

función φ .

$$G = (\mathbb{V}, A, \varphi)$$

aristas
 vertices o nodos $= \{a_1, \dots, a_n\}$
 $= \{v_1, \dots, v_n\}$

incidencia

$$\varphi: A \rightarrow \mathcal{P}[\mathbb{V}]$$

$$= \{X \subseteq \mathbb{V} : |X| = 2\}$$

$$\varphi(a_i) = \{v_k, v_l\}$$

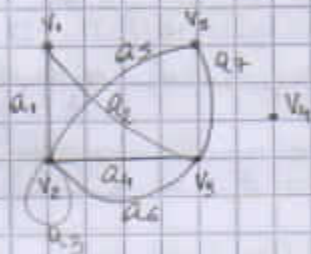
son extremos a_i .

Ej: $\mathbb{V} = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$

$$A = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_7\}$$

$$a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4 \quad a_5 \quad a_6 \quad a_7$$

$$\varphi \begin{cases} \{v_1, v_2\} \\ \{v_1, v_3\} \\ \{v_2\} \\ \{v_2, v_3\} \\ \{v_2, v_4\} \\ \{v_3, v_4\} \\ \{v_4, v_5\} \end{cases}$$



- Cuando una arista esta formada por un solo se llama bucle o lazo.

- Aristas paralelas son aquellas que comparten

~~Arista aislada es aquella que~~

- Aristas adyacentes comparten un solo vertice.

- Vertice aislado.

Matriz de adyacencia

$$M_A(G) = (a_{ij}) \in \mathbb{Z}^{n \times n} \text{ con } n = |\mathbb{V}|$$

a_{ij} = cantidad de aristas con extremos v_i, v_j

Ej:

$$M_A(G) = \begin{matrix} & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \\ \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Son matrices simétricas

• la sumatoria de los fil plicando a la diagonal por el grado del vertice.

$$\sum_{i=1}^n a_{ij} = 2|A|$$

$$M_i(G) = b_{ij} \in \mathbb{Z}^{n \times m}, \quad \begin{cases} m = |V| \\ n = |A| \end{cases}$$

$$b_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } v_i \text{ es extremo de } a_j \text{ (no lo es)} \\ 2 & \text{" " " " " " " " (lo es)} \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Ej:

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7
v_1	1	1	0	0	0	0	0
v_2	1	0	2	1	1	1	0
v_3	0	1	0	1	0	1	1
v_4	0	0	0	0	0	0	0
v_5	0	0	0	0	1	0	1

• la sumatoria de el grado

grado = Valencia de un vertice

Es la cantidad de veces que se utiliza a v como de arista. (nº de aristas incidentes en v .)

Ej:

	$gr(v)$
v_1	2
v_2	6
v_3	4
v_4	0
v_5	2

• la mitad de la sumatoria la cantidad de aristas

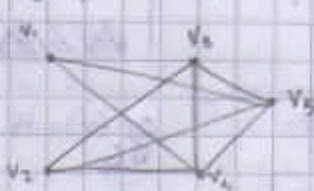
$$\sum_{i=1}^n \frac{gr(v_i)}{2} = \text{nº aristas} \Rightarrow \sum gr(v)$$

- Cuando un grafo tiene todos los vertices con grado se llama "k regular".

Ej: 3) n.

	$gr(v)$
v_1	2
v_2	3
v_3	3
v_4	4
v_5	4

Grafo Simple



Teorema

La cantidad de vertices de grado impar tiene un número par.

$$V = \{v_1, \dots, v_n, w_1, \dots, w_m\} \quad \sum_{i=1}^n gr(v_i) + \sum_{j=1}^m gr(w_j) =$$

$gr(v) = 5 \Rightarrow 25 \text{ vertices} \Rightarrow \text{no es posible}$ ya que

25 vertices (impar) de grado 5 (impar)

Grafo Completo de n vertices

$K_n = K[n]$: grafo simple de n vertices, con ~~maximo~~ ^{maximo} ~~numero~~ ^{numero} de aristas

$$|A| = \frac{n(n-1)}{2}$$

$$M_2(K_n) = M_A(G) : a_{ij} = \begin{cases} 1 & i \neq j \\ 0 & i = j \end{cases}$$

$$v \in K_n \rightarrow gr(v) = n-1$$

Grafo Complementario

Dado $G = (V, A)$ se llama grafo complementario

$$\bar{G} = (V', A') \text{ tal que : } \begin{cases} V = V' \\ A' = A \end{cases}$$

$$|A_{K_n}| = |A| + |A'|$$

$$gr_G(v) = K \rightarrow gr_{\bar{G}}(v) = n - K$$



$$D = (V, A, \varphi)$$

$$\varphi: A \rightarrow V \times V$$

$$\varphi(a_i) = (v_k, v_r)$$

ha diferencia con los

en esta hay orientación.

$$\begin{cases} v_k = \text{extremo inicial} \\ v_r = \text{extremo final} \end{cases}$$

- Incidencia positiva: a_i incide + en v_r
- Incidencia negativa: a_i incide - en v_r

- Paralelos: aquellos aristas con mismos extremos

- Opuestas: aquellos aristas con extremos opuestos

La matriz de adyacencia deja de ser simétrica

$$U_i(v) = \begin{cases} -1 & \text{saliendo} \\ 1 & \text{llegando} \\ \pm 1 & \text{lozos} \end{cases}$$

$$\sum f_i = gr^-(v_i)$$

$$\sum c_i = gr^+(v_i)$$

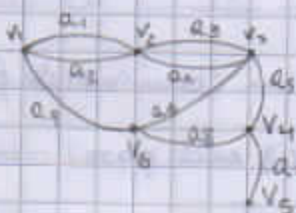
- Grado positivo y grado negativo: se diferencian que llegan de los que salen.

$$\sum gr^+ = \sum gr^- = |A|$$

Caminos

Es una sucesión de vertices y aristas

Ej:



$$v_1, a_1, v_2, a_2, v_3, a_3, v_4, a_4, v_5, a_5, v_6, a_6, v_1$$

- Longitud del camino = nº aristas que lo componen

vertice inicial y el final.

Ciclo: es un circuito simple que no repite

Grafo aciclico: cuando no tiene ciclos.

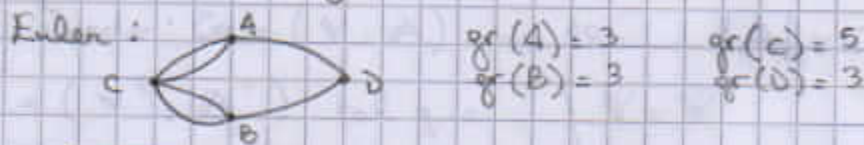
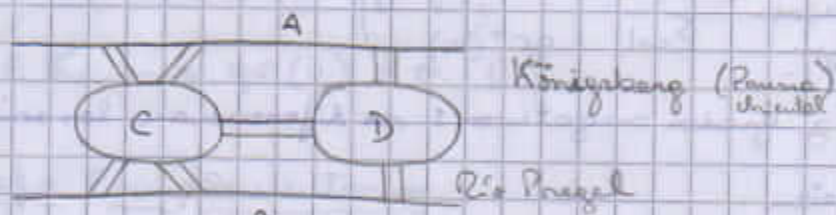
Grafo conexo: cuando dos o mas vertices existe un camino que los une.

Componentes conexas: son subgrafos conexas

Camino dirigido: es un camino bien orientado en digrafo

Fuertemente conexo: cuando en un digrafo, de dos vertices existe un camino que los une, en ambas direcciones.

Componentes fuertemente conexas: son aquellos subgrafos (excluyendo algunos vertices y aristas) que son fuertemente conexas.



• Camino de Euler: aquellos caminos por los cuales se recorren todas las aristas y pasan por todos los vertices.

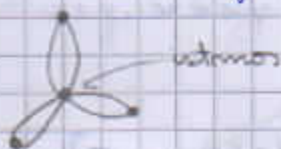
• Grafo de Euler: aquel que tiene un camino de Euler.

Grafo / Circuito de Euler $\longleftrightarrow$ $gr(v_i)$ sea par.

Grafo / Camino de Euler $\longleftrightarrow$ $gr(v_i)$ sea par, $i = 1, \dots, m$
 $gr(v_j)$ sea impar, $j = m+1, \dots, n$



Un grafo es de Hamilton cuando es posible caminar o un circuito que pase por todos los v. sin ninguno.



Caminio minimo: para grafos no ponderados es el más corto. Para grafos con pesos



Grafo ponderado (o con pesos): aquellos que tienen

Algoritmos para hallar el camino minimo

- Moore: grafos y digrafos no ponderados o con pesos
- Dijkstra: grafos y digrafos ponderados con $p(a)$
- Ford: digrafos ponderados. Detecta circuitos

Moore

- 1°) Etiquetar $\lambda(s) \leftarrow 0$
- 2°) $I \leftarrow 0$ (contador de nivel)
- 3°) Buscar todos los ~~minimos~~ vertices adyacentes a los de I que no estén etiquetados. Si no hay, parar.
- 4°) Etiquetar todos los vertices hallados en 3° con $I+1$
- 5°) Si el vertex t fue etiquetado, parar.
- 6°) $T \leftarrow I+1$ y volver a 3°

Dijkstra

1º) Etiquetar $\lambda(s) \leftarrow 0$ y $\lambda(v) \leftarrow \infty \forall v \in V, v \neq s$

2º) $T \leftarrow V$

3º) Sean $u \in T$ tal que $\lambda(u) = \min \{ \lambda(v) : v \in T \}$

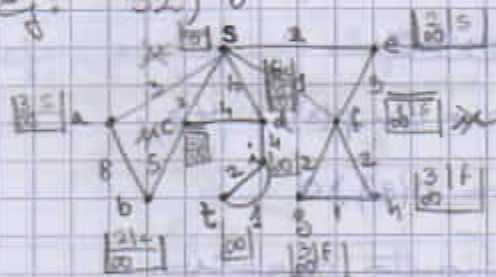
4º) Si $u = t$, parar

5º) Para toda arista $u \xrightarrow{a} v$ (en grafo)
 $u \xrightarrow{a} v$ (en digrafo)

para los cuales $\lambda(u) + p(a) < \lambda(v)$ hacer $\lambda(v) \leftarrow$

6º) $T \leftarrow T - \{u\}$ y volver a 3º).

Ej: 32) b



$T = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$

Ford

1º) Etiquetar $\lambda(s) \leftarrow 0$ y $\lambda(v) \leftarrow \infty$

2º) $j \leftarrow 1$ (contador de vueltas)

3º) Mientras exista una arista $u \xrightarrow{a} v$ / $\lambda(u) +$

reemplazar $\lambda(v) \leftarrow \lambda(u) + p(a)$

4º) $j \leftarrow j + 1$ hasta que $j = |V|$ o hasta que en 3º) no

Ej: 33) b -



d	1
1	2
2	



En el algoritmo de Ford si se dan $|V|$ vueltas y cambian, implica que hay un camino negativo.

Ej: 21)



	a	b	c
a	0	1	0
b	1	0	1
c	0	1	0
d	0	1	1

$$M_a^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

camino de longitud dos
tres caminos de longitud dos

• Sea M_a^n matriz de adyacencia, entonces $a_{ij} = 1$ caminos de longitud n .

D/ta) Si $a_{ij}^m \in M^m \wedge a_{ij}^m = 1 \longrightarrow \exists$ camino

PB: $m=1$. $a_{ij} = 1 \xrightarrow{\text{por definici3n de } M_a} \exists$ de arista de $V_i = V_j \longrightarrow \exists$ camino

PI: $(a_{ij}^h \in M^h \wedge a_{ij}^h = 1 \longrightarrow \exists \text{ camino de long. } h) \longrightarrow (a_{ij}^{h+1} \in M^{h+1} \wedge a_{ij}^{h+1} = 1 \longrightarrow \exists \text{ camino de long. } h+1)$

Si $a_{ij}^{h+1} = 1 \xrightarrow{\text{por multiplicaci3n de matrices}} \exists k: a_{ik}^h = 1 \wedge a_{kj} = 1$
 por hip3tesis inductiva

Arboles



Arbol



NO ARBOL

Clares de equivalencias: $\bar{v} = \{u \in V : u R v\}$

Ej: $\bar{v}_1 = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$

Un grafo es un árbol cuando existe un solo simple.

$G = (V, A)$ es un árbol sii $\forall u, v \in V (u = v \vee \exists$
simple de u a v).

$G = (V, A)$ es un grafo acíclico sii no tiene ciclos.

Un árbol tiene la mínima cantidad de aristas para
conexo y la máxima para no ser acíclico. $|A| = |V|$

Teorema I

- (a) G es conexo y acíclico.
↓
(b) G es acíclico y si se le agrega una arista, deja de
↓
(c) G es árbol.
↓
(d) G es conexo y si se le saca cualquier arista, deja

Todas las proposiciones son equivalentes.

D/ $(a \rightarrow b)$ G es acíclico por H_a

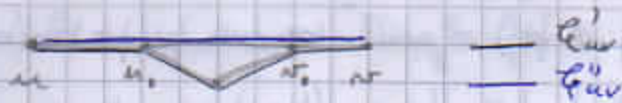
Sea a la arista agregada a G :

- si a es un lazo deja de ser acíclico.
- si a no es un lazo, como G es conexo

existe un camino entre u y v que no es a . Entonces $\exists$
un ciclo $\Rightarrow G \cup \{a\}$ no es acíclica.

(b) $\Rightarrow$ (c) $\forall u, v \in V, u \neq v \exists \text{ simple de } u \text{ a } v$

Supongamos que $\exists u, v \in V$, $u \neq v$, 2 caminos simples



$\exists u, v$, los vértices donde se separan y se reanuda.
Pero entre $E_{uv'}$ y $E_{uv''}$ se forma un ciclo (Asterisco).

(C $\rightarrow$ d) G es conexo por definición de árbol.

Supongamos que saca $\overline{uv} = a$ y G sigue conexo.
no usa arista $a \Rightarrow \exists$ existencia de caminos

E_{uv} y a , los cuales formaban ciclo. (Asterisco).
 G árbol $\exists!$ camino).

(d $\rightarrow$ a) G es conexo por H_d .

Supongamos que G no es acíclico $\Rightarrow \exists$ un ciclo.
Entonces si saca una arista del ciclo, G sigue conexo (por H_d), lo cual contradice H_b .

Teorema II

- (i) Si G es conexo y acíclico
- (ii) G es acíclico y $|A_G| = |V_G| - 1$
- (iii) G es conexo y $|A_G| = |V_G| - 1$

Todas las proposiciones son equivalentes.

1) (i $\rightarrow$ ii) G es acíclico por H_i .

$P(m)$: " G no, acíclico y $|V_G| = m \rightarrow$
q.p.q. $\forall m \in \mathbb{N} : P(m)$ es V

Sea $v_0 \in V$ y $\deg(v_0) = 1$ y a la única arista incidente

Sea $G' = (V - \{v_0\}, A - \{a\})$ es acíc., $\Rightarrow$ cca, $|V_{G'}| = h - 1$

$$\Rightarrow |A_{G'}| = h - 1 \Rightarrow |A_G| = |A_{G'}| + 1 = (h - 1) + 1 = h$$

(ii $\rightarrow$ iii) $|A_G| = |V_G| - 1$ por Hii

Sean $G_1, G_2, \dots, G_K$ los componentes conexos de G (Si $K=1 \Rightarrow G$ es cca).

Cada $G_i \xrightarrow{\text{es cca. por definición.}} \Rightarrow$ (usando i $\rightarrow$ ii) $\xrightarrow{\text{es acíclica por Hii.}}$

$$\left. \begin{array}{l} |A_1| = |V_1| - 1 \\ \vdots \\ |A_K| = |V_K| - 1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \oplus \\ \end{array} = |A_1| + \dots + |A_K| = |V_1| + \dots + |V_K| - K = |V_G| - K = |A_G| = |V_G| - 1 \Rightarrow$$

(iii $\rightarrow$ i) G es cca por Hii

Supongamos G no acíc. y sean $E_1, \dots, E_r$ los



Sea $G' = (V_{G'}, A_{G'})$ con $V_{G'} = V_G$, $A_{G'} = A_G - \{E_1, \dots, E_r\}$

$$\Rightarrow G' \xrightarrow{\text{cca}} \text{acíc.} \left\{ \begin{array}{l} \text{Aplicando a } G' \text{ i} \rightarrow \text{ii} \end{array} \right\} \Rightarrow |A_{G'}| = |V_{G'}| - 1 = |V_G| - 1$$

$$|A_G| - r = |V_G| - 1$$

$$\Rightarrow r = 0 \Rightarrow G \text{ es cca}$$

Propiedades

1) Sea $G = (V, A)$ y $u, v \in V$

Si $\exists E_{uv} \rightarrow \exists E_{vu}$ es simple.

2) Sea G simple y G es simple. $\checkmark$

con $|V_G| \geq 2$

1) / Sea G un camino de longitud máxima
extremos u_0 y v_0 .

$$\text{p.e. } gr(u_0) = gr(v_0) = 1.$$

$$gr(u_0) \begin{cases} = 0 \Rightarrow \text{no sería un vértice aislado, con} \\ \leftarrow \rightarrow 1 \Rightarrow \text{al camino podría agregarse una ar} \\ = 1 \checkmark \end{cases}$$

los mismo con v_0 .

Árboles con raíz

Un digrafo $D = (V, A)$

enraizado sii:

$$1^\circ) \exists r \in V : gr^+(r) = 0$$

$$2^\circ) \forall v \in V : \exists! r \neq v : gr^+(r) = v$$

Hoja o vértice terminal: son los vértices
ej: a, b, c, d, e

Vértice interno: los vértices que no son hojas

Un árbol se clasifica como m -ario cuando
máximo m descendencia. $\forall v \in V : gr^-(v) = 0, 1, \dots, m$
ej: Ternario

Árbol m -ario completo: $\forall v \in V : gr^-(v) = m$

Altura: es la distancia de la raíz a ~~los~~ v

Árbol m -ario equilibrado: m -ario completo y
mismo nivel ~~de todos los~~.

Teorema

mayor: solo la raíz = 1

$$2i + 1$$

$$|i| = 2i + 1 - i = i + 1 \quad /$$

cíclico (cada componente conexa es un árbol).

digrafo

~~...~~
F se alcanza desde b si $\exists p, q$.

vertices m está en un nivel superior ~~de~~ a

vertices k , si ningún V_m pueda ser alcanzado

2

	a	b	c	d	e	f	g
a	0	1	0	0	0	0	1
b	0	0	0	1	0	0	1
c	0	1	0	1	0	0	0
d	0	0	0	0	0	1	1
e	0	0	1	0	0	1	0
f	0	0	0	0	0	0	0
g	0	0	0	0	0	1	0

$\rightarrow \text{Fil} = 0 \Rightarrow$
nivel: inf

aco Col(a), (e)
Fil(a), (e)

col = 0 $\Rightarrow$ nivel
sup.

Redes de Transporte

grafo ponderado con:

• vertice fuente / $gr^+(f) = 0$ (no llegan)

• vertice sumidero / $gr^-(s) = 0$ (no salen)

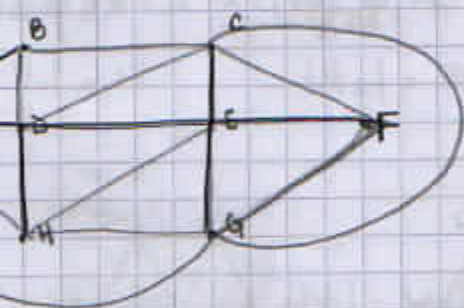
• función capacidad / $c: A \rightarrow \mathbb{N}_0$ $\wedge c(a_i) \geq 0$

• función flujo / $f: A \rightarrow \mathbb{N}_0$ $\wedge f(a_i) \leq c(a_i)$ $\wedge$

$e =$ flujo saliente en cada vertice. (Kirchoff)

saturada: cuando $c(a_i) = f(a_i)$

Árbol generador



$$\left. \begin{array}{l} |V| = 8 \\ |A| = 7 \end{array} \right\} \text{Para un árbol.}$$

$T = (V, A)$ se llama árbol generador a $T' = (V', A')$

Árbol

$$V' = V$$

$$A' \subseteq A$$

Árbol minimal es árbol generador de peso mínimo.

Algoritmos de búsqueda: Prim y Kruskal.

Redes de Transporte

digrafo ponderado con:

• vertice fuente / $gr^+(f) = 0$ (no llegan)

• vertice sumidero / $gr^-(s) = 0$ (no salen)

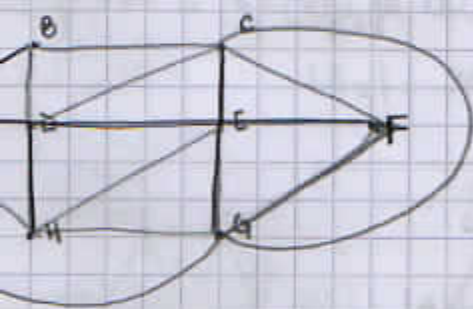
• función capacidad / $c: A \rightarrow \mathbb{N}_0$ $\wedge c(a_i) \geq 0$

• función flujo / $f: A \rightarrow \mathbb{N}_0$ $\wedge f(a_i) \leq c(a_i)$ $\wedge$

te = flujo saliente en cada vertice. (Kirchoff)

saturado: cuando $c(a_i) = f(a_i)$

Árbol generador



$$\left. \begin{array}{l} |V| = 8 \\ |A| = 7 \end{array} \right\} \text{Para un árbol.}$$

$T = (V, A)$ se llama árbol generador a $T = (V', A')$

Árbol

$$V' = V$$

$$A' \subseteq A$$

Árbol generador minimal es árbol generador de peso mínimo.

Algoritmos de búsqueda: Prim y Kruskal.

Isomorfismo de grafos



$\left. \begin{array}{l} G_1 \\ G_2 \\ G_3 \\ G_4 \end{array} \right\} \Rightarrow G_1 \text{ isomorfo a } G_2$
grado

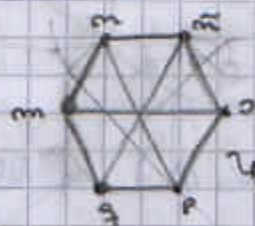
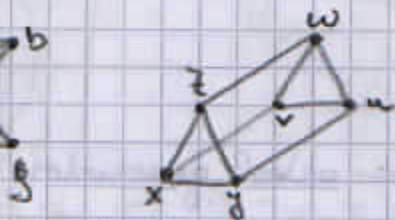
(A_1) y $G_2 = (V_2, A_2)$ son isomorfos si

V_2 biyectiva / $\{v, w\} \in A_1 \rightarrow \{f(v), f(w)\} \in A_2$

$\times \quad \left. \begin{array}{l} f(c) = v \\ f(d) = z \end{array} \right\}$ no vale porque $\{b, c\} \in G_1$ y
 $\{f(b), f(c)\} = \{y, v\} \notin G_2$

ambos vertices $\in G_1$ de $g(v) = i$ a $v \in G_2$ de $g(v) = i$.

$f(c) = z$
 $f(d) = v$



$\Rightarrow$ no tiene circuitos
de longitud 3

$|A| = 9$; 3-regular; conexo