables aleatorias $N[a, b]$ que cuentan la cantidad de fallas sufridas por el sistema durante el intervalo de tiempo comprendido entre a y b. Simular 100 parejas de valores $(N_1[0, 3], N_1[2, 5]), \dots (N_{100}[0, 3], N_{100}[2, 5])$ de $(N[0, 3], N[2, 5])$ y calcular B (ver **Ejercicio 3.30**).

3.32 Sea $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$, donde las X_i son un conjunto de variables i.i.d. Sea S_n^* su correspondiente variable estandarizada. En cada uno de los siguientes casos, simular 100000 valores de S_n^*; computar y graficar la función de distribución empírica. Comparar la gráfica obtenida con la de la función de distribución de una variable $N(0, 1)$.

(**a**) X_i es uniforme entre 0 y 1. Analizar los casos de $n = 2, 5, 12$.

(**b**) X_i es Bernoulli de parámetro $p = 1/2$. Analizar los casos de $n = 10, 30$.

(**c**) X_i es Bernoulli de parámetro $p = 0.001$. Analizar los casos de $n = 30, 100, 500$.

(**d**) X_i es geométrica de parámetro $p = 0.001$. Analizar los casos de $n = 30, 100, 500$.

(**e**) X_i es exponencial de parámetro $\lambda = 1$. Analizar los casos de $n = 10, 30, 100$.

(**f**) X_i es Poisson de parámetro $\mu = 0.01$. Analizar los casos de $n = 30, 100, 500$.

(**g**) X_i es Poisson de parámetro $\mu = 1$. Analizar los casos de $n = 1, 5$ (comparar con el inciso anterior).

3.33 Dado un vector $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, consideramos $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$. Notamos e al vector de $\mathbb{R}^n$ cuyas coordenadas son todas 1.

(**a**) Mostrar que $(x - \bar{x}e) \perp e$. ¿Qué relación geométrica hay entre x y $\bar{x}e$?

(**b**) Dada cualquier constante c, $x - ce = (x - \bar{x}e) + (\bar{x} - c)e$. Mostrar que la relación del **Ejercicio 3.27 Inciso** (**c**) es consecuencia del teorema de Pitágoras.

(**c**) ¿Cuál es la relación con el teorema de Steiner acerca del cambio paralelo de eje en el momento de inercia?

(**d**) Deducir usando propiedades del producto escalar en $\mathbb{R}^n$, la relación del **Ejercicio 3.30 Inciso** (**c**).

Guía 4

4.1 Sea X una variable aleatoria con densidad $f_X(x) = \frac{1}{9}(x+1)^2\,\mathbf{1}\{-1 \leqslant x \leqslant 2\}$. En cada uno de los siguientes casos hallar y graficar:

(**a**) la densidad de $Y = aX + b$ ($a \neq 0$, $b \in \mathbb{R}$),

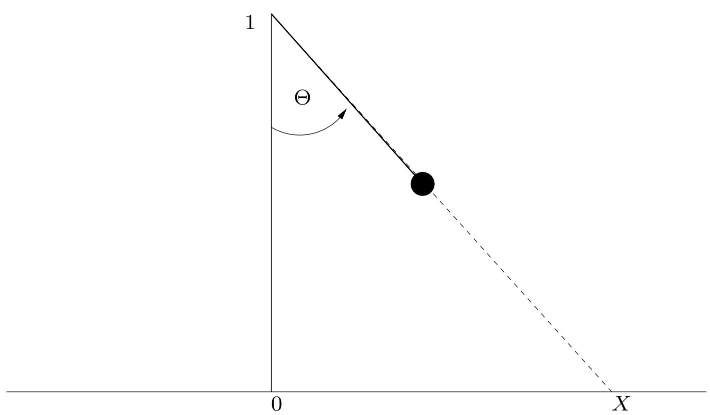
(**b**) la densidad de $Y = -X^3$,

(**c**) la densidad de $Y = -X^2 + X + 2$,

(**d**) la densidad de $Y = X^2$,

(**e**) la función de distribución de $Y = X\,\mathbf{1}\{-1 \leqslant X < 1\} + \mathbf{1}\{1 \leqslant X\}$.

4.2 Sea Θ el ángulo de un péndulo medido desde la vertical cuyo extremo superior se encuentra sostenido del punto $(0, 1)$. Sea $(X, 0)$ el punto de intersección de la recta que contiene al péndulo y el eje x. Hallar la función densidad de X cuando Θ es una variable aleatoria con distribución uniforme sobre el intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$.



4.3 Sea ϕ la fase de un generador eléctrico, la cual varía aleatoriamente según una distribución $U(-\pi, \pi)$. Se define el factor de potencia del generador como $C = \cos\phi$.

(**a**) Hallar la función de densidad de C (recordar que $\arccos(x)' = -1/\sqrt{1-x^2}$).

(**b**) Calcular $\mathbf{P}(|C| < 0.5)$.

4.4 Sea X una variable aleatoria con densidad $f_X(x) = \frac{1}{2}\,e^{-|x|}$, $x \in \mathbb{R}$. Hallar la función densidad de $Y = \operatorname{sen} X$.

4.5 Un voltaje aleatorio V_1 –medido en voltios– con distribución uniforme sobre el intervalo $[180, 220]$ pasa por un limitador no lineal de la forma

$$g(v_1) = \frac{v_1 - 190}{20}\,\mathbf{1}\{190 \leqslant v_1 \leqslant 210\} + \mathbf{1}\{210 < v_1\}.$$

Hallar la función de distribución del voltaje de salida $V_2 = g(V_1)$.

4.6 [*ver* **Ejercicio 3.9**] Sea T la duración de una llamada telefónica (en minutos), con función de densidad $f_T(t) = \lambda e^{-\lambda t}\,\mathbf{1}\{t > 0\}$, para cierto $\lambda > 0$. Si se factura un pulso por minuto o fracción, hallar la función de probabilidad de la cantidad de pulsos facturados por llamada (la misma puede quedar en forma paramétrica, dependiendo del valor de λ.)

4.7 Se desea generar muestras de una variable aleatoria con distribución uniforme sobre el intervalo $[0, 1]$. Para ello se dispone de un radioisótopo que emite partículas alpha cada tiempos exponenciales de intensidad 2 por hora. ¿Cómo deben transformarse los tiempos entre emisiones de partículas alpha para generar las muestras deseadas? Generar una muestra de tamaño 3 usando que a partir de las 0:00 el radioisótopo emitió particulas alpha a las 0:15, 1:21, y 1:45.

4.8 Un fabricante de caños posee una máquina que produce piezas de longitud aleatoria X (en metros) con densidad $f_X(x) = e^{-x}\,\mathbf{1}\{x \geqslant 0\}$. Un cliente está dispuesto a pagar una gran suma de dinero por 100000 caños, pero impone como condición que la longitud Y (en metros) de los mismos debe estar distribuida de acuerdo con la densidad $f_Y(y) = 3\,\mathbf{1}\{0 \leqslant y \leqslant 1/4\} + 1/3\,\mathbf{1}\{1/4 < y < 1\}$. El costo que supondría apagar la máquina, recalibrarla, hacer los 100000 caños, y luego volverla al estado original, es excesivo. Sin embargo, justo cuando estaba por rechazar el trabajo, uno de sus empleados le dice: "Podemos hacerlo. Sólo consiga una máquina de precisión para cortar 100000 caños de la producción original". Así lo hicieron y el jefe le dijo al empleado: "Todavía no entiendo cómo hiciste para satisfacer las especificaciones del cliente". Hallar la función utilizada por el empleado para cortar los caños.

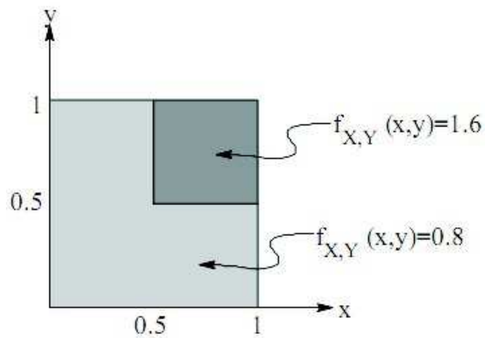
4.9 Todas las mañanas Lucas llega a la estación del subte entre las 7:10 y las 7:30 (con distribución uniforme en dicho intervalo). El subte llega a la estación cada quince minutos comenzando a las 6:00. ¿Cuál es la densidad de probabilidades del tiempo que tiene que esperar Lucas hasta subirse al subte?

4.10 Suponga que tiene dos números reales X_1 y X_2 que deben ser sumados por una computadora digital. Como la máquina tiene precisión finita representa los números redondeados como Y_1 y Y_2. Luego, cada número tiene un error $U_i = X_i - Y_i$. Si las U_i son independientes y uniformes sobre el intervalo $(-1/2, 1/2)$, hallar la función de densidad del error generado al sumar $X_1 + X_2$.

4.11 Se tienen dos variables aleatorias independientes X e Y cuyas funciones de densidad son $f_X(x) = 3x^2\,\mathbf{1}\{0 < x < 1\}$ y $f_Y(y) = \mathbf{1}\{1 < y < 2\}$. Hallar la función de densidad de la variable $Z = X/Y$.

4.12 Una varilla de 2 metros de longitud es sometida a un proceso de división aleatoria. En la primera fase se elige un punto al azar de la misma y se la divide por el punto elegido en dos varillas de longitudes X_1 y X_2. En la segunda fase se elige un punto al azar de la varilla de longitud X_1 y se la divide por el punto elegido en dos varillas de longitudes $X_{1,1}$ y $X_{1,2}$. Hallar la función de densidad de $X_{1,2}$.

4.13 La función de densidad conjunta de las variables X e Y se ilustra en la siguiente figura. Hallar la función de densidad de $U = \text{mín}(X, Y)$.



4.14 Las variables aleatorias X_1 y X_2 son independientes y sus distribuciones son exponenciales de intensidades λ_1 y λ_2, respectivamente. Se definen $U = \text{mín}(X_1, X_2)$, $J = \mathbf{1}\{U = X_1\} + 2\,\mathbf{1}\{U = X_2\}$, $V = \text{máx}(X_1, X_2)$ y $W = V - U$.

(**a**) Hallar la densidad de U.

(**b**) Hallar la función de probabilidad de J.

(**c**) Hallar la densidad de W.

(**d**) Mostrar que U y J son independientes.

(**e**) Mostrar que U y W son independientes.

4.15 Juan y Pedro han conseguido trabajo en una central telefónica. Juan atiende una línea en que los tiempos entre llamadas consecutivas son exponenciales independientes de intensidad 5 por hora, y Pedro una línea en que los tiempos entre llamadas consecutivas son exponenciales independientes de intensidad 10 por hora. Ambos son fanáticos del ajedrez, y deciden arriesgar su empleo jugando entre llamada y llamada. Se ponen de acuerdo en dejar sin atender las llamadas que suceden antes de los 5 minutos desde que iniciaron el juego o desde la última vez que lo interrumpieron para atender. Inician la partida a las 10.

(**a**) ¿Cuál es la probabilidad de que la primer llamada después de las 10 quede sin atender?

(**b**) ¿Cuál es la probabilidad de que la primer llamada después de las 10 sea en la línea de Juan?

(**c**) ¿Cuál es la probabilidad de que la primer llamada después de las 10 quede sin atender sabiendo que fue en la línea de Juan?

(**d**) ¿Cuál es la probabilidad de que la primer llamada después de las 10 fuera en la línea de Juan sabiendo que fue atendida?

(**e**) ¿Cuál es la probabilidad de que entre la primera y la segunda llamada después de las 10 medien más de 5 minutos?

(**f**) ¿Cuál es la probabilidad de que la segunda llamada quede sin atender sabiendo que la primera fue atendida?

(**g**) ¿Cuál es la probabilidad de que la segunda llamada quede sin atender?

4.16 Unos circuitos electrónicos están formados por tres componentes. El tiempo de vida de cada componente tiene una densidad $f_T(t) = (1/1000)\, e^{-t/1000}\, \mathbf{1}\{t > 0\}$ si es del proveedor A y $f_T(t) = (1/1500)\, e^{-t/1500}\, \mathbf{1}\{t > 0\}$ si es del proveedor B. Los circuitos fallan si falla alguno de los tres componentes, y se sabe que para cada circuito los tres componentes son del mismo proveedor (el proveedor se elige al azar). Si un circuito está funcionando desde hace 1200 horas, ¿cuál es la probabilidad de que sus componentes sean del proveedor A?

4.17 Sean X e Y variables aleatorias independientes $U(-1/2, 1/2)$. Hallar la función de densidad de $Z = X^2 + Y^2$, condicionada a $Z < 1/4$.

4.18 Sean X e Y variables aleatorias i.i.d. con distribución común uniforme en $(0, \frac{1}{2})$.

(**a**) Hallar la función de densidad de $X + Y$ dado que $X - Y$ es negativo.

(**b**) En función del resultado del experimento aleatorio (X, Y), se construirá una nueva variable V. Si $X - Y < 0$, entonces $V = X/2$, si no $V = 3Y$. Hallar la función de densidad de V.

4.19 Se arrojan dos dados equilibrados e independientes y se observan sus valores X_1 y X_2. Hallar la función de probabilidad conjunta de U y V cuando

(**a**) U es el menor valor observado y V es la suma de ambos.

(**b**) U es el valor que muestra el primer dado y V es el mayor valor observado.

(**c**) U es el menor valor observado y V es el máximo.

4.20 Sean X_1 y X_2 dos variables aleatorias independientes con distribución común uniforme sobre el intervalo $[0, 1]$ y sean $U = \text{mín}(X_1, X_2)$ y $V = \text{máx}(X_1, X_2)$.

(**a**) Hallar la densidad conjunta de U y V.

(**b**) Hallar la densidad de $W = V - U$.

4.21 Sean X e Y variables aleatorias independientes con distribución común exponencial de intensidad $\lambda > 0$. Sean $U = X + Y$ y $V = \frac{X}{X+Y}$.

(**a**) Hallar la densidad conjunta y las densidades marginales de U y V.

(**b**) ¿U y V son independientes?

4.22 En un experimento de tiro al blanco, sean X e Y las coordenadas cartesianas del punto de impacto. Si dichas variables tienen distribución $N(0, 1)$ y son independientes, por lo que su densidad conjunta puede escribirse como

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)},$$

describir conjuntamente el punto de impacto en coordenadas polares y hallar las distribuciones marginales del radio y ángulo.

4.23 Sean U_1 y U_2 variables aleatorias independientes con distribución común $U(0,1)$. Considerar el cambio de variables: $(Z_1, Z_2) = (R\cos\Theta, R\operatorname{sen}\Theta)$, donde $R = \sqrt{-2\log(U_1)}$ y $\Theta = 2\pi U_2$.

(**a**) Hallar las densidades de R y Θ.

(**b**) Hallar la densidad conjunta de Z_1 y Z_2.

(**c**) ¿Z_1 y Z_2 son independientes? ¿Cómo se distribuyen?

(**d**) Utilizar el cambio de variables para simular 10000 valores de la distribución $N(0,1)$.

(**e**) Usando los valores obtenidos en el inciso anterior estimar el valor de la integral

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx.$$

Ejercicios Complementarios

4.24 Sea Θ una variable aleatoria con distribución uniforme sobre el intervalo $(-\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$. Hallar la densidad de $X = \tan\Theta$.

4.25 La ganancia anual de una empresa (en miles de \$) es una variable aleatoria X que se distribuye de acuerdo con la siguiente función de densidad de probabilidad: $f_X(x) = (x-150)/125^2\, \mathbf{1}\{150 \leqslant x < 275\} + (400-x)/125^2\, \mathbf{1}\{275 \leqslant x < 400\}$. Un cierto impuesto sólo debe pagarse si $X > 170$, debiendo abonarse el 10 % del excedente y siendo \$18000 el monto máximo a pagar. Hallar

(**a**) la probabilidad de que no se abone el impuesto, así como la de que se abone el monto máximo.

(**b**) la función de distribución del monto del impuesto abonado.

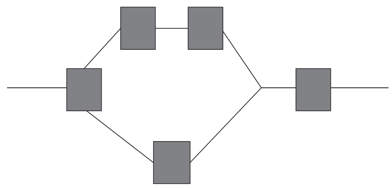
(**c**) la función de distribución de la ganancia final.

4.26

(**a**) Sean X e Y dos variables aleatorias independientes con funciones densidad $f_X(x) = 2x\, \mathbf{1}\{0 \leqslant x \leqslant 1\}$ y $f_Y(y) = (2-2y)\, \mathbf{1}\{0 \leqslant y \leqslant 1\}$. Hallar la función de distribución de la suma $X + Y$.

(**b**) Sea U una variable aleatoria con distribución uniforme sobre el intervalo $(0,1)$. Se definen $\hat{X} = \sqrt{U}$ e $\hat{Y} = 1 - \sqrt{U}$. Hallar las densidades marginales de $\hat{X}$ e $\hat{Y}$ y la función de distribución de la suma $\hat{X} + \hat{Y}$.

4.27 La duración (en horas) de ciertos componentes eléctricos sigue una distribución exponencial de intensidad $\lambda = 0.01$. Si los componentes se conectan en serie, la duración del circuito es la del elemento de menor duración; mientras que si se conectan en paralelo, es la del de mayor duración. Dado el circuito de 5 componentes conectados según el esquema de la figura, calcular la probabilidad de que el circuito dure más de 80 horas.



4.28 Curly, Larry y Moe habían quedado en encontrarse a ensayar un cierto día a las 10 AM. Moe, llega al azar entre las 9:55 y 10:10. Larry es un poco más descuidado y arriba al azar entre las 10 y 10:15. Curly por su parte, aparece una cantidad de minutos T_C luego de las 10, con $f_{T_C}(t) = 2(t-5)/225\ \mathbf{1}\{5 < t < 20\}$. Si cada uno arriba en forma independiente y el ensayo no puede comenzar hasta que lleguen todos, hallar la función de densidad del tiempo de retraso del comienzo del ensayo.

4.29 Sean X e Y variables aleatorias i.i.d. con distribución común $N(0,1)$. Mostrar que $U = \frac{X+Y}{\sqrt{2}}$ y $V = \frac{X-Y}{\sqrt{2}}$ también son independientes y $N(0,1)$.

4.30 ☣ Sean X e Y independientes con distribución común $N(0,1)$. Mostrar que $U = X^2 + Y^2$ y $V = X/Y$ son independientes y hallar sus distribuciones.

Guía 5

5.1 La cantidad de querosene, en miles de litros, en un tanque al principio del día es una variable aleatoria X, de la cual una cantidad aleatoria Y se vende durante el día. Suponga que el tanque no se rellena durante el día, de tal forma que $Y \leqslant X$, y que la función de densidad conjunta es $f_{X,Y}(x,y) = 2\,\mathbf{1}\{0 < y < x\}\,\mathbf{1}\{0 < x < 1\}$.

(**a**) Hallar $f_{Y|X=0.75}(y)$ y $f_{Y|X=0.4}(y)$.

(**b**) ¿Qué puede decirse respecto a la independencia de X e Y?

(**c**) Calcular $\mathbf{P}(1/4 < Y < 1/2|X = 0.75)$ y $\mathbf{P}(1/4 < Y < 1/2|X = 0.4)$.

5.2 Sea (X, Y) una variable bidimensional con la densidad conjunta del **Ejercicio 4.13**.

(**a**) Hallar $f_Y(y)$ y $f_{Y|X=x}(y)$ para todos los posibles valores de x. ¿Qué puede decir respecto a la independencia de X e Y?

(**b**) Calcular $\mathbf{P}(3 < 16XY < 9|X = 0.75)$.

5.3 [*Grimmett, pág. 111*] Sean X_1 y X_2 variables exponenciales independientes con intensidad λ. Sean $Y_1 = X_1 + X_2$, $Y_2 = X_1/X_2$ e $Y_3 = X_1 - X_2$.

(**a**) Hallar la densidad conjunta de Y_1 e Y_2 y mostrar que son independientes.

(**b**) Hallar la densidad conjunta de Y_1 e Y_3. ¿Son Y_1 e Y_3 independientes?

(**c**) Hallar las densidades condicionales $f_{Y_1|Y_2=1}(y_1)$, $f_{Y_1|Y_3=0}(y_1)$.

(**d**) Suponiendo que $\lambda = 1$, calcular $A = \mathbf{P}(Y_1 > 1|Y_2 = 1)$ y $B = \mathbf{P}(Y_1 > 1|Y_3 = 0)$. Observe que $Y_2 = 1$ e $Y_3 = 0$ son eventos equivalentes. ¿Cómo puede explicarse entonces que $A > B$?

(**e**) Estimar por simulación las probabilidades del inciso anterior. Para ello tomar $h = 0.01$, simular 100000 pares (X_1,X_2) y usarlos para estimar las probabilidades $\mathbf{P}(Y_1 > 1|\,|Y_2 - 1| < h)$ y $\mathbf{P}(Y_1 > 1|\,|Y_3| < h)$. Hacer un gráfico representando las diversas zonas de integración involucradas, y explicar por qué la primer probabilidad es aproximadamente el doble de la segunda.

5.4 Un viajante tiene tres alternativas de viaje a su trabajo: A, B y C. Se sabe que los porcentajes de veces que usa estos medios son respectivamente: 50 %, 30 % y 20 %. El tiempo de viaje con el transporte i es una variable aleatoria T_i (en horas). El medio A sigue la ley $f_{T_A}(t) = 2t\,\mathbf{1}\{0 \leqslant t \leqslant 1\}$, el B, $f_{T_B}(t) = 0.5t\,\mathbf{1}\{0 \leqslant t \leqslant 2\}$, y el C, $f_{T_C}(t) = 0.125t\,\mathbf{1}\{0 \leqslant t \leqslant 4\}$.

(**a**) Si ha transcurrido media hora de viaje y aun no ha llegado al trabajo, hallar la probabilidad de que llegue por el medio de transporte A.

(**b**) Si tardó exactamente media hora en llegar al trabajo, calcular la probabilidad de que lo haya hecho por el medio de transporte A.

5.5 [*ver* **Ejercicio 4.14**] Drácula y Renfield se dieron cita en una esquina de Mataderos a las 0:00. Drácula llegará a las 0:00+X y Renfield a las 0:00+Y, donde

X e Y (en minutos) son variables aleatorias con función de densidad conjunta

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{50} e^{-\left(\frac{x}{5}+\frac{y}{10}\right)} \mathbf{1}\{x > 0, y > 0\}.$$

(**a**) Sabiendo que el primero en llegar a la cita tuvo que esperar más de 5 minutos al otro calcular la probabilidad de que el primero en llegar a la cita haya sido Drácula.

(**b**) Sabiendo que el primero en llegar a la cita tuvo que esperar exactamente 5 minutos al otro calcular la probabilidad de que el primero en llegar a la cita haya sido Drácula.

5.6 Un emisor transmite un mensaje binario en la forma de una señal aleatoria Y que puede ser -1 con probabilidad $1/2$ o $+1$ con probabilidad $1/2$. El canal de comunicación corrompe la transmisión con un ruido normal aditivo $N \sim N(0, \sigma^2)$ independiente de Y. El receptor recibe la señal $X = N + Y$. Considere $\sigma = 1/5$.

(**a**) Graficar la función densidad de probabilidad de la señal recibida por el receptor.

(**b**) La pregunta del receptor es la siguiente: dado que recibí el valor x, ¿cuál es entonces la probabilidad de que la señal emitida haya sido -1? Graficar la función $\psi(x) = \mathbf{P}(Y = -1|X = x)$.

(**c**) Repetir los incisos anteriores considerando $\sigma = 2/3$.

5.7 La corporación *Cobani Products* produjo 2 RoboCops, cada uno de los cuales está fallado con probabilidad $1/2$. Cada RoboCop es sometido a una prueba tal que si el Robocop está fallado se detecta la falla con probabilidad $4/5$. Sea X la cantidad de RoboCops fallados y sea Y la cantidad detectada de RoboCops fallados.

(**a**) Hallar una expresión de la función de regresión $\varphi(x) = \mathbf{E}[Y|X = x]$.

(**b**) Hallar una expresión de la función de regresión $\varphi(y) = \mathbf{E}[X|Y = y]$.

5.8 Sean X e Y variables aleatorias con densidad conjunta

$$f_{X,Y}(x,y) = xe^{-x(1+y)} \mathbf{1}\{x > 0,\ y > 0\}.$$

(**a**) Hallar la distribución de las variables condicionales $Y|X = x$.

(**b**) Hallar y graficar la función de regresión $\varphi(x) = \mathbf{E}[Y|X = x]$.

(**c**) Hallar la esperanza condicional de Y dada X.

(**d**) Hallar y graficar la función de distribución de la esperanza condicional de Y dada X.

(**e**) Calcular $\mathbf{P}(1/2 < \mathbf{E}[Y|X] \leqslant 3)$.

5.9 Sean X e Y las variables aleatorias definidas en el **Ejercicio 5.1**.

(**a**) Hallar la distribución de las variables condicionales $Y|X = x$.

(**b**) Hallar y graficar la función de regresión $\varphi(x) = \mathbf{E}[Y|X = x]$ y la función $\phi(x) = \mathbf{var}[Y|X = x]$.

(**c**) Hallar la esperanza y la varianza condicional de Y dada X.

(**d**) Calcular $\mathbf{P}(\mathbf{E}[Y|X] \leqslant 1/4)$ y $\mathbf{P}(\mathbf{var}[Y|X] > 3/64)$.

5.10 Sean X e Y variables aleatorias con distribución uniforme sobre la región $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 3/4, 0 < y < 3/4\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 3/4 < x < 1, 3/4 < y < 1\}$. Hallar la función de distribución de $\mathbf{E}[Y|X]$ y $\mathbf{var}[Y|X]$. ¿Cuál es la probabilidad de que la varianza condicional tome un valor inferior a $1/32$?

5.11 En una urna hay 6 bolas rojas, 4 azules y 2 negras. Se extraen tres. Sean X la cantidad de bolas rojas extraídas e Y la cantidad de azules.

(**a**) Hallar las funciones de probabilidad de las variables condicionales $Y|X = x$.

(**b**) Hallar y graficar la función de regresión $\varphi(x) = \mathbf{E}[Y|X = x]$ y la función $\phi(x) = \mathbf{var}[Y|X = x]$.

(**c**) Hallar la esperanza y varianza condicional de Y dada X.

5.12 En el contexto del **Ejercicio 5.6**, explicar cómo hace el receptor para "reconstruir" la señal original Y a partir de la señal observada (corrupta) X. Hallar la expresión de la señal así "reconstruida".

5.13 Sean X e Y variables aleatorias con distribución uniforme sobre la región del plano Λ. Hallar $\mathbf{E}[Y|X]$ cuando:

(**a**) Λ es el cuadrado de vértices $(1,-1)$, $(1,1)$, $(-1,1)$ y $(-1,-1)$.

(**b**) Λ es el cuadrado de vértices $(\sqrt{2},0)$, $(0,\sqrt{2})$, $(-\sqrt{2},0)$ y $(0,-\sqrt{2})$. Hallar $\mathbf{E}[Y|X]$. ¿X e Y son independientes?

5.14 Una rata está atrapada en un laberinto. Inicialmente puede elegir una de tres sendas. Si elige la primera se perderá en el laberinto y luego de 4 minutos volverá a su posición inicial; si elige la segunda volverá a su posición inicial luego de 7 minutos; si elige la tercera saldrá del laberinto luego de 3 minutos. En cada intento, la rata elige con igual probabilidad cualquiera de las tres sendas. Calcular la esperanza del tiempo que demora en salir del laberinto.

5.15 Una rata está atrapada en un laberinto. Inicialmente elige al azar una de tres sendas. Cada vez que vuelve a su posición inicial elige al azar entre las dos sendas que no eligió la vez anterior. Por la primera senda, retorna a la posición inicial en 5 horas, por la segunda retorna a la posición inicial en 3 horas, por la tercera sale del laberinto en 2 horas. Calcular la esperanza del tiempo que tardará en salir del laberinto.

5.16 Sea X una variable aleatoria con distribución uniforme sobre el intervalo $(0,\pi)$ y sea Y una variable aleatoria tal que $\mathbf{E}[Y|X] = X$. Calcular $\mathbf{cov}(\operatorname{sen}(X), Y)$.

5.17 Se arroja un dado 100 veces. Sean X e Y las cantidades de resultados pares e impares respectivamente. Hallar la esperanza condicional $\mathbf{E}[Y|X]$ y el valor de $\mathbf{cov}(X,Y)$.

5.18 Sea (X,Y) un vector aleatorio tal que X tiene distribución exponencial de media 1, $\mathbf{E}[Y|X] = X$ y $\mathbf{var}[Y|X] = X$. Usando el Teorema de Pitágoras calcular el valor de $\mathbf{var}[Y]$.

5.19 Una partícula suspendida en agua es bombardeada por moléculas en movimiento térmico y recibe (por segundo) una cantidad de impactos cuya distribución es Poisson de media 10. Por cada impacto la partícula se mueve un milímetro hacia la derecha con probabilidad 3/4 o un milímetro hacia la izquierda con probabilidad 1/4. Hallar la posición media de la partícula al cabo de un segundo.

5.20 Un jugador de generala se tira a sacar generala de ases. Tira sus 5 dados, separa los ases, vuelve a tirar los restantes, vuelve a separar los ases, y vuelve a tirar los restantes. Calcular el número esperado de ases obtenidos en el tercer tiro.

5.21 El peso de ciertas bolsas de naranjas es una variable aleatoria uniforme entre 3 y 6 kilos. Se van agregando bolsas en una balanza hasta que el peso supere 5 kilos. Hallar la media y la varianza del peso final así obtenido.

5.22 Hallar la media y la varianza del tiempo de viaje al trabajo del ejercicio **Ejercicio 5.4**.

5.23 La variable aleatoria bidimensional (X, Y) tiene distribución uniforme en la región descrita por $0 < x < 2, 0 < y < x^2$.

(**a**) Hallar la función de regresión de Y dada X.

(**b**) Hallar una ecuación para la recta de regresión de Y dado X.

5.24 Sean X e Y variables aleatorias con densidad conjunta

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{2x+1} e^{-\left(x+\frac{y}{2x+1}\right)} \mathbf{1}\{x > 0,\, y > 0\}.$$

Hallar la ecuación de la recta de regresión de Y dada X.

5.25 La variable aleatoria bidimensional (X, Y) se describe por: X es exponencial con media 5, $Y = X^2$.

(**a**) Hallar la función de regresión de Y dada X.

(**b**) Hallar una ecuación para la recta de regresión de Y dado X.

5.26 La longitud de los rollos de tela producidos por cierta máquina sigue una distribución uniforme entre 20 y 30 (en metros). Un buen día un cliente requiere un rollo con por lo menos 28 metros, de los que no hay ninguno en stock.

(**a**) Calcular la cantidad media de rollos que será necesario producir para satisfacer la demanda del cliente. Compare con la estimación por simulación.

(**b**) Calcular la longitud total media de tela producida para satisfacer esa demanda. Compare con la estimación por simulación.

(**c**) Calcular la longitud total media de tela de los rollos que irán a stock (es decir sin incluir el vendido al cliente). Compare con la estimación por simulación.

Ejercicios Complementarios

5.27 Sea (X, Y) una variable bidimensional con la densidad conjunta del **Ejercicio 2.22**. Encuentrar la densidad de $Z = XY$ sabiendo que $Y = 0.25$.

5.28 Sean X e Y variables aleatorias independientes tal que $X \sim U(0,1)$ y $f_Y(y) = 2y\, \mathbf{1}\{0 < y < 1\}$. Se desea calcular $\mathbf{P}(X + Y < 1|X = Y)$. Jekyll propone:

$$\mathbf{P}(X + Y < 1|X = Y) = \mathbf{P}(2X < 1) = \mathbf{P}(X < 1/2) = 1/2.$$

Pero Hyde no está de acuerdo y dice:

$$\mathbf{P}(X + Y < 1|X = Y) = \mathbf{P}(2Y < 1) = \mathbf{P}(Y < 1/2) = 1/4.$$

Si ambos hubieran razonado correctamente, ¿convenimos que $1/2 = 1/4$? Explicar lo sucedido.

5.29 En una urna hay 3 bolas rojas y 2 negras. Se extraen dos bolas sin reposición. Sean X e Y la cantidad de bolas rojas y negras extraídas, respectivamente. Hallar una función de X, $\varphi(X)$, tal que $\mathbf{E}[\varphi(X)h(X)] = \mathbf{E}[Yh(X)]$ para toda función acotada $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. (*sugerencia*: Para cada $i \in \{0, 1, 2\}$ considerar la función $h_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $h_i(x) = \mathbf{1}\{x = i\}$. Usar la ecuación $\mathbf{E}[\varphi(X)h_i(X)] = \mathbf{E}[Yh_i(X)]$ para deducir la expresión de $\varphi(i)$ para cada $i \in \{0, 1, 2\}$).

5.30 [*ver* **Ejercicio 5.7**] La corporación *Cobani Products* produjo n RoboCops, cada uno de los cuales está fallado con probabilidad ϕ. Cada RoboCop es sometido a una prueba tal que si el Robocop está fallado se detecta la falla con probabilidad δ. Sea X la cantidad de RoboCops fallados y sea Y la cantidad detectada de RoboCops fallados.

(**a**) Hallar una expresión de la función de regresión $\varphi(y) = \mathbf{E}[X|Y = y]$.

(**b**) Mostrar que

$$\mathbf{E}[X|Y] = \frac{n\phi(1 - \delta) + (1 - \phi)Y}{1 - \phi\delta}.$$

5.31 Sean X_i las variables definidas en el **Ejercicio 2.33**. Hallar $\mathbf{E}[X_2|X_1]$.

5.32 Sea arroja un dardo sobre el blanco circular $\Lambda = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leqslant 1\}$.

(**a**) El dardo se clava en un punto de coordenadas (X, Y) uniformemente distribuido sobre $\Lambda \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geqslant 0\}$. Hallar la esperanza y la varianza condicional de Y dada X.

(**b**) El dardo se clava en un punto de coordenadas (X, Y) uniformemente distribuido sobre Λ. Hallar la esperanza y la varianza condicional de Y dada X.

5.33 Sean las variables aleatorias X, con media μ y desvío σ, e Y, discreta con $\mathbf{P}(Y = 1) = p$ y $\mathbf{P}(Y = 2) = 1 - p$. Si X e Y son independientes, hallar $\mathbf{E}\left[X^Y\right]$.

5.34 [*ver* **Ejercicio 3.5** y **Ejercicio 5.14**] Se arroja sucesivas veces un dado equilibrado. Sea K el número de tiradas hasta obtener por primera vez un resultado distinto de as, y sea, para cada entero $m > 1$, X_m el número de tiradas hasta obtener por primera vez m ases seguidos (por ejemplo si las primeras 9 tiradas resultan $1, 1, 2, 1, 4, 5, 1, 1, 1$ sería $K = 3$ $X_2 = 2$, $X_3 = 9$).

(**a**) ¿Qué distribución tiene K? Hallar $\mathbf{E}[K]$.

(**b**) Se sabe que $\mathbf{E}[X_2] = 42$. Describir la variable aleatoria $\mathbf{E}[X_2|K]$. Comprobar la consistencia de esta descripción con el dato $\mathbf{E}[X_2] = 42$.

(**c**) Describir la expresión general de $\mathbf{E}[X_m|K]$ en términos de $\mathbf{E}[X_m]$. Deducir una expresión general para $\mathbf{E}[X_m]$.

(**d**) Calcular $\mathbf{E}[X_5]$.

(**e**) Si cada tirada del dado insumiera un segundo, estimar (en años) el tiempo medio necesario hasta obtener 20 ases seguidos.

5.35 ☣ Juan y Roberto concursan por un trabajo en IBM. Mientras esperan a ser atendidos por el Examinador, Juan descubre desesperado que olvidó su calculadora. Cuando el Examinador los atiende, Juan le pide una, pero el Examinador (que no cursó esta materia ni leyó la columna de Adrián Paenza en la contratapa de Página 12 del domingo 18 de julio del 2010), se la niega y le dice que piensa que no le será necesaria.

Uno de los enunciados de la prueba dice: “Escriba una secuencia de 200 bits elegidos al azar en $\{0, 1\}$.”.

El Examinador saca copia de los exámenes, identificando las copias, y se los entrega al Corrector (que cursó esta materia el primer cuatrimestre del 2010) que no puede identificarlos, pero sabe que su amigo Juan olvidó la calculadora. El Corrector mira las pruebas y sin dudarlo sabe cuál es la de su amigo Juan.

Uno:

```
01001110111001000011101010110010011110110101101110011010011001010110
00010011100001010111011010110001010010001100001110101011000011101100
0100010000101001101101110011110101010111001100001010001000101100
```

Otro:

```
01111001011010100110110111000011101110110010100001011001101011001101
1000100110001101011100110111101111011111111010001110001010010000000000
11101100000010001001110101111010001011011010100001110011110110001
```

¿Podría, a la luz del **Ejercicio 5.34**, explicar cómo hizo, y cuál de las dos secuencias pertenecía a Juan?

5.36 Sea (X, Y) una variable aleatoria bidimensional. Sabiendo que $X \sim N(0, 2)$ y $\mathbf{E}[Y|X] = 2X^2 + 1$.

(**a**) Hallar $\mathbf{E}[Y]$ y $\mathbf{cov}(X, Y)$.

(**b**) Hallar una ecuación de la recta de regresión de Y dado X.

5.37 Para la variable aleatoria bidimensional (X, Y) del **Ejercicio 3.15**,

(**a**) hallar la función de regresión de Y dado X.

(**b**) hallar una ecuación para la recta de regresión de Y dado X.

5.38 ☣ Dado un vector $(x_1, \ldots, x_n) \in R^n$, sea $T(x_1, \ldots, x_n)$ la variable aleatoria discreta con rango $\{x_1, \ldots, x_n\}$ definida por $P(T = x_i) = 1/n$. Consideramos además n réplicas independientes $X_1, \ldots, X_n$ de una variable aleatoria X con media μ y varianza σ^2.

(**a**) Hallar $\mathbf{E}[T]$.

(**b**) Hallar $\mathbf{var}[T]$.

(**c**) Describir la variable aleatoria $\mathbf{E}[T(X_1, \ldots, X_n)|(X_1, \ldots, X_n)]$. Comparar con **Ejercicio 3.27**. Hallar $\mathbf{E}[T(X_1, \ldots, X_n)]$ (en términos de μ).

(**d**) Describir la variable aleatoria $\mathbf{var}[T(X_1, \ldots, X_n)|(X_1, \ldots, X_n)]$. Comparar con **Ejercicio 3.27**. Hallar $\mathbf{E}[\mathbf{var}[T(X_1, \ldots, X_n)]]$ (en términos de σ^2).

Guía 6

6.1 La probabilidad de acertar a un blanco es $1/5$. Se disparan 10 tiros independientemente.

(**a**) Calcular la probabilidad de que el blanco reciba al menos dos impactos.

(**b**) Calcular la probabilidad condicional de que el blanco reciba al menos dos impactos, suponiendo que recibió al menos uno.

6.2 Se tira un dado 6 veces. Calcular la probabilidad de obtener

(**a**) al menos un as.

(**b**) exactamente un as.

(**c**) exactamente dos ases.

6.3 La probabilidad de acertar a un blanco es $1/5$.

(**a**) Se disparan 9 tiros independientemente. Hallar la cantidad más probable de impactos recibidos por el blanco.

(**b**) Repetir el inciso anterior si se disparan 10 tiros.

(**c**) Repetir el inciso anterior si se disparan n tiros.

6.4 El diámetro de las arandelas (en mm.) producidas por una máquina es una variable aleatoria cuya función de densidad es $f_X(x) = (x-6)/4\,\mathbf{1}\{6 \leqslant x < 8\} + (10-x)/4\,\mathbf{1}\{8 \leqslant x \leqslant 10\}$. Si se revisan 100 arandelas, ¿cuál es la probabilidad de que más de una tenga un diámetro inferior a 6.5 mm.?

6.5 El 1 % de los individuos de una población es zurdo. Usando la distribución de Poisson, calcular *en forma aproximada* la probabilidad de encontrar al menos 4 zurdos entre 200 individuos.

6.6 ¿Qué tan larga debe ser una sucesión de dígitos aleatorios para que la probabilidad de que aparezca el dígito 7 sea por lo menos $9/10$?

6.7 El peso de una bolsa de cemento (en kg.) es una variable aleatoria uniforme en el intervalo $(20, 30)$. Si los pesos de las bolsas son independientes, calcular

(**a**) la probabilidad de que la primera bolsa con peso superior a 29 kg. sea la séptima bolsa revisada.

(**b**) la probabilidad de necesitar revisar más de 5 bolsas hasta encontrar una que sea inferior a 22.5 kg.

6.8 Chocolatines Jack lanza una colección de muñequitos con las figuras de los personajes de *Kung Fu Panda*: Panda, Tigre, Mono, Grulla y Mantis. Cada vez que Lucas compra un chocolatín es igualmente probable que obtenga alguno de los personajes. Sea N la cantidad de chocolatines que Lucas debe comprar hasta completar la colección, hallar $\mathbf{E}[N]$ y $\mathbf{var}(N)$. Interpretar los resultados.

6.9 Un dado equilibrado tiene pintadas sus seis caras de la siguiente forma: rojo, amarillo, amarillo, verde, verde, verde. Calcular la esperanza de la cantidad de lanzamientos del dado que deberán realizarse para observar sus tres colores.

6.10 [*ver* **Ejercicio 4.6**] Una lámpara tiene una vida (en horas) con distribución exponencial de parámetro 1. Un jugador enciende la lámpara y, mientras la lámpara está encendida, lanza un dado equilibrado de quince en quince segundos. Hallar el número esperado de 3's observados hasta que la lámpara se apague.

6.11 Se arroja repetidamente un dado. Calcular la probabilidad de que el tercer as salga en el séptimo tiro.

6.12 Monk y Lucas disputan la final de un Campeonato de Ajedrez. El primero que gane 6 partidas (no hay tablas) resulta ganador. La duración de cada partida (medida en horas) es una variable aleatoria cuya función de densidad es $f_T(t) = (t-1)/2\ \mathbf{1}\{1 \leqslant t \leqslant 3\}$. La probabilidad de que Lucas gane cada partida depende de la duración de la misma. Si dura menos de 2 horas, gana con probabilidad 3/4; si no, gana con probabilidad 1/2. ¿Cuál es la probabilidad de que Lucas gane el Campeonato en la octava partida?

6.13 Sean N_1 y N_2 dos variables geométricas independientes donde $\mathbf{P}(N_i = 1) = p$. Sean $N = N_1$ y $S = N_1 + N_2$. Hallar

(**a**) la función de probabilidad conjunta de N y S. ¿Son N y S independientes?

(**b**) la distribución de $N|S = k$ y calcular $\mathbf{P}(2 \leqslant N \leqslant 4|S = 7)$.

6.14 De los 25 jugadores de fútbol de un club se elige al azar un equipo de 11. Si 8 de los jugadores del club son federados, hallar la probabilidad de encontrar

(**a**) ningún jugador federado en el equipo.

(**b**) exactamente 2 jugadores federados en el equipo.

(**c**) al menos 4 jugadores federados en el equipo.

6.15 En una urna hay k bolas blancas y 5 bolas negras, donde $0 \leqslant k \leqslant 6$. El resultado de la extracción de 2 bolas al azar sin reposición fue de 1 blanca y 1 negra. Para cada k hallar la probabilidad de haber observado el mencionado resultado de las 2 extracciones. ¿Qué valor de k da lugar a la mayor probabilidad?

6.16 El control de recepción de piezas realizado a cada caja, que contiene 10 unidades, consiste en elegir 2 piezas y rechazar la caja si alguna es defectuosa. El "honesto" proveedor coloca en cada caja un número de defectuosas que depende del resultado de arrojar un dado como sigue: Si sale un as, no pone ninguna; si el resultado es 2, 3, 4 ó 5 pone 1; y si es 6, pone 2. Determinar

(**a**) la distribución del número de defectuosas que hay en las cajas.

(**b**) la distribución del número de defectuosas que se encuentran en cada muestra de 2 unidades.

(**c**) el porcentaje de cajas rechazadas.

6.17 Una cadena de supermercados compra un lote de 50000 bombitas eléctricas. Un lote se considera bueno cuando a lo sumo 500 bombitas están quemadas, y se considera malo cuando al menos 1500 bombitas lo están. Se elige una muestra de n bombitas para ensayar. Si c o menos de ellas están quemadas, se acepta el lote. En caso contrario, se lo devuelve al proveedor. Se proponen tres planes de muestreo:

1. $n = 200$; $c = 4$.
2. $n = 100$; $c = 2$.
3. $n = 100$; $c = 1$.

(**a**) Expresar en palabras los riesgos del proveedor y del comprador.

(**b**) Graficar las curvas características (ver **Ejercicio 1.35**) de los tres planes de muestreo (utilizar la aproximación binomial de la hipergeométrica).

(**c**) ¿El plan 2 protege similarmente al proveedor que el plan 1? ¿Y al comprador? Justificar.

(**d**) ¿El plan 3 protege más al comprador que el plan 1? ¿Y al proveedor? Justificar.

6.18 En una pieza fabricada existen dos tipos de falla, en forma independiente: por abolladura con una probabilidad de 0.1 y por rotura con una probabilidad de 0.2. Hallar la probabilidad de que al tomar 8 piezas,

(**a**) más de una sea defectuosa sólo por abolladura.

(**b**) una resulte defectuosa sólo por rotura.

(**c**) a lo sumo una tenga ambos defectos.

(**d**) menos de 2 tengan algún defecto.

(**e**) por lo menos una no tenga defectos.

(**f**) 2 estén abolladas solamente, 3 estén rotas solamente, 1 tenga ambos defectos y el resto sean buenas.

6.19 En una fábrica hay cuatro máquinas A, B, C y D que producen el 30 %, 20 %, 10 % y 40 % de la producción total, respectivamente. Si se sabe que en diez artículos tomados al azar de la producción, exactamente dos provienen de la máquina A, ¿cuál es la probabilidad de que haya exactamente dos provenientes de la máquina B?

6.20 Se tienen siete dados equilibrados: uno normal y seis con seis ases. Se realizan los siguientes tres experimentos:

E_1: Se elige al azar uno de los siete dados y se lo arroja tres veces;

E_2: Tres veces se elige al azar uno de los siete dados, y se lo arroja (reponiéndolo luego entre los otros);

E_3: Se eligen al azar tres de los siete dados, y se los arroja.

Sea A_i el evento: "en el experimento E_i no se obtuvo ningún as".

(**a**) Sin usar lápiz y papel, ¿podría Ud. determinar cuál es la máxima de las probabilidades $\mathbf{P}(A_i)$? ¿Y la mínima?

(**b**) Calcular las tres probabilidades $P(A_i)$. Si sus respuestas en **Inciso** (**a**) fueron incorrectas, trate de entender por qué.

6.21 Se tirará un dado equilibrado hasta que salga el as. Sea N la cantidad de tiradas necesarias y sea M la cantidad de cuatros obtenidos. Calcular $\mathbf{E}[M]$ y $\mathbf{cov}(N, M)$.

6.22 Un motoquero transita por una avenida. Las probabilidades de que al momento de llegar a un semáforo se encuentre en rojo, amarillo o verde son 0.45, 0.05 y 0.5 respectivamente. Los estados de los semáforos son independientes entre sí y el motoquero sólo se detiene al encontrar un semáforo en rojo. Sea X la cantidad de luces amarillas que atravesó hasta detenerse.

(**a**) Calcular la media y varianza de X.

(**b**) Hallar la función de probabilidad de X.

6.23 Un juego consiste en arrojar una moneda legal 5 veces y contar el número de caras obtenidas (Fase I del juego). Luego, la Fase II consiste en:

- arrojar la moneda tantas veces como cantidad de caras obtenidas en la Fase I, si el número de caras obtenido en la Fase I es mayor que 3;
- arrojar la moneda hasta obtener un total de 4 caras (incluyendo las obtenidas en la fase I), si el número de caras obtenido en la Fase I es a lo sumo 3.

Calcular el valor esperado de la cantidad de tiros efectuados en la Fase II.

Ejercicios Complementarios

6.24 Se trata de que un proceso de fabricación no produzca más del 5 % de artículos defectuosos. A tal efecto se lo controla periódicamente examinando n artículos y si alguno de ellos es defectuoso, se detiene el proceso para revisarlo.

(**a**) Si el proceso de fabricación realmente está trabajando al 5 % de artículos defectuosos y se examinan $n = 20$ artículos, ¿cuál es la probabilidad de detener el proceso innecesariamente?

(**b**) Hallar la cantidad mínima de artículos que deberán examinarse si se desea que la probabilidad de detener el proceso cuando realmente está trabajando al 6 % de defectuosos sea por lo menos 0.99. Con ese tamaño de muestra, ¿cuál es la probabilidad de detener el proceso innecesariamente?

6.25 En un tramo de una línea de montaje se realizan las operaciones 1, a cargo de Luis, y 2, a cargo de José. Ambos son especialistas y que producen un 5 % de defectos cada uno. Cuando falta alguno de ellos, y lo hacen aleatoria e independientemente el 8 % de los días, son reemplazados por auxiliares no especializados que trabajan con un 20 % de defectos cada uno. Cada unidad es defectuosa si existe defecto en cualquiera de las operaciones del montaje, que son independientes. Si un día se toma una muestra de 20 unidades y resultan 2 defectuosas, ¿cuál es la probabilidad de que ese día haya faltado alguno de los especialistas?

6.26 La probabilidad de dar en el blanco de dos tiradores A y B es respectivamente 0.4 y 0.7. Cada uno hace cinco disparos. Si se sabe que juntos acertaron 6 tiros, ¿cuál es la probabilidad de que A haya acertado dos?

6.27 En un proceso de producción en serie las piezas tienen dos tipos de defectos: de forma o de color. La probabilidad de que una pieza tenga un defecto de forma es 0.1; la probabilidad de que tenga un defecto de color es de 0.72 si tiene defecto de forma, y de 0.08 cuando no tiene defecto de forma. Cuando se detecta una pieza con ambos defectos se suspende la producción formando un lote con las piezas producidas hasta ese momento, incluyendo la pieza con ambos defectos. ¿Cuál es la cantidad media de piezas defectuosas por lote?

6.28 ☣ Sea $X_1, X_2, \dots$ una secuencia de variables aleatorias, todas de media 2, y N una variable geométrica($p = 2/3$), independiente de las X_i. Calcular $\mathbf{E}[X_1 + \cdots + X_N | N \geqslant 2]$.

6.29 Sea un dado de 4 caras a, b, c, d, con probabilidades p_a, p_b, p_c, p_d, respectivamente. El dado se lanza n veces, en forma independiente.

(**a**) Sean X_a, X_b, X_c, X_d la cantidad de lanzamientos en los que el dado cae en la cara a, b, c, d. ¿Cuál es la distribución de cada una de las X_i? Justificar.

(**b**) ¿Cuál es la covarianza entre X_a y X_b si $p_i = 1/4$? Interpretar el signo del resultado.

(**c**) ☣ ¿Cuál es la covarianza entre X_a y X_b? Interpretar el signo del resultado.

6.30 ☣ Un empresario de la industria del juego propone un nuevo entretenimiento para su casino: "*Se le entrega un dado legal. Usted sigue tirando hasta que saque un 6. Usted recibe una cantidad fija de \$1 por cada tiro que realizó donde el resultado fue un número impar.*" Sea R la cantidad de dinero que recibe un jugador.

(**a**) Hallar el valor medio de R. Si se paga un monto fijo de \$5 para poder jugar, ¿es este juego conveniente para el casino?

(**b**) Hallar la varianza de R.

(**c**) Hallar la función de probabilidad de R.

Guía 7

7.1 El número de buques tanque que llegan en un día a una refinería tiene una distribución de Poisson de media $\mu = 2$. Si más de tres buques llegan en un día, los que están en exceso deben enviarse a otro puerto, pues las actuales instalaciones portuarias pueden despachar a lo sumo tres buques al día.

(**a**) ¿Cuál es la probabilidad de tener que hacer salir buques en un día determinado?

(**b**) ¿Cuál es el número más probable de buques que llegan en un día?

(**c**) ¿Cuál es el número esperado de buques atendidos diariamente?

(**d**) ¿Cuál es el número esperado de buques rechazados diariamente?

(**e**) ¿En cuánto deben aumentarse las instalaciones actuales para permitir la atención a todos los buques el 90 % de los días?

7.2 La cantidad de insectos que arriban a la mesa de un asado responde a una distribución Poisson de media $\mu = 60$. Cada insecto puede ser una mosca con probabilidad $p = 2/3$. La cantidad de insectos y la naturaleza de cada uno de ellos son independientes.

(**a**) Dado que arribaron 60 insectos, ¿cuál es la distribución de la cantidad de moscas en la mesa?

(**b**) Hallar la probabilidad de que arriben 50 insectos y 35 de ellos sean moscas.

(**c**) ¿Cuál es la distribución de la cantidad de moscas que arriban a la mesa?

7.3 Una fábrica textil produce rollos de tela con dos tipos de fallas: de tejido y de teñido. En cada rollo, la cantidad de fallas de tejido tiene distribución Poisson de media $\mu_1 = 2$ y la cantidad de fallas de teñido tiene distribución Poisson de media $\mu_2 = 4$. Ambas cantidades son independientes.

(**a**) ¿Cuál es la probabilidad de que un rollo de tela no tenga fallas?

(**b**) ¿Cuál es la probabilidad de que un rollo de tela tenga exactamente una falla?

(**c**) Dado que un rollo de tela tiene exactamente una falla, ¿cuál es la probabilidad de que ésta sea una falla de tejido?

7.4 La cantidad de relámpagos durante una tormenta tiene una distribución Poisson de media μ, donde μ es una variable aleatoria con distribución uniforme sobre el intervalo $[3, 8]$. Calcular la probabilidad de que en un día de tormenta, se observe al menos un relámpago.

7.5 La duración de un cierto componente eléctrico es una variable aleatoria exponencial de media 1000 hrs.

(**a**) ¿Cuál es la probabilidad de que dicho componente dure más de 200 hrs.?

(**b**) Si se sabe que luego de 1200 hrs. estaba funcionando, ¿cuál es la probabilidad de que dure más de 1400 hrs.?

(**c**) Comparar las probabilidades obtenidas en ambos incisos y obtener una conclusión.

(**d**) Repetir los cálculos si la duración del componente fuese una variable con distribución gamma de media 4000 hrs. y desvío 2000 hrs.

7.6 Sean X_1 y X_2 variables exponenciales independientes con intensidad λ. Sean $X = X_1$ y $S = X_1 + X_2$.

(**a**) Hallar la densidad conjunta de X y S. ¿Son X y S independientes?

(**b**) Calcular $\mathbf{P}(X \in [0,1]|S = 3)$.

7.7 La cantidad de clientes que recibe un servidor en una hora obedece a una distribución Poisson de media $\mu = 4$. El tiempo de trabajo (en minutos) consumido en cada servicio es una variable aleatoria con distribución exponencial de media 5. Sabiendo que durante la primera hora el servidor recibió menos de 3 clientes, hallar la función de distribución del tiempo de trabajo consumido por el servidor y el valor medio de dicho tiempo.

7.8 La cantidad de relámpagos durante una tormenta tiene una distribución Poisson de media μ, donde μ es una variable aleatoria con distribución exponencial de intensidad 3.

(**a**) Calcular la probabilidad de que en un día de tormenta no se observe ningún relámpago.

(**b**) ¿Cuál es la distribución de la cantidad de relámpagos durante una tormenta?

7.9 Sea $\{N(t),\, t \geqslant 0\}$ el proceso de conteo asociado a un proceso de Poisson de intensidad 8. Calcular

(**a**) $\mathbf{P}(N(1) = 2)$.

(**b**) $\mathbf{P}(N(2) - N(1) = 3)$.

(**c**) $\mathbf{P}(N(1) = 2, N(2) - N(1) = 3, N(4) - N(2) = 5)$.

Sea T el tiempo de espera hasta que ocurre el cuarto evento del proceso de Poisson. Calcular

(**d**) $\mathbf{E}[T\,]$.

(**e**) $\mathbf{E}[T\,|N(1) = 2]$.

7.10 A un quiosco llegan clientes de acuerdo con un proceso de Poisson de intensidad 30 por hora.

(**a**) Hallar la probabilidad de que en media hora lleguen exactamente 15 clientes.

(**b**) Hallar la probabilidad de que el tiempo de espera entre la octava y la décima llegada supere los 5 minutos.

7.11 Los colectivos de la línea 61.09 llegan a la parada de Paseo Colón 850 según un proceso Poisson de intensidad 12 por hora.

(**a**) Andrés llega a la parada del 61.09 a las 19:30. Calcular la probabilidad de que Andrés tenga que esperar más de 5 minutos hasta que llegue el próximo colectivo.

(**b**) Jemina llega a la parada del 61.09 a las 19:31. Calcular la probabilidad de que Jemina tenga que esperar más de 5 minutos hasta que llegue el próximo colectivo.

(**c**) Martín llega a la parada del 61.09 en un horario aleatorio T cuya densidad de probabilidades es $f_T(t) = \frac{\pi}{4}|\text{sen}(\pi(t - 19:30))|\, \mathbf{1}\{19:30 < t < 19:32\}$. Calcular la probabilidad de que Martín tenga que esperar más de 5 minutos hasta que llegue el próximo colectivo.

7.12 A un banco llegan clientes de acuerdo con un proceso de Poisson de intensidad 10 por hora. Suponiendo que dos clientes llegaron durante la primer hora, ¿cuál es la probabilidad de que

(**a**) ambos lleguen durante los primeros 20 minutos?

(**b**) al menos uno llegue durante los primeros 20 minutos?

7.13 Los errores en un libro aparecen según un proceso Poisson. Se sabe que en las primeras 500 páginas hay un total de 500 errores. Hallar la probabilidad de que la página 1 contenga al menos tres errores.

7.14 Ocurren choques de acuerdo a un proceso de Poisson de intensidad 1 por segundo. Independientemente, cada choque hace que un sistema falle con probabilidad 1/2. Sea T el tiempo en que falla el sistema. Hallar la distribución de T, $\mathbf{E}[T]$ y $\mathbf{var}(T)$.

7.15 Una máquina produce rollos de alambre. El alambre tiene fallas distribuidas como un proceso de Poisson de intensidad 1 cada 25 metros. La máquina detecta cada falla con probabilidad 0.9 y corta el alambre en la primer falla detectada antes de los 25 metros o a los 25 metros si no se detectan fallas antes.

(**a**) Hallar la media de la longitud de los rollos de alambre.

(**b**) Hallar la cantidad media de fallas en los rollos.

7.16 [*ver* **Ejercicio 4.14**]

(**a**) Sean A y B dos procesos de Poisson independientes de tasa 1. ¿Cuál es la probabilidad de que al superponerlos, los dos primeros eventos observados provengan del proceso A?

(**b**) Sean X_1, X_2, X_3 variables aleatorias independientes exponenciales de media 1. Calcular la probabilidad de que X_1 supere a $X_2 + X_3$ (*sugerencia*: utilizando correctamente el resultado del inciso anterior, *no es necesario hacer ninguna cuenta*).

7.17 Familias de argentinos migran a Italia de acuerdo con un proceso de Poisson de tasa 4 por semana. Si el número de integrantes de cada familia es independiente y puede ser $2, 3, 4, 5$ con probabilidades respectivas 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, ¿cuál es el valor esperado del número de argentinos que migran a Italia durante un período fijo de 15 semanas?

7.18 En un puesto de peaje se sabe que los vehículos arriban con una tasa de 10 por minuto. El 70 % de las veces es un auto, el 10 % de las veces es una moto, y el 20 % de las veces es un camión. Los coches transportan en promedio una carga de 400 kg., las motos de 120 kg., y los camiones de 1300 kg.

(**a**) Encontrar la probabilidad de que en media hora crucen por el peaje a lo sumo 2 autos.

(**b**) Hallar la probabilidad de que en 1 minuto pasen 7 autos, 2 camiones y 1 moto.

(**c**) Hallar la carga media que transporta un vehículo que pasa por el peaje.

(**d**) Hallar la carga media total que atraviesa el peaje durante 1 hora.

7.19 A una línea de embalaje arriban en forma independiente piezas producidas por las máquinas A y B. Las piezas de la máquina A lo hacen según un proceso Poisson de tasa 2 por minuto, mientras que las de la máquina B también lo hacen en forma Poisson pero con tasa 3 por minuto. Las piezas de ambas máquinas llegan a la línea de embalaje y por orden de arribo son embaladas de a pares. Hallar la media y la varianza del tiempo transcurrido hasta la aparición de un par embalado formado por una pieza proveniente de cada máquina.

7.20 Los mensajes que son spam arriban según un proceso Poisson de tasa $\lambda_s = 8$ mensajes por hora, mientras que los que no son spam (regulares) lo hacen con $\lambda_r = 2$ mensajes por hora, e independientemente de los spam. De los mensajes regulares, con probabilidad $p = 0.05$ y de manera independiente son invitaciones para salir con amigos.

(**a**) Se tardan 2 segs. en reconocer y borrar un mensaje de spam. El tiempo para leer y contestar un mensaje regular es uniforme entre 60 y 120 segs. Encontrar la media y varianza del tiempo necesario para procesar todos los mensajes recibidos entre las 12 y 22 hrs.

(**b**) Si acaba de recibirse un mensaje nuevo, hallar la probabilidad de que sea una invitación para salir con amigos.

(**c**) La cuenta acaba de ser verificada. Encontrar la media del número de mensajes de spam que se recibirán hasta la llegada del próximo mensaje regular.

(**d**) Entre las 10 y 14 hrs. arribaron 10 mensajes de spam. Calcular la probabilidad de que exactamente 3 de ellos hayan arribado entre las 11 y 12 hrs.

(**e**) Luego de chequear el correo, una persona se queda dormida durante un tiempo aleatorio con distribución exponencial de media 1. Si al despertarse observa que no recibió mensajes nuevos, hallar la función de densidad condicional del tiempo que estuvo dormida (condicionada al hecho de que en ese tiempo no recibió mensajes).

7.21 En la fila de un cajero automático hay personas esperando realizar una operación; cada vez que una persona termina su operación, la siguiente comienza la suya. Las personas son impacientes, e independientemente de lo que hagan las demás, cada una espera solamente un tiempo exponencial de tasa 1; luego del cual si no ha comenzado su operación se retira de la fila. Por otra parte, los tiempos consumidos en cada operación son independientes y exponenciales de tasa 10. Si una persona está utilizando el cajero, hallar la probabilidad de que la octava persona en la fila realice su operación.

Ejercicios Complementarios

7.22 Una fábrica textil produce rollos de tela para una camisería. La tela se teje en una máquina que produce fallas de tejido de acuerdo con un proceso de Poisson de intensidad 2 cada 300 metros. La tela se corta en piezas de 100 metros de largo y cada pieza pasa a la máquina de teñido. Cuando una pieza de tela no tiene fallas de tejido la cantidad de fallas de teñido es una variable aleatoria con distribución Poisson de media 1. En cambio, si la pieza tiene fallas de tejido la cantidad de fallas de teñido una variable aleatoria con distribución Poisson de media 2. Hallar la distribución de la cantidad de fallas en una pieza enrollada.

7.23 ☣ En el contexto del **Ejercicio 7.11** Ignacio llega a la parada del 61.09 a las 19:35 y se sube en el primer colectivo de dicha línea que arribe a la parada.

(**a**) Calcular la probabilidad de que el último colectivo haya pasado por lo menos 5 minutos antes de la llegada de Ignacio a la parada y que el próximo tarde más de 5 minutos en llegar a la parada.

(**b**) Hallar la media del tiempo transcurrido entre el instante en que pasó el último colectivo antes de la llegada de Ignacio a la parada y el instante en que llegó el colectivo en que se subió Ignacio.

7.24 La llegada de aviones a un aeropuerto de una determinada ciudad responde a un proceso Poisson con una media de 12 aviones por hora. Un oficial de control llega cada día de la semana y permanece en el aeropuerto el tiempo necesario hasta que llega el décimo avión. Si al cabo de una semana (5 días hábiles) el tiempo que permaneció el oficial en el aeropuerto superó las 4 horas, ¿cuál es la probabilidad de que dicho tiempo haya excedido las 5 horas? Suponer que los tiempos de permanencia de dos días diferentes son independientes.

7.25 Un proceso de arribos comienza en $t = 0$ y los tiempos entre arribos $T_1, T_2, \ldots$ son variables aleatorias independientes, cada una con función densidad dada por $f_{T_i}(t) = (2e^{-t} + 3te^{-t})/5 \ \mathbf{1}\{t > 0\}$.

(**a**) Calcular la media de T_1.

(**b**) Calcular la probabilidad de que no ocurran arribos entre $t = 0$ y $t = 2$.

7.26 A una estación de trenes llegan personas de acuerdo con un proceso de Poisson de intensidad 50 por minuto. El tren parte a los 20 minutos. Sea T la cantidad total de tiempo que esperaron todos aquellos que subieron al tren. Hallar $\mathbf{E}[T]$ y $\mathbf{var}(T)$. (*sugerencia*: condicionar al valor de $N(20)$ = cantidad de llegadas en 20 minutos y usar la fórmula de probabilidad total.)

7.27 Clientes ingresan a un banco según un proceso de Poisson de tasa 10 por hora. El 30 por ciento de los clientes son mujeres. ¿Cuál es la probabilidad de que en el lapso hasta la llegada del sexto hombre hayan ingresado exactamente 2 mujeres?

7.28 A un hospital llegan personas de acuerdo con un proceso de Poisson de intensidad 1 cada hora. Cuando una persona ingresa al hospital, la probabilidad de que esté gravemente enferma es 0.4. (cada una en forma independiente de las otras). La jornada de atención del hospital es de 24 horas.

(**a**) El costo de atender a una persona que está gravemente enferma es de \$10 y el de atender a una persona que no esté gravemente enferma es de \$2. Hallar el costo medio de una jornada de atención.

(**b**) Sabiendo que el costo de una jornada de atención fue de \$10, hallar la distribución de la cantidad de personas que llegaron al hospital en esa misma jornada.

7.29 Una máquina produce rollos de alambre. El alambre tiene fallas distribuidas como un proceso de Poisson de intensidad 1 cada 25 metros. La máquina corta el alambre en la primer falla detectada después de los 50 metros, pero detecta las fallas con probabilidad 0.9. Si entre los 50 y los 150 metros no detecta ninguna falla, la máquina corta el alambre a los 150 metros. Hallar la cantidad media de fallas en los rollos.

7.30 [*ver* **Ejercicio 7.16**] Lucas entra en un banco que tiene dos cajas independientes. Pablo está siendo atendido por el cajero 1 y Pedro por el cajero 2. Lucas será atendido tan pronto como Pedro o Pablo salgan de la caja. El tiempo, en minutos, que demora el cajero i en completar un servicio es una variable aleatoria exponencial de media 2^{3-i}, $i = 1, 2$. Hallar

(**a**) la probabilidad de que Pablo sea el primero en salir;

(**b**) la probabilidad de que Pablo sea el último en salir.

7.31 Un contador recibe impulsos de dos fuentes independientes, A y B. La fuente A genera impulsos de acuerdo con un proceso de Poisson de tasa 3, mientras que la fuente B genera impulsos siguiendo un proceso de Poisson de tasa 5. Suponer que el contador registra todo impulso generado por las dos fuentes.

(**a**) Hallar la probabilidad de que el primer impulso registrado sea de la fuente A.

(**b**) Dado que exactamente 100 impulsos fueron contados durante la primer unidad de tiempo, ¿cuál es la distribución de la cantidad emitida por la fuente A?

7.32 En hora pico, una autopista recibe tráfico de 3 entradas, A, B y C, en forma independiente, que tienen tasas de 30, 35 y 25 vehículos por minuto, respectivamente. De los vehículos que llegan por A o B, el 30 % se desvía por colectora (o sea, no van por la autopista). En la autopista hay un puesto de peaje (luego de las 3 entradas).

(**a**) ¿Cuál es la probabilidad de que al peaje lleguen 3 autos en menos de 5 segundos?

(**b**) ¿Cuál es la probabilidad de que pasen más de 5 autos hasta que pasa uno proveniente de la entrada A?

(**c**) Se sabe que en un lapso de 15 segundos pasaron por el peaje 20 vehículos. ¿Cuál es la probabilidad de que la mitad de ellos haya pasado en los últimos 5 segundos?

(**d**) En el peaje se instala un contador de vehículos, pero el mismo funciona intermitentemente. Cada vez que funciona, el tiempo durante el cual lo hace no es fijo sino que es una variable $T_i \sim U(10, 15)$ segundos. Sea X_i la cantidad de vehículos registrados la i-ésima vez que funciona el dispositivo. La cantidad de veces que el dispositivo funciona durante un minuto es una variable N_j distribuida uniformemente a valores $\{1, 2, 3, 4\}$. Si cada una de las secuencias $\{T_i\}$, $\{X_i\}$ y $\{N_j\}$ son i.i.d., hallar la cantidad media de vehículos registrados por el dispositivo durante 1 hora.

7.33 ☣ [*Ross, pág. 351*] Sea $S(t)$ el precio de un seguro a tiempo t. Un modelo para el proceso $\{S(t),\, t \geqslant 0\}$ supone que el precio se mantiene constante hasta que ocurre un "sobresalto", en ese momento el precio se multiplica por un factor aleatorio. Sea $N(t)$ la cantidad de "sobresaltos" a tiempo t, y sea X_i el i-ésimo factor multiplicativo, entonces el modelo supone que

$$S(t) = S(0) \prod_{i=1}^{N(t)} X_i$$

donde si $N(t) = 0$, se define $\prod_{i=1}^{0} X_i = 1$. Suponer que los factores son variables exponenciales independientes de tasa $1/2$, que $\{N(t),\, t \geqslant 0\}$ es un proceso de Poisson de tasa 1, independiente de los X_i, y que $S(0) = 1$.

(**a**) Hallar $\mathbf{E}[S(t)]$ (*sugerencia*: usar la fórmula de probabilidad total condicionando a los posibles valores de $N(t)$ y el desarrollo en serie de Taylor de la exponencial.)

(**b**) Hallar $\mathbf{E}[S^2(t)]$.

Guía 8

8.1 Sea X una variable aleatoria con distribución normal estándar.

(**a**) Usando una tabla, calcular $\mathbf{P}(-0.43 < X < 1.32)$, $\mathbf{P}(1.28 < X < 1.64)$ y $\mathbf{P}(|X| < 1.64)$.

(**b**) Usando una tabla, encontrar las constantes que satisfacen las siguientes ecuaciones $\mathbf{P}(X < a) = 0.1$, $\mathbf{P}(X > b) = 0.2$, $\mathbf{P}(|X| < c) = 0.95$.

8.2 Para modelar el precio del kilo de asado se usa una variable aleatoria con distribución normal de media 3 dólares y varianza 4. ¿Qué puede decirse de semejante modelo? ¿Y si su media fuese 8 dólares? ¿Y si su media fuese 14 dólares?

8.3 Un distribuidor de arandelas cuenta con dos proveedores. De acuerdo a las especificaciones provistas, el proveedor A ofrece arandelas cuyo diámetro (en mm.) se rige por una distribución normal de media 15 y varianza 9; mientras que las del proveedor B también son normales con media 23 y desvío 3. Lamentablemente las cajas de los proveedores se colocaron en el depósito sin ser etiquetadas. Para decidir cada caja de qué proveedor proviene, se mide una arandela y si su diámetro es inferior a 19 mm. se decide que esa caja es del proveedor A.

Calcular la probabilidad asociada a los dos errores que pueden cometerse por usar dicha regla.

8.4 La vida en horas de una lámpara tiene una distribución normal de media 100 horas. Si un comprador exige que por lo menos el 90 % de ellas tenga una vida superior a las 80 horas, ¿cuál es el valor máximo que puede tomar la varianza manteniendo siempre satisfecho al cliente?

8.5 En un establecimiento agropecuario, el 10 % de los novillos que salen a venta pesan más de 500 kg. y el 7 % pesa menos de 410 kg. Si la distribución es normal, calcular

(**a**) el peso superado por el 15 % de los novillos.

(**b**) un intervalo de confianza al 95 % para el peso de los novillos.

(**c**) la probabilidad de que en una jaula de 25 novillos haya alguno con un peso inferior a 400 kg.

8.6 Sea $X \sim U(3,4)$ e $Y|X = x \sim N(x,1)$. Usando la tabla de la función de distribución de la variable normal, calcular $f_Y(5)$ y $\mathbf{P}(X > 3.5|Y = 5)$.

8.7 [*ver* **Ejercicio 4.29**] Sean X e Y variables aleatorias $N(0,1)$ independientes. Hallar la función densidad conjunta y las funciones densidad marginales de $W = X - Y$ y $Z = X + Y$. ¿Qué se puede concluir sobre la covarianza y la independencia entre W y Z?

8.8 En una línea de montaje se arma un mecanismo que tiene un eje que gira dentro de un buje. Un eje y un buje ajustan satisfactoriamente si el diámetro del segundo excede al del primero en no menos de 0.005 y no más de 0.035. Los diámetros de los ejes y los bujes son variables aleatorias con distribuciones uniformes independientes en el intervalo $(0.74, 0.76)$ para los ejes y $(0.76, 0.78)$ para los bujes.

(**a**) ¿Cuál es la probabilidad de que un eje y un buje tomados al azar ajusten satisfactoriamente?

(**b**) Considere ahora que las variables son normales con las mismas medias y desvíos que en el inciso anterior y recalcule la misma probabilidad.

8.9 Una conserva se venderá envasada en latas. Las distribuciones de los pesos (en gr.) y sus costos (en $ por gr.) son los siguientes:

Peso neto	X es normal de media 49.8 y desvío 1.2.
Peso del envase	Y es normal de media 8.2 y desvío 0.6.
Costo de la conserva	$C_C = 0.06$.
Costo del envase	$C_E = 0.008$.

(**a**) Calcular la probabilidad de que una unidad terminada tenga un costo inferior a \$3.

(**b**) Hallar la probabilidad de que el costo del producto terminado supere en más del 2 % al costo del peso neto.

8.10 Una carpintería recibe igual cantidad de tablas de dos aserraderos A y B. En el primero, la longitud (en mts.) de las mismas tiene distribución normal con media 3.8 y desvío estándar 0.3; en el segundo, la distribución también es normal, pero con parámetros 3.9 y 0.35 respectivamente. Una vez guardadas en depósito, no es posible saber de qué aserradero proviene cada tabla. Si se toma una tabla del depósito cuya longitud es de 3.7 mts., ¿cuál es la probabilidad de que la misma provenga del aserradero B?

8.11 Una empresa tiene 3 vendedores, A, B y C. Las ventas diarias de cada uno son sumamente variables y se conocen sus medias y desvíos pero no sus leyes de distribución. Dichos parámetros valen 100 y 45 para A, 120 y 30 para B, y 94 y 15 para C. Calcular

(**a**) la probabilidad de que en 60 días hábiles las ventas de A superen los 6500.

(**b**) la probabilidad de que en 60 días hábiles B venda al menos un 30 % más que C.

(**c**) la venta total mínima que, con 95 % de confiabilidad podrá obtenerse con los 3 durante los próximos 60 días hábiles.

8.12 La probabilidad de que un tirador haga impacto en el blanco en un disparo es $1/2$.

(**a**) Calcular en forma aproximada la probabilidad de que en 12 disparos el tirador consiga impactar exactamente 6 veces al blanco.

(**b**) Calcular en forma aproximada la probabilidad de que en 12 disparos el tirador haga impacto en el blanco por lo menos 6 veces.

(**c**) Comparar los resultados obtenidos con los resultados exactos.

(**d**) Repetir los incisos anteriores cuando la probabilidad de que el tirador haga impacto en el blanco en un disparo es $1/20$.

8.13 Supóngase que S_n tiene distribución binomial(n, p), cuyos parámetros n y p se describen más abajo. Calcular $\mathbf{P}(S_n = k)$, $k = 1, 2, \ldots, 25$ por la fórmula exacta y por las siguientes aproximaciones

1. *Aproximación por la densidad normal:*

$$\mathbf{P}(S_n = k) \sim \frac{1}{\sqrt{np(1-p)}}\, \varphi\left(\frac{k - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$$

2. *Corrección por continuidad:*

$$\mathbf{P}(S_n = k) = \mathbf{P}\left(k - \frac{1}{2} < S_n < k + \frac{1}{2}\right) \approx \Phi\left(\frac{k - np + 1/2}{\sqrt{np(1-p)}}\right) - \Phi\left(\frac{k - np - 1/2}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$$

Comparar (por gráficos) cuán buenas son las aproximaciones y cuán necesaria es la corrección por continuidad de acuerdo con los valores de n y p.

Utilizar $n = 5, 8, 10, 15, 20, 25, 50, 100, 200$ y $p = (0.05)s$, $s = 1, 2, \ldots, 10$.

8.14 [*ver* **Ejercicio 8.13**] Un borracho realiza una caminata aleatoria de la siguiente manera: cada minuto da un paso hacia el sur con probabilidad $2/3$ o un paso hacia el norte con probabilidad $1/3$, las sucesivas direcciones de la caminata son independientes. En cada paso el borracho se desplaza 50 cm en la dirección elegida. Calcular aproximadamente la distribución de probabilidades de la ubicación después de una hora. ¿Dónde es más probable encontrar al borracho?

8.15 Tres números se redondean al entero más cercano y se suman. Se asume que los errores individuales de redondeo se distribuyen uniformemente sobre el intervalo $(-0.5, 0.5)$.

(**a**) Calcular en forma aproximada la probabilidad de que la suma de los números redondeados difiera de la suma exacta en más de 1.

(**b**) Simular la probabilidad pedida y compararla con el resultado analítico aproximado.

8.16 Un buen día Lois decide resolver toda la Guía 7 de Probabilidad y Estadística (incluídos los Ejercicios Complementarios). El tiempo, en horas, que demora en resolver el ejercicio $7.i$ ($i = 1, 2, \ldots, 33$) es una variable aleatoria T_i. La variables T_i son independientes y exponenciales de intensidad 4. Cuando termina de resolver el ejercicio $7.i$ Lois descansa $2e^{T_i}$ minutos. Calcular aproximadamente la probabilidad de que Lois haya descansado más de una hora y media mientras resolvía todos los problemas de la Guía 7.

8.17 En un sistema electrónico se producen fallas de acuerdo con un proceso de Poisson de tasa 2.5 por mes. Por motivos de seguridad se ha decidido cambiarlo cuando ocurran 196 fallas.

(**a**) Calcular (aproximadamente) la probabilidad de que el sistema sea cambiado antes de los 67.2 meses.

(**b**) Simular la probabilidad pedida y compararla con el resultado analítico aproximado.

8.18 Ciertas partículas llegan a un contador según un proceso de Poisson de intensidad 1000 por hora. Sabiendo que entre las 9:00 y las 9:30 llegaron 400 partículas, estimar la probabilidad de que más de 130 hayan llegado entre las 9:00 y las 9:10.

8.19 Una máquina selecciona ciruelas y las separa de acuerdo con el diámetro x (medido en cm.) de cada una. Las de diámetro superior a 4 cm. se consideran de clase A y las otras de clase B. El diámetro de cada ciruela es una variable aleatoria uniforme entre 3 y 5 cm. El peso (medido en gramos) de cada ciruela depende de su diámetro y es x^3. Si las cajas vacías pesan 100 gramos, hallar en forma aproximada la probabilidad de que una caja con 100 ciruelas de tipo A pese más de 9.6 kilos.

8.20 En un taller de manufactura, la fracción de unidades defectuosas varía diariamente en forma aleatoria con media 0.1 y desvío estándar 0.03. A su vez, la producción diaria es también variable e independiente de la anterior, con media 500 unidades y desvío 120 unidades. El costo total diario tiene una parte fija de \$0.8 por unidad producida (buena o defectuosa) más \$3.4 por unidad defectuosa. Calcular el costo total para 90 días superado con 90 % de probabilidad.

8.21 Una excursión dispone de 100 plazas. La experiencia indica que cada reserva tiene una probabilidad 0.1 de ser cancelada a último momento. No hay lista de espera. Se supone que los pasajeros hacen sus reservas individualmente, en forma independiente. Se desea que la probabilidad de que queden clientes indignados por haber hecho su reserva y no poder viajar sea $\leqslant 0.01$. Calcular el número máximo de reservas que se pueden aceptar.

8.22 Lucas y Monk palean arena cargando un volquete. La probabilidad de que una palada sea de Monk es 0.4 y la probabilidad de que sea de Lucas es 0.6. El volumen en decímetros cúbicos de la palada de Lucas es una variable aleatoria uniforme entre 1 y 3, y el de la palada de Monk es una variable aleatoria uniforme entre 2 y 4. ¿Cuántas paladas son necesarias para que la probabilidad de que el volquete tenga más de 4 metros cúbicos de arena supere 0.9?

8.23 El peso W (en toneladas) que puede resistir un puente sin sufrir daños estructurales es una variable aleatoria con distribución normal de media 1400 y desvío 100. El peso (en toneladas) de cada camión de arena es una variable aleatoria de media 20 y desvío 0.25. ¿Cuántos camiones de arena debe haber, como mínimo, sobre el tablero del puente para que la probabilidad de que ocurran daños estructurales supere 0.1?

Ejercicios Complementarios

8.24 [*Capacidad de procesos*] La calidad de un proceso industrial suele caracterizarse por alguna variable aleatoria X, medible sobre dicho proceso o sobre el producto fabricado por él (por ejemplo, X puede ser el diámetro de piezas torneadas, la corriente eléctrica en un proceso de soldadura, el volumen de llenado de botellas, la dureza de comprimidos farmacéuticos o su concentración de principio activo, etc). Se suelen definir límites superior e inferior de especificación (LSE y LIE) como aquellos valores a partir de los cuales el producto resulta no conforme o defectuoso. Cuando X pertenece al intervalo $[LIE, LSE]$, el producto se considera aceptable. Los sucesivos productos son obtenidos con variaciones aleatorias en X, que se suponen normales. Cuando el proceso es *centrado* (el intervalo se encuentra centrado en μ_X), la capacidad del proceso de elaboración se define como la aptitud para generar productos dentro de los límites, y se cuantifica a través del índice de capacidad

$$C_p = \frac{LSE - LIE}{6\sigma_X}.$$

(**a**) Interpretar el significado de C_p.

(**b**) De un proceso centrado con límites $LIE = 10.90$ mm. y $LSE = 11.10$ mm. se midieron $n = 15$ piezas, obteniendo (en mm.): 10.98, 10.92, 11.01, 11.08, 11.07, 11.10, 10.87, 10.99, 11.07, 10.93, 10.96, 10.90, 10.89, 10.94, 10.95. Estimar con esta muestra σ_X como $\sqrt{S^2}$ (ver **Ejercicio 3.27**). Luego, estimar C_p y el porcentaje de productos defectuosos.

(**c**) Calcular el porcentaje de piezas no conformes para procesos centrados con C_p iguales a 2/3, 1 y 4/3.

(**d**) Un proceso centrado trabaja con un 0.5 % de piezas no conformes. ¿Cuánto vale su C_p?

8.25 Se decide instalar un aparato que clasifique automáticamente ciertas piezas en largas y cortas. La longitud (en cm.) de las piezas largas tiene distribución normal de parámetros μ_L y σ_L^2; mientras que la de las cortas también es normal de parámetros μ_C y σ_C^2. Sean p_C y $p_L = 1 - p_C$ las probabilidades de recibir piezas cortas y largas. Si se denomina X a la longitud de una pieza cualquiera, calcular $\mathbf{P}(\text{cometer error})$ en cada uno de los siguientes casos:

(**a**) $\mu_L = 35$, $\sigma_L^2 = 25$, $\mu_C = 25$, $\sigma_C^2 = 25$, $p_L = p_C$. Regla: "Si $X > 30$, la pieza se clasifica como larga".

(**b**) $\mu_L = 30$, $\sigma_L^2 = 4$, $\mu_C = 25$, $\sigma_C^2 = 25$, $p_L = 3\,p_C$. Regla: "Si $25.97 < X < 35.94$, la pieza se clasifica como larga".

8.26 En una máquina se bobinarán carreteles con hilo de título 40 g./1000 m. El carretel lleno no debe pesar más de 500 g. y se quiere que la probabilidad de que supere este valor sea a lo sumo 0,01. En el carretel se bobinarán en promedio 10000 m. de hilo, pero debido a la variabilidad en el frenado de la máquina, dicha longitud variará en 2,5 % con probabilidad 0,99. Especificar el peso promedio de los carreteles vacíos de la máquina, sabiendo que por razones de tolerancias constructivas se tendrá un desvío estándar de 3 g. Considerar que la longitud de hilo bobinada y el peso del carretel vacío siguen distribuciones normales independientes.

8.27 *Chi-cuadrado.* Sea $Y = X^2$, con $X \sim N(0, 1)$.

(**a**) Hallar la función densidad de Y.

(**b**) Probar que X e Y están descorrelacionadas pero no son independientes.

8.28 ☣ [*ver* **Ejercicio 8.7**] Sean X e Y variables aleatorias independientes con distribución común $N(0,1)$. Calcular $\mathbf{P}(X \leqslant 0|X - Y = 1)$.

8.29 En el contexto del **Ejercicio 8.3**, si la regla fuese decidir por el proveedor A cuando el promedio de 9 arandelas independientes de una caja sea inferior a 19 mm., hallar la probabilidad asociada a los errores con esta nueva regla.

8.30 Sea n la cantidad de experimentos Bernoulli que se realizan para obtener una estimación del parámetro p. Si se quiere que el error de la estimación sea menor que 0.01 con probabilidad por lo menos igual a 0.95, hallar una condición sobre los posibles valores de n utilizando

(**a**) la cota de Chebyshev.

(**b**) el TCL.

(**c**) Comparar los resultados y las hipótesis utilizadas.

8.31 Se lanza un dado hasta que la suma de los resultados observados sea mayor que 300. Calcular aproximadamente la probabilidad de que se necesiten al menos 80 lanzamientos. Simular la probabilidad pedida y compararla con el resultado analítico aproximado.

8.32 En el contexto del ejercicio **Ejercicio 6.7**, si se acumulan bolsas hasta encontrar una con peso superior a 29 kg. (incluyendo la última), hallar en forma aproximada la probabilidad de que el peso total acumulado supere los 165 kg. Mediante simulaciones, estime la probabilidad pedida y compararla con el resultado analítico aproximado.

8.33 Un camión transporta cajas cargadas de artículos varios. El peso de estas cajas es una variable muy asimétrica y dispersa con un valor medio de 25 kg y un desvío estándar de 18 kg. De acuerdo con las reglamentaciones vigentes, la carga máxima que puede llevar el camión es de 4000 kg, sin embargo, como el sitio de carga no dispone de báscula, existe el riesgo de superarla en caso de colocar demasiadas cajas. Calcular el número máximo de cajas a cargar en el camión para que la probabilidad de dicho evento sea a lo sumo del 5 %.

8.34 Una persona usa diariamente su radio portátil un tiempo variable día a día con media 2.4 hrs. y desvío 0.8 hrs. La radio usa una pila especial cuya duración es también variable con media 8 hrs. y desvío 1.2 hrs. Esta persona va a efectuar un viaje de 30 días y si se le agotan las pilas no está seguro de conseguirlas. Calcular cuántas pilas debe llevar para que la probabilidad de dicho evento valga 0.05.

Referencias (por orden alfabético)

Abramson, N. (1986), *Teoría de la Información y Codificación*, Paraninfo, 6^a edición.

DeGroot M.H. (1986), *Probability and Statistics*, Addison Wesley Publishing Company, 2^a edición.

Feller, W. (1970), *An Introduction to Probability Theory and its Applications*, Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics, New York, Volumen 1, 3^a edición.

Grimmett G.R. y Stirzaker D.R. (2001), *Probability and Random Processes*, Oxford University Press, New York, 3^a edición.

Maronna, R. (1995), *Probabilidad y Estadística Elementales para Estudiantes de Ciencias*, Editorial Exacta, La Plata.

Ross, S.M. (2007), *Introduction to Probability Models*, Academic Press, San Diego, 9^a edición.

Soong, T.T. (2004), *Fundamentals of Probability and Statistics for Engineers*, John Wiley & Sons.