

Ej. 1) Calcular el quinto término de la sucesión definida por $a_n = n^2 - 2n$

2) Calcular el quinto término de la sucesión definida por $\begin{cases} a_n = a_{n-1} - 2a_{n-2} \\ a_1 = 1, a_2 = 1 \end{cases}$ ^{Función de Recurrencia}

1. $a_5 = 5^2 - 2 \cdot 5 = 25 - 10 = 15$ Forma Funcional

2. $a_5 = a_4 - 2a_3 = (a_3 - 2a_2) - 2(a_2 - 2a_1) =$ Forma Recursiva
 $= [(a_2 - 2a_1) - 2a_2] - 2(a_2 - 2a_1) =$
 $= [(-1 - 2 \cdot 1) - 2(-1)] - 2(-1 - 2 \cdot 1) = [-3 + 2] + 6 = 5$

Interés

C_0 = capital inicial

% anual de interés

a_n = cantidad de dinero a lo largo de n años

$$a_n = a_{n-1} + x\% \text{ de } a_{n-1}$$

$$= a_{n-1} + 0, x a_{n-1}$$

$$= 1, x a_{n-1}$$

$$a_n = 1, x a_{n-1} \Rightarrow a_n = 1, x [1, x a_{n-2}] = (1, x)^2 a_{n-2}$$

$$\Rightarrow a_n = (1, x)^n a_0 = (1, x)^n C_0$$

Fibonacci

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

Ej 4:

$$c_4 = \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \\ 1 & 1 & 2 & \\ 2 & 1 & 1 & \\ 2 & 2 & & \end{array}$$



$$c_3 = \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{array}$$

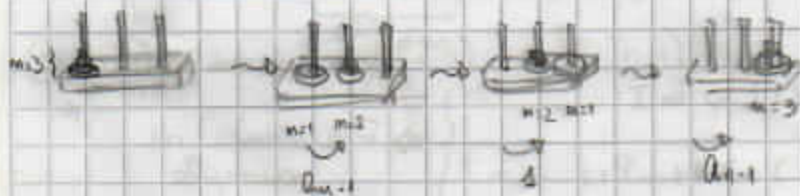
$$c_2 = \begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{array}$$

$$c_n = c_{n-1} + c_{n-2}$$

Tower of Hanoi

a_n = cantidad de movimientos para pasar n discos

$$a_1 = 1, a_2 = 3, a_3 = 7, a_4 = 15$$



$$a_n = a_{n-1} + 1 + a_{n-1}$$

$$a_n = 2a_{n-1} + 1$$

Desarreglos

D_n = cantidad de formas en que n personas se lleven al abrigo equivocado (todas)

$$D_1 = 0, D_2 = 1, D_3 = 2, D_4 = 9$$

$$D_n = (n-1)[D_{n-1} + D_{n-2}]$$

A	B	C	D
	A	E	D
	E	A	D
	D	A	E
B	A	E	A

3 posibilidades

$$3 \times (2+1) = 9$$

Ecuación lineal de Recurrencia de Orden K

$$a_n = C_1(n) a_{n-1} + C_2(n) a_{n-2} + \dots + C_K(n) a_{n-K} + f(n)$$

Si tiene el término $f(n)$ es ^{NH} no homogénea, sino ^H homogénea

Según los coeficientes, si son ^{CC} constantes: $C_i(n) = c_i \forall i, 1 \leq i \leq K$

si son ^{CV} no constantes: $\exists j: 1 \leq j \leq K, C_j(n) \neq c_j$

• Sea la ecuación de CC y H de orden 2:

$$a_n + C_1 a_{n-1} + C_2 a_{n-2} = 0, \text{ con } C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

Teorema I

Si T_n y R_n son 2 soluciones de la ec. entonces

$S_n = AT_n + BR_n$ también es solución de la ec. $\forall A, B \in \mathbb{R}$

$$D/ \quad T_n + C_1 T_{n-1} + C_2 T_{n-2} = 0 \xrightarrow{\times A} AT_n + C_1 AT_{n-1} + C_2 AT_{n-2} = 0$$

$$R_n + C_1 R_{n-1} + C_2 R_{n-2} = 0 \xrightarrow{\times B} BR_n + C_1 BR_{n-1} + C_2 BR_{n-2} = 0$$

$$\underbrace{(AT_n + BR_n)}_{S_n} + C_1 \underbrace{(AT_{n-1} + BR_{n-1})}_{S_{n-1}} + C_2 \underbrace{(AT_{n-2} + BR_{n-2})}_{S_{n-2}} = 0$$

$\Rightarrow S_n$ es solución /

Teorema II

Si $r_0 \in \mathbb{R}$ es raíz de la ecuación indicial (o característica)

$$r^2 + C_1 r + C_2 = 0, \text{ entonces } S_m = r_0^m \text{ es solución.}$$

P/ Reemplazamos r_0^m en la ec.: $r_0^m + C_1 r_0^{m-1} + C_2 r_0^{m-2} = 0$

$$\text{An } r_0^{m-2} (r_0^2 + C_1 r_0 + C_2) = 0$$

= 0 por ser raíz de la ec. indicial (EI)

$$\text{Ej: } r^2 + r - 6 = 0 \quad \text{raíces: } r_1 = 2 \text{ y } r_2 = -3$$

$$\text{Por T.I: } T_m = 2^m \text{ es sol.}$$

$$Q_m = (-3)^m \text{ es sol.}$$

$$\text{Por T.I: } S_m = A 2^m + B (-3)^m$$

Teorema III

Si r_1 y r_2 son dos raíces distintas de EI, entonces

$$S_m = A r_1^m + B r_2^m \text{ es solución de la ec. } \forall A, B \in \mathbb{R}, \text{ y}$$

dados m_0 y $m_1 \exists A_0, B_0$ tal que $S_m = A_0 r_1^m + B_0 r_2^m$ verifica

$$\begin{cases} S_0 = m_0 \\ S_1 = m_1 \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{P/ } r_1 \text{ es raíz de EI } \xrightarrow{\text{T.I}} r_1^m \text{ es sol.} \\ r_2 \text{ " " " " " } r_2^m \text{ " " " " } \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Por } S_m = A r_1^m + B r_2^m \\ \text{T.I es sol.} \end{array}$$

$$\text{Quiero que } \begin{cases} S_0 = m_0 \iff A r_1^0 + B r_2^0 = A + B = m_0 \\ S_1 = m_1 \iff A r_1^1 + B r_2^1 = A r_1 + B r_2 = m_1 \end{cases}$$

El sist. tiene solución porque $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ r_1 & r_2 \end{vmatrix} \neq 0$ y son A_0, B_0

Resolución de Fibonacci

$$Q_n = Q_{n-1} + Q_{n-2} \quad \text{con } Q_0 = Q_1 = 1$$

$$Q_n - Q_{n-1} - Q_{n-2} = 0$$

$$r^2 - r - 1 = 0$$

$$r_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

$$r_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

$$\Rightarrow r_1^m = \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^m 2^{-m} \quad \text{y} \quad r_2^m = \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^m 2^{-m}$$

$$\Rightarrow Q_n = A \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^n 2^{-n} + B \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^n 2^{-n}$$

$$\begin{cases} Q_0 = A + B = 1 \end{cases}$$

$$A = \frac{1 + \sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$$

$$Q_1 = A \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^1 2^{-1} + B \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^1 2^{-1} = 1$$

$$B = -\frac{1 - \sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$$

Teorema IV

Si r_0 es raíz doble de la ~~EQ~~ ^{EI} y $r_0 \neq 0$, entonces

$u = r_0^m$ es solución de la ec.

$$\begin{aligned} D/ \quad & au + c_1 au_{-1} + c_2 au_{-2} = m r_0^m + c_1 (m-1) r_0^{(m-1)} + c_2 (m-2) r_0^{(m-2)} = \\ & = r_0^{m-2} (m r_0^2 + c_1 (m-1) r_0 + c_2 (m-2)) = \\ & = r_0^{m-2} [m (\underbrace{r_0^2 + c_1 r_0 + c_2}_{=0 \text{ por ser } r_0 \text{ raíz}}) - c_1 r_0 - 2c_2] = \end{aligned}$$

Como r_0 es raíz doble, $r^2 + c_1 r + c_2 = (r - r_0)^2 = r^2 - 2r r_0 + r_0^2$

$$c_1 = -2r_0 \text{ y } c_2 = r_0^2$$

$$\begin{aligned} \text{Reemplazo } c_1 \text{ y } c_2: \quad & r_0^{m-2} [-(-2r_0) r_0 - 2(r_0^2)] = \\ & = r_0^{m-2} [\underbrace{2r_0^2 - 2r_0^2}_{=0}] = 0 / \end{aligned}$$

Teorema V

Si r_0 es raíz doble de EI y $r_0 \neq 0$, entonces

$Su = A r_0^m + B m r_0^m$ es solución de la ec. y dados

m_0 y $m_1 \exists A_0, B_0 \in \mathbb{R} / Su = A_0 r_0^m + B_0 m r_0^m$ significa que

$$\begin{cases} S_0 = m_0 \\ S_1 = m_1 \end{cases}$$

D/ Si r_0 es raíz doble $\xrightarrow{\text{T.I}} r_0^m$ es sol.
 $\xrightarrow{\text{T.II}} m r_0^m$ es sol.
 $\xrightarrow{\text{T.I}} Su = A r_0^m + B m r_0^m$ es sol.

$$\begin{cases} S_0 = A \cdot r_0^0 + B \cdot 0 \cdot r_0^0 = A = m_0 \\ S_1 = A \cdot r_0^1 + B \cdot 1 \cdot r_0^1 = A r_0 + B r_0 = m_1 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{tiene sol. porque} \\ \left| \begin{array}{cc|c} 1 & 0 & m_0 \\ r_0 & r_0 & m_1 \end{array} \right| \neq 0 \quad \text{y} \\ \text{son } A_0 \text{ o } B_0 / \end{array}$$

Eg: $4u + 4u_{-1} - 3u_{-2} + 2u_{-3} = 0$

EI: $r^3 - 4r^2 + 5r - 2 = 0$ Gauss $\begin{matrix} \pm 1 \\ \pm 2 \end{matrix}$

$\begin{array}{c|ccc|c} 1 & 1 & -4 & 5 & -2 \\ \hline & 1 & -3 & 2 & \\ \hline 1 & 1 & -3 & 2 & 0 \\ \hline & 1 & -2 & & \\ \hline 1 & 1 & -2 & 0 & r-2 \end{array}$

$r_1 = 1$ (doble) $\begin{cases} r_1^m = 1^m = 1 \\ m r_1^m = m 1^m = m \end{cases}$
 $r_2 = 2$ (simple) $r_2^m = 2^m$

$u = A \cdot 1 + Bm + C \cdot 2^m$

• Sea la ecuación de cc y NH:

$4u + C_1 u_{-1} + \dots + C_r u_{-r} = F(m) \neq 0$

- 1) Resolver la homogénea. $\rightarrow u^h$
- 2) Buscar una solución particular de la NH. $\rightarrow u^p$
- 3) $u = u^h + u^p$ son todas las soluciones de la ec.

Coefficientes indeterminados

$F(m)$	u^p	Ejemplo
$C \cdot Q^m$, con a raíz de EI	KQ^m	$4u - 4u_{-1} + 3u_{-2} = 5 \cdot 2^m \rightarrow u^p = K 2^m$ $K 2^m - 4K 2^{m-1} + 3K 2^{m-2} = 5 \cdot 2^m \Rightarrow K = -20$
$C \cdot Q^m$, con a raíz de EI de multiplicidad t	$Ka^m \cdot m^t$	$4u - 4u_{-1} + 3u_{-2} = 5 \cdot 3^m$ raíces de EI $\begin{matrix} 1 \\ 3 \end{matrix}$ $u^p = K m 3^m \rightarrow K = \frac{15}{2}$
Pol. de grado K , con las raíces de EI distintas de 1	Pol. genérico de grado K	$\textcircled{K} = m^2 + 3 \rightarrow u^p = (Cu^2 + Du + E) \cdot m$
Si 1 es raíz de multiplicidad t .	Pol. genérico de grado K $\left[\begin{matrix} \text{Pol. genérico de grado } K \\ m^t \end{matrix} \right]$	$u = \underbrace{A + B 3^m}_{u^h} + \underbrace{\frac{1}{6} m^3 - m^2 - \frac{2}{6} m}_{u^p}$
$\text{Sen}(a \cdot m)$ ó $\text{Cos}(a \cdot m)$	$C \cdot \text{Sen}(a \cdot m)$ + $D \cdot \text{Cos}(a \cdot m)$	
$\text{Sen}(a \cdot m)$ ó $\text{Cos}(a \cdot m)$	$\text{Sen}(a \cdot m)$ + $\text{Cos}(a \cdot m)$	