

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Conceptos fundamentales

- Se llama **ecuación diferencial** a una ecuación que vincula la variable "x", la función incógnita "y" y sus derivadas sucesivas y' , y'' , y''' , ..., $y^{(n)}$, es decir, es una ecuación de la forma:

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

- Si la función incógnita $y = y(x)$ depende de una sola variable independiente x, la ecuación diferencial se llama **Ordinaria**.

Ejemplos

1) $\frac{dy}{dx} + xy = 0$ 2) $y'' + y' + x = \cos x$ 3) $(x^2 + y^2)dx + (x + y)dy = 0$

- Determina el **orden** de una ecuación diferencial, la derivada de mayor orden que aparece en dicha ecuación.

Ejemplos

- a) $y' + xy = e^{2x}$ (primer orden)
b) $y'' + p(x)y = 0$ (segundo orden) y observar que p(x) es dato.
c) $y^{(9)} - xy'' = x^3$ (novenio orden)

- Se llama **solución** de una ecuación diferencial ordinaria de orden "n" a una función $y = f(x)$ definida en un intervalo real (a,b) junto con sus derivadas sucesivas hasta el orden n inclusive, tal que al sustituir $y = f(x)$ en la ecuación diferencial la convierte en una identidad con respecto a "x" en dicho intervalo.

Ejemplo

Sea $y'' + y = 0$

Las funciones $y_1 = \sin x$; $y_2 = A \cos x$; $y_3 = \cos x$; $y_4 = B \cos x$
 $y_5 = A \sin x + B \cos x$ en todos los casos $A, B \in \mathbb{R}$, son soluciones de la ecuación anterior. Se deja para el lector **verificarlas**.

Ecuaciones Diferenciales de Primer orden

Una ecuación diferencial ordinaria de primer orden tendrá como forma general

$$F(x, y, y') = 0$$

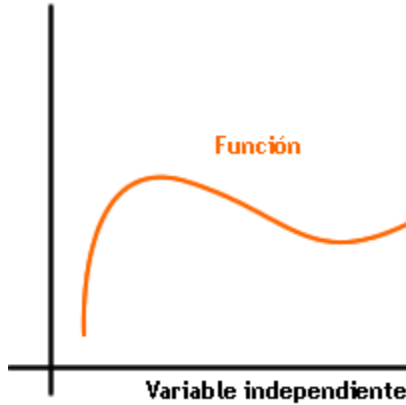
Si de ésta, es posible despejar la y' donde resulta $y' = f(x, y)$, entonces representa una ecuación diferencial de primer orden resuelta con respecto a su primera derivada y en tal caso es válido el siguiente teorema que sólo enunciaremos y aplicaremos:

Teorema de Existencia y Unicidad de soluciones de E.D.O o de Cauchy

Dada una ecuación diferencial ordinaria $y' = f(x,y)$ donde la función $f(x,y)$ está definida en un recinto D del plano (xy) que contiene al punto $M_0 = (x_0, y_0)$.

Si se cumple que:

Variable dependiente (y)



a) $f(x,y)$ es una función continua de dos variables x e y en el recinto D .

b) f admite derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ continua con respecto a x e y en D .

Entonces:

Existe una y sólo una solución $y = g(x)$ de la ecuación dada, que satisface la condición $y_0 = g(x_0)$

- El significado geométrico del teorema es que existe una única función solución $y = g(x)$ que pase por el punto $M_0 = (x_0, y_0)$.
- Del teorema se deduce que la ecuación diferencial tiene infinitas soluciones diferentes para $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots$ etc. si pertenecen a D .
- La condición $y_0 = g(x_0)$ se denomina condición inicial.
- El teorema expresa condiciones **suficientes** para la existencia de solución única de ecuaciones $y' = f(x,y)$ que satisfacen la condición inicial $y_0 = g(x_0)$, pero estas condiciones **no son necesarias**.

Ejemplo 1

Sea $y'y^2 = 1 \Rightarrow y' = \frac{1}{y^2}$. Ahora si aplicamos el teorema precedente resulta:

$f(x, y) = \frac{1}{y^2}$ y $f'_y(x, y) = -\frac{2}{y^3}$ ambas funciones no son continuas en $\mathbb{R}^2$ por lo tanto $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y \neq 0\} \subset \mathbb{R}^2$ (es todo el plano (xy) sin el eje x) o sea, que en un punto de la forma $(x_0, 0)$ no se puede garantizar la existencia y unicidad de una solución, sin embargo $y = \sqrt[3]{3 \cdot (x - c)}$ es solución de la ecuación anterior y por el punto $(x_0, 0)$ pasa una única solución que es $y = \sqrt[3]{3 \cdot (x - x_0)}$

Conclusión: Este es el caso en el que **no se cumple** el teorema en puntos $(x_0, 0)$ y sin embargo hay **una única** solución.

Ejemplo 2

$$\text{Sea } (y')^3 = \frac{27}{8}y^2 \Rightarrow y' = \frac{3}{2}y^{\frac{2}{3}}$$

Ahora aplicando el teorema de existencia y unicidad resulta:

$$f(x, y) = \frac{3}{2}y^{\frac{2}{3}} \text{ continua en } R^2$$

$$f'_y(x, y) = y^{-\frac{1}{3}} \text{ continua en } R^2 - \{(x, y) / y = 0\}$$

Por lo tanto no se puede implicar existencia y unicidad de solución en puntos que están sobre el eje x, o sea, de la forma $(x_0, 0)$.

$$\text{Sin embargo } y = \frac{(x-c)^3}{8} \text{ es solución de la ecuación anterior y además } y = \frac{(x-x_0)^3}{8}$$

pasa por $(x_0, 0)$. Además $y = 0$ es otra solución de la ecuación dada que también pasa por dicho punto.

Conclusión : Este es el caso en el que **tampoco se cumple el teorema** y hay **mas** de una solución posible que pase por $(x_0, 0)$.

Ejemplo 3

$$\text{Sea } y' = xy + e^{-y}$$

$$\text{Sabemos que } f(x, y) = xy - e^{-y} \text{ y } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x - e^{-y} \text{ son continua en } R^2.$$

Conclusión : Por lo tanto $\forall (x_0, y_0) \in R^2$ **existe solución única** $y = g(x) / y_0 = g(x_0)$

- Se llama **solución general** de la ecuación diferencial ordinaria $y' = f(x, y)$ a una función $y = g(x, c)$ que depende de una constante arbitraria "c" y que cumple las condiciones:
 - a) satisface la ecuación diferencial
 - b) cualquiera sea la condición inicial $y_0 = g(x_0)$ siempre se puede asignar un valor c_0 a la constante "c" tal, que la función $y = g(x, c_0)$ satisfaga la condición inicial. (Tener presente que (x_0, y_0) cumple las condiciones de existencia y unicidad de soluciones)
- Se llama **solución particular** de la ecuación diferencial ordinaria $y' = f(x, y)$, a la que se obtiene de la solución general, asignando un valor determinado a la constante arbitraria "c".
- Durante la búsqueda de la solución general de una ecuación diferencial ordinaria, llegamos a menudo a expresiones que responden a la forma $H(x, y, c) = 0$ no resuelta respecto de "y". Al resolverla respecto de "y" obtenemos la solución general, sin embargo no siempre es posible hacerlo mediante funciones elementales, en tales casos, la solución general queda en forma implícita y se la denomina **integral general** de la E.D.O.

Desde el punto de vista geométrico la integral general representa una familia de curvas en el plano (xy) dependientes de una constante o parámetro arbitrario "c". A dichas curvas se las denominan **curvas integrales** de la ecuación dada y cada Integral particular representa una de estas curvas.

- Una solución de una E.D.O. que no sea general (no contiene las constantes), ni particular (no se obtiene de la general para algún c_0) se la denomina **solución singular**

Nuestro objetivo será ahora, plantear una ecuación diferencial ordinaria de primer orden y encontrar un método de resolución para obtener los distintos tipos de soluciones que definimos anteriormente.

Para ello comenzaremos con el primer método, el más sencillo.

Ecuaciones Diferenciales de primer orden separables

Es una ecuación de primer orden $F(x, y, y') = 0$ que puede expresarse en la forma:

$$h(y).y' = g(x) \quad \text{o bien} \quad h(y) dy = g(x) dx$$

La solución será cualquier función diferenciable definida implícita o explícitamente, que cuando se la sustituye en la E.D.O la reduce a la identidad.

P/ Sea pues, $y = f(x)$ una solución de $h(y).y' = g(x)$

resultará $h(f(x)).f'(x) = g(x)$ (1), luego integrando miembro a miembro la expresión (1)

nos queda: $\int h(f(x)).f'(x) dx = \int g(x) dx$ y por medio de la sustitución $y = f(x)$

concluimos que $\int h(y) dy = \int g(x) dx$ donde nos dará una relación entre x e y que satisface la E.D.O.

Ejemplos

$$1) (1+x)dy - y dx = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y}{1+x}$$

Por lo tanto $f(x, y) = \frac{y}{1+x}$ y $f'_y(x, y) = \frac{1}{1+x}$ son continuas en $\mathbb{R}^2 - \{(x, y) / x = -1\}$

región en la que se puede asegurar la existencia y unicidad de soluciones.

Resolvemos la ecuación separando variables:

$$(1+x)dy = y dx \Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{dx}{1+x} \quad \text{con } y \neq 0. \text{ Si ahora integramos miembro a miembro}$$

$$\text{queda: } \int \frac{1}{y} dy = \int \frac{1}{x+1} dx \Rightarrow \ln|y| = \ln|x+1| + c \quad (\text{como "c" es una constante arbitraria,}$$

conviene llamar $c = \ln k$, ya que la función logaritmo tiene como imagen a todos los reales y luego logramos eliminar de la expresión los logaritmos).

$$\text{Por lo tanto: } \ln|y| = \ln|x+1| + \ln k \Rightarrow \ln|y| = \ln(k \cdot |x+1|) \Rightarrow |y| = e^{\ln(k \cdot |x+1|)}$$

$$\Rightarrow |y| = k \cdot (x+1).$$

Los módulos se pueden quitar en ambos miembros ya que la constante "k" absorbe las distintas combinaciones de signos, entonces la solución general será: $y = k(x+1)$

Concluimos diciendo que la solución general es una familia de rectas.

¿ Què podemos decir de $y = 0$? ¿Es solució de la ecuació anterior ? . Con sólo verificarlo nos daremos cuenta que sí. La otra pregunta que cabe hacernos es: $y = 0$

¿Es solució singular de la E.D.O. planteada?.

No es solució singular, ya que si en la solució general $y = k.(x+1)$ le asignamos el valor $k = 0$, obtendremos la recta en cuestió.

Recordar que para ser solució singular, la misma no se debe poder determinar de la solució general.

Por otro lado, tener presente que las ecuaciones diferenciales ordinarias que se resuelven por variables separables, **pueden generar soluciones singulares**, siendo estas las restricciones que uno debe imponer al pasar de miembro las expresiones que contienen a la variable "y" de la ecuació.

2) Sea $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$.Encontrar la solució que cumpla con $y(0) = 1$

$$y \, dy = -x \, dx \Rightarrow \int y \, dy = -\int x \, dx \Rightarrow \frac{y^2}{2} + \frac{x^2}{2} = c \Rightarrow y^2 + x^2 = k$$

(donde $k = 2c$)

La solució general es una familia de circunferencias con centro en (0,0) y radio variable y està expresada como integral general de la E.D.O.

Aplicamos la condició inicial $y(0) = 1$ y sabemos que por allí hay una única solució porque lo indica el teorema de existencia y unicidad. **Comprobarlo!**

Por lo tanto $k = 1$. Entonces escribimos $y^2 + x^2 = 1$ y la solució expresada en forma explícita queda $g : (-1,1) \rightarrow \mathbb{R} / g(x) = \sqrt{1-x^2}$.

Aclaració : se toma el intervalo (-1,1) en lugar del intervalo $[-1,1]$ que es el dominio de g, porque en este caso la función es solució de una E.D.O. y debe ser diferenciable en todo punto del intervalo. En los extremos del mismo se pierde esta propiedad de la solució.

Además consideramos esta curva y no la otra $(-\sqrt{})$ porque es la rama de la circunferencia que incluye a la condició inicial.

Concluimos la exposició teórica de las ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden por variables separables con esta propiedad:

- Una ecuació de la forma $M_1(x).N_1(y) \, dx + M_2(x).N_2(y) \, dy = 0$ es **separable** en un cierto dominio donde $N_1(y)$ y $M_2(x)$ no se anulan, si se puede resolver separando las variables mediante la expresión $\frac{M_1(x)}{M_2(x)} \, dx + \frac{N_2(y)}{N_1(y)} \, dy = 0$.

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias Totales Exactas

Nota de Repaso

a) Sea $f(x,y)$ un campo escalar, diremos que f es **diferenciable** en $\bar{x} = (x_0, y_0)$ si existe un vector $\vec{a} = (a_1, a_2)$ y una función $g(H)$ donde $\lim_{|H| \rightarrow 0} g(H) = 0$ tal que:

$$f(\bar{x} + H) - f(\bar{x}) = \vec{a} \cdot H + \vec{H} \cdot G(H)$$

- El vector $\vec{a} = \nabla f(\bar{x}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right)(\bar{x})$ se denomina gradiente de f
- La funci3n lineal del incremento $df(\bar{x}) = \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}).dx + \frac{\partial f}{\partial y}(\bar{x}).dy$ se denomina diferencial total de f en $\bar{x}$

b) Una expresi3n diferencial de la forma $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ se dice **exacta** si existe una funci3n f diferenciable tal que $df(x, y) = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$. A dicha funci3n f se la denomina **funci3n potencial** de la forma diferencial.

Enunciaremos un teorema que permitir3 decider m3s adelante si una E.D.O. es diferencial total exacta o no. A este teorema tambi3n se lo denomina **Condici3n de Exactitud**

Teorema

Sean P, Q clase $C^1(D)$ donde D es una regi3n rectangular del plano (xy) , entonces

$P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ es diferencial exacta si y solo si $\frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y)$ y la funci3n f tal que $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = P(x, y)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = Q(x, y)$ resulta ser:

$$f(x, y) = \int_{x_0}^x P(x, y_0)dx + \int_{y_0}^y Q(x, y)dy \text{ con } (x_0, y_0) \text{ un punto fijo de la regi3n } D.$$

Muchas veces es operativo obtener est3 funci3n por otro procedimiento que expondremos a continuaci3n:

Ejemplo

Sea $2xy dx + (x^2 - 1)dy$. Queremos ver si es diferencial exacta y luego, si es posible obtener la funci3n f .

Sabemos que $P(x, y) = 2xy$ y que $Q(x, y) = x^2 - 1$, ahora probaremos la condici3n de exactitud que indica el teorema anterior: $\frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = 2x = \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y)$. Como se cumple

diremos que la expresi3n es diferencial exacta y existe una funci3n f , que es potencial de dicha forma, a saber:

$f'_x(x, y) = 2xy$ y $f'_y(x, y) = x^2 - 1$. Considerando por ejemplo la primera expresi3n, $f'_x(x, y) = 2xy$ e integrando con respecto a "x" y sumando una constante que dependa de "y" tenemos $f(x, y) = x^2 y + \alpha(y)$. Luego a esta 3ltima expresi3n la derivamos con respecto a "y": $f'_y(x, y) = x^2 + \alpha'(y)$ y adem3s $f'_y(x, y) = x^2 - 1$,

igualando ambas expresiones, $x^2 + \alpha'(y) = x^2 - 1$ se obtiene que $\alpha'(y) = -1$. Integramos esta 3ltima expresi3n con respecto a su 3nica variable, "y", para luego reemplazar lo obtenido en la f3rmula de $f(x, y)$ a saber: $\alpha(y) = -y + c$.

Por lo tanto $f(x, y) = x^2 y - y + c$ (a veces se puede prescindir de la cte. "c").

Ecuaciones Diferenciales Exactas

La ecuación diferencial de primer orden $P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0$ se dice **exacta**, si el primer miembro de la igualdad es una forma diferencial exacta.

En tal caso, si $f(x, y)$ es la función potencial de la forma diferencial exacta y esta forma se expresa $df(x, y) = 0$, una familia de soluciones de la ecuación diferencial será $f(x, y) = k$

Considerando el ejemplo anterior podemos decir que $2xy dx + (x^2 - 1) dy = 0$ es una E.D.O. total exacta y teniendo en cuenta el procedimiento anterior concluimos que $x^2 y - y = k$ es la solución general.

Otras ecuaciones diferenciales exactas:

a) $(2y^2 - 2y) dx + (2xy - x) dy = 0$

b) $(\cos x \cdot \sin x - xy^2) dx + (y - x^2 y) dy = 0$ **Resolverlas!**

Ecuaciones diferenciales de primer orden Homogéneas

Funciones Homogéneas

Se dice que $f(x, y)$ es una función **homogénea de grado n** real cualquiera en un recinto D del plano (xy), si $\forall \lambda > 0$ se cumple que: $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n \cdot f(x, y)$.

Ejemplos

a) $f(x, y) = x - 3\sqrt{xy} + 5y$ es homogénea de grado 1 ya que:

$$\begin{aligned} f(\lambda x, \lambda y) &= \lambda x - 3\sqrt{\lambda^2 xy} + 5\lambda y \\ &= \lambda(x - 3\sqrt{xy} + 5y) = \lambda \cdot f(x, y) \end{aligned}$$

b) $f(x, y) = \sqrt{x^3 + y^3}$ es homogénea de grado $n = 3/2$. **Comprobarlo!**

c) $f(x, y) = x^2 + y^2 + 1$ no es homogénea. La suma de constantes destruye la homogeneidad, salvo que sea homogénea de grado 0.

d) $f(x, y) = \begin{cases} x^{1/4} y^{-5/4} \operatorname{tg}\left(\frac{y}{x}\right) & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ es homogénea de grado $n = -1$

e) $f(x, y) = \frac{x}{2y} + 4$ es homogénea de grado 0. **Comprobarlo!**

Observaci3n: Toda funci3n homog3nea de grado “n” se puede escribir:

$$f(x, y) = x^n f\left(1, \frac{y}{x}\right) \quad y \quad f(x, y) = y^n f\left(\frac{x}{y}, 1\right)$$

Ejemplo

$f(x, y) = x^2 + 3xy + y^2$ es homog3nea de grado $n = 2$, por lo tanto se puede escribir:

$$f(x, y) = x^2 \left[1 + 3\left(\frac{y}{x}\right) + \left(\frac{y}{x}\right)^2 \right] = x^2 f\left(1, \frac{y}{x}\right)$$

$$f(x, y) = y^2 \left[\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 3\left(\frac{x}{y}\right) + 1 \right] = y^2 f\left(\frac{x}{y}, 1\right)$$

Esta observaci3n justifica en cierta forma la sustituci3n que emplearemos para resolver E.D.O homog3neas.

Ecuaciones Diferenciales Homog3neas

Si una ecuaci3n diferencial de primer orden $F(x, y, y') = 0$ expresada en la forma $P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0$ es tal que P y Q son homog3neas de igual grado se la denomina **homog3nea**.

Dicha expresi3n siempre se puede reducir a una ecuaci3n diferencial de variables separables mediante una sustituci3n algebraica. (Tener en cuenta la observaci3n anterior).

P/ Sea $P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0$ con P, Q homog3neas de grado “n”.

Con la sustituci3n $\frac{y}{x} = u$ de donde $y = u \cdot x$ y derivando miembro a miembro, teniendo en cuenta que $u = u(x)$ queda $dy = u dx + x du$.

Ahora podemos reemplazar estas expresiones en la ecuaci3n diferencial propuesta con el objetivo de reducirla a una ecuaci3n de variables separables:

$P(x, xu) dx + Q(x, xu)(u dx + x du) = 0$, como P y Q son homog3neas de grado n, podemos expresar esta igualdad $x^n P(1, u) dx + x^n Q(1, u)(u dx + x du) = 0$. Si dividimos miembro a miembro por x^n y distribuyendo el segundo t3rmino:

$$P(1, u) dx + Q(1, u) u dx + x Q(1, u) du = 0 \Rightarrow [P(1, u) + Q(1, u) u] dx + x Q(1, u) du = 0$$

Por lo tanto : $\frac{dx}{x} = -\frac{Q(1, u) du}{P(1, u) + Q(1, u) u}$ es una E.D.O. de variables separables.

Observaci3n: Si es conveniente, tambi3n se puede utilizar la sustituci3n $\frac{x}{y} = v$ de donde

$x = v \cdot y$ considerando que $v = v(y)$

Ejemplo

$$(x^2 + y^2) dx + (x^2 - xy) dy = 0$$

P, Q son ambas homogéneas de grado 2 y haciendo la sustitución $y = u.x$ tenemos:

$$(x^2 + u^2 x^2) dx + (x^2 - u x^2)(u dx + x du) = 0$$

$$x^2(1+u) dx + x^3(1-u) du = 0$$

$$\frac{1-u}{1+u} du + \frac{dx}{x} = 0$$

Efectuando la división en el primer término y separando las variables con el objetivo de integrar miembro a miembro tenemos:

$$\left(-1 + \frac{2}{1+u}\right) du + \frac{dx}{x} = 0$$

$$-u + 2 \ln|1+u| + \ln|x| + \ln|c| = 0$$

Ahora sustituyendo nuevamente $u = \frac{y}{x}$ y aplicando propiedades de logaritmo, obtenemos la solución general:

$$-\frac{y}{x} + 2 \ln\left|1 + \frac{y}{x}\right| + \ln|x| + \ln|c| = 0$$

$$c(x+y)^2 = x.e^{y/x}$$

Clasificación de Ecuaciones Diferenciales por Linealidad

Una ecuación diferencial es **lineal** si tiene la forma:

$$a_n(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x) y = g(x)$$

y además reúne las siguientes características:

- a) la variable dependiente "y" y todas sus derivadas son de primer grado.
- b) cada coeficiente sólo depende de la variable independiente "x".

En caso contrario la ecuación diferencial se dice **no lineal**.

Ecuaciones Diferenciales Lineales de primer orden

Si una ecuación diferencial es lineal de primer orden será de la forma:

$$a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x) y = g(x) \quad \text{ò} \quad a_1(x) y' + a_0(x) y = g(x)$$

Dividiendo por $a_1(x)$ miembro a miembro con $a_1(x) \neq 0 \quad \forall x \in I$, obtenemos:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = f(x) \quad \text{con } P(x) = \frac{a_0(x)}{a_1(x)} \quad \text{y} \quad f(x) = \frac{g(x)}{a_1(x)}.$$

Buscaremos una soluci3n en un intervalo I donde P y f resulten continuas.

P/ sea $\frac{dy}{dx} + P(x)y = f(x)$

En forma diferencial queda $dy + (P(x)y - f(x))dx = 0$ (1)

Trataremos de encontrar una funci3n $\mu(x) / \mu(x) \neq 0 \quad \forall x \in I$, continua y diferenciable que denominaremos **factor integrante**, de modo que el producto entre $\mu(x)$ y la ecuaci3n (1) sea 0.

$$\mu(x)dy + \mu(x)(P(x)y - f(x))dx = 0 \quad (2)$$

La ecuaci3n (2) es diferencial exacta por lo tanto se cumple:

$$\frac{\partial \mu(x)}{\partial x} = \frac{\partial [\mu(x)(P(x)y - f(x))]}{\partial y}$$

Es decir, $\frac{d\mu(x)}{dx} = \mu(x)P(x)$ una E.D.O de variables separables

$$\ln|\mu(x)| = \int P(x)dx$$

$$\therefore \mu(x) = e^{\int P(x)dx} \quad (3)$$

N3tese que considerar una constante en esta integral es innecesario pues significar3a multiplicar toda la ecuaci3n por una constante.

Si ahora reemplamos (3) en (2) :

$$e^{\int P(x)dx} dy + e^{\int P(x)dx} [P(x)y - f(x)]dx = 0$$

$$e^{\int P(x)dx} + e^{\int P(x)dx} P(x)y dx = e^{\int P(x)dx} f(x)dx \quad \text{distributiva y pasaje de t3rmino.}$$

Si observamos el miembro izquierdo de la igualdad podemos deducir que se puede escribir como la derivada del producto entre $e^{\int P(x)dx}$ e y :

$$d \left[e^{\int P(x)dx} \cdot y \right] = e^{\int P(x)dx} f(x)dx$$

Integrando miembro a miembro con respecto a "x" :

$$e^{\int P(x)dx} \cdot y = \int e^{\int P(x)dx} f(x)dx + c$$

$$\therefore y = c e^{-\int P(x)dx} + e^{-\int P(x)dx} \int e^{\int P(x)dx} f(x)dx \quad \text{siendo la soluci3n general buscada.}$$

Ejemplo

Dada $x.y' + 4y = x^2.e^x$ Encontrar la solución general por medio del factor integrante.

$$x.y' + 4y = x^2.e^x \Rightarrow y' + 4\frac{y}{x} = xe^x \text{ con } x \neq 0.$$

De donde $P(x) = \frac{4}{x}$ y $f(x) = xe^x$ continuas en $(-\infty, 0)$ o $(0, +\infty)$.

(No es correcto escribir "continuas en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ " deben ser continuas en un Intervalo y $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ es una unión de intervalos, que no es un intervalo. Por lo tanto para solucionar la ecuación se pueden tomar uno de los dos casos, considerando al otro análogo).

Supongamos a P, f continuas en $x \in (0, +\infty)$

a) Encontramos el factor integrante : $I : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R} / I(x) = e^{4 \int \frac{1}{x} dx}$

Por lo tanto $I(x) = e^{4 \ln|x|} = e^{\ln|x|^4} = |x|^4 = x^4$

b) multiplicamos miembro a miembro la ecuación transformada (en este caso) por el factor integrante y observamos que el primer miembro debe ser la derivada del producto entre el factor integrante y la variable "y":

$$x^4 y' + 4x^3 y = xe^x \Rightarrow d[x^4 \cdot y] = xe^x$$

c) Ahora integramos miembro a miembro con respecto a "x" y despejamos "y":

$$x^4 y = \int xe^x dx \Rightarrow x^4 y = xe^x - e^x + c \Rightarrow y = x^{-3}e^x - x^{-4}e^x + cx^{-4}.$$

Es decir la solución general definida formalmente queda:

$$g : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R} / g(x) = \frac{e^x}{x^3} - \frac{e^x}{x^4} + \frac{c}{x^4}$$

Otro método para obtener la solución general de Ecuaciones Diferenciales Lineales de primer orden

Sea la ecuación $\frac{dy}{dx} + P(x)y = f(x)$ (1) con las mismas condiciones anteriores sobre P y f .

Proponemos como solución de la ecuación anterior a la función $y = u(x).v(x)$, nuestro objetivo será encontrar las funciones u y v adecuadas y de esta manera por medio de una sustitución obtendremos la solución general deseada.

P/ Sea la función $y = u(x).v(x)$ (2) y derivando m.a.m. tenemos: $\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx}v + u \frac{dv}{dx}$ (3)

Si reemplazamos por (2) y (3) en (1):

$$\frac{du}{dx}v + u \frac{dv}{dx} + u.v P(x) = f(x)$$

$$\frac{du}{dx}v + u\left(\frac{dv}{dx} + vP(x)\right) = f(x) \quad (4)$$

Elegimos v de manera que $\frac{dv}{dx} + vP(x) = 0$, es decir que sea solución de la ecuación diferencial de variables separables:

$$\frac{dv}{dx} + vP(x) = 0 \Rightarrow \frac{dv}{dx} = -vP(x) \Rightarrow \int \frac{dv}{v} = -\int P(x) dx \Rightarrow \ln|v| = -\int P(x) dx$$

$\Rightarrow v = e^{-\int P(x) dx}$ (5). (se quitaron las barras de módulo ya que la función siempre es positiva y al igual que en el caso de la deducción del factor integrante, no se coloca constante en la integración del exponente)

Una vez encontrada la función v la sustituimos en (4) y obtenemos la función u :

$$\frac{du}{dx}e^{-\int P(x) dx} = f(x) \Rightarrow du = e^{\int P(x) dx} f(x) dx \Rightarrow \int du = \int e^{\int P(x) dx} f(x) dx$$

$$\Rightarrow u = \int e^{\int P(x) dx} f(x) dx + c \quad (6)$$

Reemplazando (5) y (6) en la solución propuesta (2), se logra la solución general de la ecuación diferencial (1)

$$\therefore y = e^{-\int P(x) dx} \int e^{\int P(x) dx} f(x) dx + c.e^{-\int P(x) dx}.$$

Ejemplo

Sea $y'' + 2x.y' = x$ donde P y f son continuas en $\mathbb{R}$.

Proponemos la función $y = u(x).v(x)$ y derivando m.a.m. tenemos: $\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx}v + u \frac{dv}{dx}$

Luego sustituimos en la ecuación dada:

$$\frac{du}{dx}v + u \frac{dv}{dx} + 2x.u.v = x \Rightarrow \frac{du}{dx}v + u\left(\frac{dv}{dx} + 2xv\right) = x$$

$$\text{Obtenemos } v: \quad \frac{dv}{dx} = -2xv \Rightarrow \int \frac{dv}{v} = -2 \int x dx \Rightarrow v(x) = e^{-x^2}.$$

$$\text{Ahora obtenemos } u: \quad \frac{du}{dx} e^{-x^2} = x \Rightarrow \int du = \int x e^{x^2} \Rightarrow u = \frac{1}{2} e^{x^2} + c$$

Por lo tanto la solución general será: $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / y = \frac{1}{2} + c.e^{-x^2}$.

Sugerencia: resolver el ejemplo del factor integrante por este último método.

Observaci3n : Si se consideran P y f continuas en I y $x_0 \in I$ entonces existe una sola soluci3n del problema $\frac{dy}{dx} + P(x)y = f(x)$ sujeta a la condici3n $y(x_0) = y_0$.

En realidad, toda soluci3n general de la ecuaci3n diferencial lineal de primer orden dada en I :

$$y = e^{-\int P(x) dx} \int e^{\int P(x) dx} f(x) dx + c.e^{-\int P(x) dx}$$

consta de la suma de dos soluciones: $y = y_c + y_p$ donde:

$y_c = ce^{-\int P(x) dx}$ es la soluci3n complementaria y soluci3n general de la ecuaci3n homog3nea

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = 0$$

$y_p = e^{-\int P(x) dx} \int e^{\int P(x) dx} f(x) dx$ es la soluci3n particular de $\frac{dy}{dx} + P(x)y = f(x)$.

M3s adelante veremos que esta es una **propiedad** de la ecuaciones lineales.

Ecuaci3n de Bernoulli

$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n$ con $n > 1$, de lo contrario ser3a una E.D.O. lineal de primer orden.

Si dicha ecuaci3n la dividimos miembro a miembro por y^n queda:

$$\frac{dy}{dx} y^{-n} + P(x)y^{1-n} = Q(x) \quad (1)$$

Si llamamos $z = y^{1-n}$ y la derivamos miembro a miembro: $dz = (1-n)y^{-n}y'$. Sustituyendo ambas expresiones en la ecuaci3n (1), obtenemos una ecuaci3n lineal de primer orden:

$$\frac{1}{1-n} \frac{dz}{dx} + P(x)z = Q(x)$$

Ejemplo

$y' + xy = x^3 y^3$ Consideramos la sustituci3n $z = y^{-2}$ ya que $n = 3$

Dejamos la resoluci3n para el lector!

$$\text{Rta : } y = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1 + c.e^{x^2}}}$$

Ecuaciones Diferenciales Lineales de Segundo Orden

Una ecuación diferencial lineal de orden "n" tiene la forma:

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x)$$

- Los coeficientes $a_i(x)$ con $0 \leq i \leq n$ son función de "x"
- $y^{(n)}$ significa $\frac{d^n y}{dx^n}$
- Si $g(x) \neq 0$ la ecuación se denomina **no Homogènea**.
- Si $g(x) = 0$ la ecuación se denomina **Homogènea**.
- Si $a_i(x) \in \mathbb{R}$ es decir, son constantes reales, la ecuación se denomina **ecuación lineal con coeficiente constantes reales**.

Estudiaremos en particular las de segundo orden:

$$ay'' + by' + cy = g(x) \quad (\text{no homogènea})$$

$$ay'' + by' + cy = 0 \quad (\text{homogènea})$$

Principio de Superposición

Si y_1, y_2 son soluciones de una ecuación diferencial homogènea de segundo grado con coeficientes constantes entonces la combinación lineal:

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

con c_1, c_2 constantes arbitrarias, también es solución de la ecuación.

P/ Como y_1 es solución entonces $a(y_1)'' + b(y_1)' + c(y_1) = 0 \quad (1)$

Como y_2 es solución entonces $a(y_2)'' + b(y_2)' + c(y_2) = 0 \quad (2)$

Ahora si $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$ es solución de la ecuación debemos ver que la satisface:

$$\begin{aligned} a(c_1 y_1 + c_2 y_2)'' + b(c_1 y_1 + c_2 y_2)' + c(c_1 y_1 + c_2 y_2) &= \\ a c_1 (y_1)'' + a c_2 (y_2)'' + b c_1 (y_1)' + b c_2 (y_2)' + c c_1 y_1 + c c_2 y_2 &= \\ c_1 [a(y_1)'' + b(y_1)' + c y_1] + c_2 [a(y_2)'' + b(y_2)' + c y_2] &= c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

$\therefore y = c_1 y_1 + c_2 y_2$ es solución de la ecuación dada.

Propiedad 1

Si y_1, y_2 son soluciones de la ecuación diferencial homogènea de segundo orden, $ay'' + by' + cy = 0$ tal que ninguna de ellas es múltiplo constante de la otra, entonces toda solución se obtiene a partir de una combinación lineal de ellas: $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$.
A esta última expresión se la llama **solución general** de la ecuación dada.

Observaci3n : De la propiedad anterior se deduce que y_1, y_2 son **linealmente independientes**.

Propiedad 2

Toda soluci3n de una ecuaci3n diferencial lineal de segundo orden a coeficientes constantes reales es exponencial o se forma a partir de ella.

Sea $ay'' + by' + cy = 0$ (1). Veamos que $y = e^{mx}$ es soluci3n de la ecuaci3n dada con algunas restricciones para "m".

Consideramos $y' = me^{mx}$ (2) y $y'' = m^2 e^{mx}$ (3)

Reemplazando (2) y (3) en (1) :

$$am^2 e^{mx} + bme^{mx} + ce^{mx} = 0 \Rightarrow e^{mx}(am^2 + bm + c) = 0 \text{ pero } e^{mx} \neq 0 \text{ entonces}$$
$$m \text{ ser\`a tal que } am^2 + bm + c = 0$$

A esta \`ultima ecuaci3n se la denomina **ecuaci3n auxiliar o caracteristica** y a partir de ella se plantear\`an distintos casos que tienen que ver con la naturaleza de sus raices. La naturaleza de las mismas permitir\`an caracterizar las distintas soluciones generales para la ecuaci3n diferencial dada.

Caso I Dos raices reales distintas m_1 y m_2

Sean $y = c_1 e^{m_1 x}$ e $y = c_2 e^{m_2 x}$ son L.I. por lo tanto $y = c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x}$ es soluci3n general de la ecuaci3n diferencial.

Caso II Raices dobles $m_1 = m_2$

Solo se obtiene $y = e^{m_1 x}$ como soluci3n, pero $y = u(x)e^{m_1 x}$ tambi\`en ser\`a soluci3n para $u(x) = x$:

Se deja al lector el reemplazo por $y = x.e^{m_1 x}$ en la ecuaci3n original, luego del reemplazo y de operar se llega a la siguiente expresi3n:

$$xe^{m_1 x}(am_1^2 + bm_1 + c) + (2am_1 + b)e^{m_1 x} = 0$$

Si el primer par\`entesis es 0:

$$am^2 + bm + c = 0 \Rightarrow a\left(m^2 + \frac{b}{a}m + \frac{c}{a}\right) = 0 \text{ y consideramos que } m_1 \text{ es raiz doble:}$$

$$a.(m - m_1)^2 = 0$$

Vinculando las dos expresiones anteriores se deduce que $b + 2am_1 = 0$ (que es el segundo par\`entesis)

$\therefore y = c_1 e^{m_1 x} + c_2 x.e^{m_1 x}$ es soluci3n general.

Caso III Raíces complejas conjugadas

Si m_1 y m_2 son complejos conjugados ($b^2 - 4ac < 0$), en tal caso:

$m_1 = \alpha + \beta i$ y $m_2 = \alpha - \beta i$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. La solución será como en el caso (I)

$$y = c_1 e^{(\alpha + i\beta)x} + c_2 e^{(\alpha - i\beta)x} \quad (1)$$

Tratemos de expresar (1) en forma más simple, para ello primeramente recordamos la fórmula de Euler: $e^{i\theta} = \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta$.

$$\begin{aligned} y &= c_1 e^{\alpha x} e^{i\beta x} + c_2 e^{\alpha x} e^{-i\beta x} = e^{\alpha x} (c_1 e^{i\beta x} + c_2 e^{-i\beta x}) = \\ &= e^{\alpha x} (c_1 (\cos \beta x + i \operatorname{sen} \beta x) + c_2 (\cos(-\beta x) + i \operatorname{sen}(-\beta x))) \end{aligned} \quad (1)$$

Ahora $\cos(-\beta x) = \cos(\beta x)$ y $\operatorname{sen}(-\beta x) = -\operatorname{sen}(\beta x)$ reemplazando por estas identidades en (1) tenemos:

$$\begin{aligned} y &= e^{\alpha x} (c_1 (\cos \beta x + i \operatorname{sen} \beta x) + c_2 (\cos \beta x - i \operatorname{sen} \beta x)) \\ y &= e^{\alpha x} ((c_1 + c_2) \cos \beta x + (c_1 i - c_2 i) \operatorname{sen} \beta x) \end{aligned} \quad (2)$$

Pero $A = c_1 + c_2$ y $B = c_1 i - c_2 i$ (B es una cte real), reemplazando en (2) queda:

$$y = e^{\alpha x} (A \cos \beta x + B \operatorname{sen} \beta x) \text{ solución general}$$

Resolver estos ejemplos:

$$1) 2y'' - 5y' - 3y = 0 \quad 2) y'' - 10y' + 25y = 0 \quad 3) y'' + y' + y = 0 \quad 4) y'' + k^2 y = 0$$

Si queremos resolver problemas con valores iniciales deberemos tener dos condiciones $y(x_0) = y_0$ y $y'(x_0) = y'_0$ para deducir las constantes reales A y B.

Resolver el siguiente ejemplo:

$$y'' - 4y' + 13y = 0 \quad y(0) = -1 \quad y'(0) = -2$$

Ecuaciones Diferenciales no Homogéneas de 2do. Orden

Se trata de encontrar una solución general de la ecuación de la forma $y'' + b y' + c y = g(x)$ donde:

- 1) a, b, c son constantes reales
- 2) g(x) es continua (no nula)

Cualquier función y_p que satisface la ecuación dada y no depende de las constantes se denomina **Solución particular**

Teorema: Sea la ecuación diferencial ordinaria no homogénea de 2do. orden
a $y'' + b y' + c y = g(x)$.

Si y_p es solución particular y $y_c = c_1 y_1 + c_2 y_2$ es solución general de la ecuación homogénea a $y'' + b y' + c y = 0$ entonces $y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + y_p$ es solución general de la ecuación dada.

- El problema de resolver a $y'' + b y' + c y = g(x)$ consistirá en :
 - 1) encontrar $y_c = c_1 y_1 + c_2 y_2$ solución general de la homogénea (a $y'' + b y' + c y = 0$) a la que denominamos **función complementaria**.
 - 2) Encontrar y_p , solución particular
 - 3) $y = y_c + y_p$

Una de las formas de obtener y_p es la denominada **Variación de Parámetros**

A) Expresamos la ecuación diferencial (dividiendo por "a") de esta forma:

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x)$$

B) Sean y_1, y_2 soluciones linealmente independientes de la ecuación homogénea asociada:

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

C) Determinamos si existen, u_1, u_2 tal que $y_p = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x)$ sea solución particular de la ecuación diferencial.

En tal caso :

$$y'_p = u_1 y'_1 + u'_1 y_1 + u_2 y'_2 + u'_2 y_2 \quad (\text{si } u'_1 y_1 + u'_2 y_2 = 0) \quad (1)$$

$$y'_p = u_1 y'_1 + u_2 y'_2$$

$$\text{Ahora : } y''_p = u'_1 y'_1 + u_1 y''_1 + u'_2 y'_2 + u_2 y''_2$$

reemplazando en la ecuación diferencial : $y''_p + P(x)y'_p + Q(x)y_p = f(x)$

$$\text{resulta : } y'_1 u'_1 + y'_2 u'_2 = f(x) \quad (2)$$

de (1) y (2) obtenemos un sistema de ecuaciones lineales cuyas incógnitas son: u'_1, u'_2 .

Resolveremos este sistema por el método de Kràmer, a saber:

$$u'_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ f(x) & y'_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{vmatrix}}$$

$$u'_2 = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y'_1 & f(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{vmatrix}}$$

de donde por integración con respecto a "x", obtenemos u_1 y u_2 (podemos omitir la constante de integración), luego:

$$y = u_1 y_1 + u_2 y_2 + c_1 y_1 + c_2 y_2$$

Nota:

1) Al determinante de orden 2, $W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$ se lo llama Wronskiano, en honor al matemático Wronski

2) si $W \neq 0$ entonces y_1 e y_2 son funciones **linealmente independientes** y desde el punto de vista de la resolución del sistema de ecuaciones anterior, diremos que tiene **única solución**, como esperábamos.

La resolución de los ejemplos quedan a cargo del lector !

Ejemplos

1) $y'' + y = x$ (caso de dos raíces complejas conjugadas)

solución general : $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + x$

2) $y'' + y' - 6y = 2e^{5x}$ (caso de dos raíces reales distintas)

Solución general: $y = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{2x} + \frac{1}{12} e^{5x}$

3) $y'' - 2y' + y = 3e^x$ (caso de raíces dobles)

Solución general: $y = c_1 e^x + c_2 x e^x + \frac{3}{2} x^2 e^x$

ANEXO

Ecuación Diferencial de una familia de Curvas

El problema consiste en:

Dada una familia de curvas, obtener la ecuación diferencial que la tiene como solución general. Lo mostraremos mediante ejemplos.

Ejemplos

1) Sea el haz de parábolas con vértice en el origen y eje de simetría el eje de ordenadas.

Su ecuación es $y = a \cdot x^2$ (1)

Si derivamos miembro a miembro con respecto a "x" la expresión (1) : $y' = 2ax$ (2)

Nuestro objetivo será poder eliminar la constante "a" de lo contrario (1) será solución de (2) si a la constante "a" se le da el mismo valor.

De (2) despejamos: $a = \frac{y'}{2x}$ con $x \neq 0$ y lo sustituimos en (1).

Por lo tanto nos queda: $y' = \frac{2y}{x}$ que es la ecuación diferencial que admite como solución a esa familia de parábolas. **Verificarlo!**

Nota: Si seguimos derivando podemos encontrar una ecuación de orden superior al primero que admite la solución propuesta, pero no será su solución general, pues tiene una sola constante.

Por lo tanto el orden de la ecuación diferencial obtenida dependerà de la cantidad de constantes tiene la soluciòn general.

2) Sea $y = c_1 x^2 + c_2 x$ una familia de paràbolas. Hallar la ecuaciòn diferencial que la tenga como soluciòn general.

Como tiene dos constantes la E.D.O serà de segundo orden.

$$y' = 2c_1 x + c_2 \quad (1)$$

$$y'' = 2c_1 \Rightarrow \frac{1}{2} y'' = c_1 \quad (2). \text{ Luego reemplazando (2) en (1): } y' = y'' x + c_2 \quad (3).$$

Si despejamos de (3) la constante: $y' - y'' x = c_2$.

Por ùltimo, sustituimos en la familia dada por (2) y (3): $x^2 y'' - 2y' x + 2y = 0$, obteniendo la ecuaciòn diferencial de la familia de paràbolas. **Verificarlo!**

Encontrar la ecuaciòn diferencial de la familia :

3) de hipèrboles $x^2 - y^2 = k$ (utilizar derivaciòn implìcita)

4) $y = A \sin x + B \cos x$

Trayectorias Ortogonales

Definiciones

1) Dos curvas son ortogonales en un punto que pertenece a ambas si y solo si las rectas tangentes a cada una de las curvas en el punto son perpendiculares.

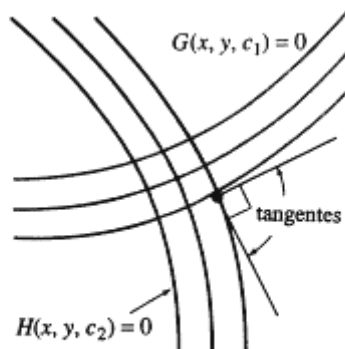


FIGURA 3.8

2) Si dos familias de curvas de un mismo plano son tales que cada una de ellas es ortogonal a la otra familia, los dos haces son **trayectorias mutuamente ortogonales**

Còmo encontrar las trayectorias ortogonales a una familia de curvas dada.

El problema de encontrar las trayectorias ortogonales a una familia de curvas se resuelve como aplicaciòn directa de ecuaciones diferenciales de primer orden, mas concretamente se procede as\u00ed:

a) dada una familia de curvas planas $F(x, y, c) = 0$, con f una funciòn derivable con $y = f(x)$, busquemos la ecuaciòn diferencial de primer orden $H(x, y, y') = 0$ con $y' \neq 0$ asociada a la familia.

b) Establecemos la ecuación diferencial de las trayectorias ortogonales $H\left(x, y, -\frac{1}{y'}\right) = 0$

c) Resolvemos la ecuación planteada en (b) y la solución general de ella será la familia de trayectorias ortogonales a la familia planteada inicialmente.

Bibliografía

- Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones. Dennis Zill. 2da.edición. Editorial Iberoamericana.
- Ecuaciones Diferenciales. Ross. Editorial Revertè.
- Apuntes de Càtedra: Càlculo en varias variables. Lic. Mirta N. Wysocki

Lic. Fernando Daniel De Rossi