Coloquio de AMIII - 07/02/13

1. *a*) Mostrar para qué valores de α y β la siguiente integral CV.

$$I = \int_0^\infty \frac{x^\alpha}{1+x^\beta} dx$$

   b) Para $\alpha = 2$ y $\beta = 1$ calcular I.

2. *a*) Defina transformada de seno de fourier y antitransformada de seno de fourier. Expresar como integral doble iterada indicando a qué función converge.

   b) Hallar $\mathcal{F}_s(f)$ si

$$f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x \leq -1 \\ 1 & \text{si } -1 \leq x \leq \pi/2 \\ e^{-x} & \text{si } \pi/2 \leq x \end{cases} \tag{1}$$

   c) Escriba la antitransformada de fourier correspondiente al punto anterior. Indique a que función converge.

3. *a*) Defina producto de convolución de dos funciones $x(t)$ e $y(t)$ definidas en $(-\infty; +\infty)$. Escriba la expresión de dicho producto si $x(t) = y(t) = 0 \forall t < 0$ (funciones causales).

   b) Demuestre que si las funciones f y g son continuas por partes de orden exponencial, el producto convolución de ambas también lo es.

   c) Estableciendo hipótesis necesarias, demuestre la propiedad que permite obtener la transformada de Laplace del producto de convolución de dos funciones causales en función de las transformadas de Laplace de cada una de dichas funciones.

   d) (Acá no me acuerdo bien el enunciado, pero pedia algo así).
   Sabiendo que $X(0) = X'(0) = Y(0) = Y'(0) = 0$ obtener $X(t)$ e $Y(t)$ si

$$\begin{cases} x''(t) + 2y'(t) = H(t) \\ x'(t) + 2y''(t) = t \end{cases} \tag{2}$$

   e) Obtener $x(t)$ e $y(t)$

4. *a*) Defina dónde la serie trigonométrica de fourier converge cuadráticamente

   b) dónde converge puntualmente

   c) dónde converge uniformemente

   d) Sabiendo que la serie obtenida derivando término a término de la siguiente función es la serie de la derivada, hallar $f'(x)$ cuando

$$f(x) = \begin{cases} -3x + b & \text{si } 0 < x < 1 \\ 1 & \text{si } 1 < x < 2 \\ m(x-2) + 1 & \text{si } 2 < x < 3 \end{cases} \tag{3}$$

5. *a*) Defina
   1) Holomorfía en $f(z_0)$
   2) Punto singular
   3) Punto singular aislado
   4) Clasificar los tipos de singularidades segun el desarrollo de Laurent.

   b) Proponer $\Phi(z)$ para que $f(z) = \frac{\Phi(z)}{sen^2(e^z - 1)}$ tenga una singularidad evitable en $z_0 = ln(1+3\pi) - i4\pi$ y un polo de orden 1 en $z_1 = ln(1+5\pi) - i8\pi$

   c) Clasificar las singularidades de f(z).