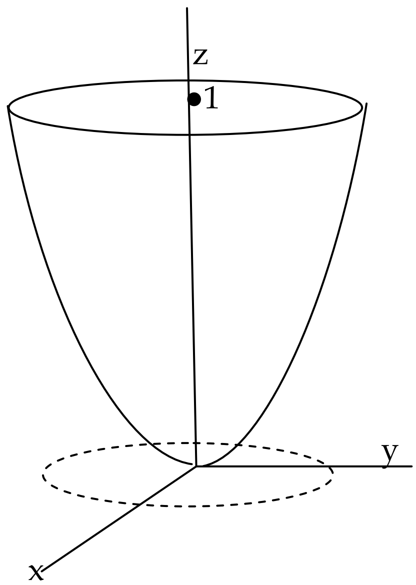
¿Cuándo se usa el jacobiano y cuándo no?

Supongamos que queremos calcular el área de un trozo de paraboloide:

$$z = x^2 + y^2 \quad \text{con} \quad z \le 1$$



La proyección de la superficie en el plano *xy* es un círculo de radio 1.

Para calcular el área tenemos que parametrizar la superficie.

Opción 1) Si definimos $\vec{\Sigma}(x,y) = (x, y, x^2 + y^2)$ tendremos:

$$\vec{\Sigma}'_x \times \vec{\Sigma}'_y = \begin{vmatrix} \breve{i} & \breve{j} & \breve{k} \\ 1 & 0 & 2x \\ 0 & 1 & 2y \end{vmatrix} = (-2x, -2y, 1) \quad \text{y por lo tanto} \quad \left\| \vec{\Sigma}'_x \times \vec{\Sigma}'_y \right\| = \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}$$

Para calcular el área, entonces, tenemos que calcular

$$\iint\limits_{\substack{\text{Proyección}\\ \text{sobre el}\\ \text{plano xy}}} \left\| \vec{\Sigma}'_x \times \vec{\Sigma}'_y \right\| dx\,dy = \iint\limits_{\substack{\text{Círculo}\\ \text{de radio 1}}} \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}\, dx\,dy = \int_{-1}^{1} dx \left(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}\, dy \right)$$

Acá podemos optar por continuar trabajando con coordenadas cartesianas, que resulta bastante incómodo debido a la simetría circular que tienen la proyección y el integrando, o bien pasar a coordenadas polares. El ángulo φ variará entre 0 y 2π, para dar un giro completo, y ρ variará entre 0 y 1, y no debemos olvidar poner el determinante jacobiano correspondiente pues, al pasar de coordenadas cartesianas a polares, $dx\,dy$ se convierte en $\rho\, d\rho\, d\varphi$

Entonces resulta:

$$\acute{A}rea = \underset{\substack{\text{Círculo}\\ \text{de radio 1}}}{\iint} \sqrt{4(x^2+y^2)+1}\,dx\,dy = \int_0^{2\pi} d\varphi \Big(\int_0^1 \underbrace{\rho}_{\text{Jacobiano}} \sqrt{4\rho^2+1}\,d\rho\Big) = 2\int_0^{2\pi} d\varphi \Big(\underbrace{\int_0^1 \rho\sqrt{\rho^2+\frac{1}{4}}\,d\rho}_{\substack{\text{Se usa sustitución}\\ \text{o se busca en tabla}}}\Big) = \frac{5}{6}\sqrt{5}\pi$$

(El jacobiano *lo tuvimos que agregar nosotros*; podemos pensar que es una especie de "pago" que tenemos que hacer, por haber decidido cambiar de coordenadas en el medio del proceso de integración)

<u>*Opción 2)*</u> En lugar de usar la parametrización cartesiana podemos basarnos en la simetría circular del cuerpo y definir $\vec{\Sigma}(v,u) = (u\cos(v), u\,sen(v), u^2)$ (que obviamente se obtiene "por reminiscencia" de las polares…) donde $v \in [0,2\pi]$ y $u \in [0,1]$ para que *x* e *y* recorran el círculo de radio 1 y *z* varíe entre 0 y 1.

Es $\vec{\Sigma}'_v \times \vec{\Sigma}'_u = \begin{vmatrix} \breve{i} & \breve{j} & \breve{k} \\ -u\,sen(v) & u\cos(v) & 0 \\ \cos(v) & sen(v) & 2u \end{vmatrix} = (2u^2\cos(v), 2u^2\,\mathrm{sen}(v), -u)$ y por lo tanto

$$\left\|\vec{\Sigma}'_v \times \vec{\Sigma}'_u\right\| = \sqrt{4u^4\cos^2(v) + 4u^4 sen^2(v) + u^2} = \sqrt{4u^4(sen^2(v)+\cos^2(v)) + u^2} = u\sqrt{4u^2+1}$$

Entonces, para calcular el área, tenemos que calcular

$$\underset{\substack{\text{Región}\\ \text{de variacuón}\\ \text{de v y u}}}{\iint} \left\|\vec{\Sigma}'_v \times \vec{\Sigma}'_u\right\| dv\,du = \underset{\substack{\text{Rectángulo}\\ [0,2\pi]\times[0,1]}}{\iint} u\sqrt{4u^2+1}\,dv\,du = \int_0^{2\pi} dv \Big(\int_0^1 \underbrace{u}_{\substack{\text{Este u } \textit{no es un}\\ \textit{jacobiano}\\ \text{sino que}\\ \text{forma parte}\\ \text{del elemento}\\ \text{de área}}} \sqrt{4u^2+1}\,du\Big)$$

Acá no hace falta hacer ningún cambio de coordenadas porque el recinto de integración es muy sencillo: un rectángulo. La integral según *r* se busca en tablas o se resuelve por sustitución:

$$\acute{A}rea = 2\int_0^{2\pi} dv \Big(\int_0^1 u\sqrt{u^2+\frac{1}{4}}\,du\Big) = \frac{5}{6}\sqrt{5}\pi$$

El resultado que se obtuvo es exactamente el mismo, pero con esta segunda parametrización no fue necesario introducir ningún jacobiano pues el elemento de área "ya venía definido en unas variables convenientes desde el principio", y no debimos imponer nosotros ningún cambio de coordenadas por comodidad del cálculo.