

### Parcial Análisis Matemático III - 11/11/03

1. Sea  $f(z)$  analítica en una región  $D$  y tal que tiene un cero de orden  $m$  en  $z = a \in D$ . Analizar si  $z = a$  es singularidad de  $h(z) = \frac{f''(z)}{f(z)}$ , clasificarla y calcular  $\text{Res}[h(z), z = a]$ .
2. Sea  $f(z)$  analítica sobre un contorno simple cerrado  $C$  y en su interior  $D$ , salvo en  $z_0 \in D$  y  $z_1 \in D$  donde tiene polos simples. Si  $f(z) \neq 0 \forall z$ , demostrar que  $\int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = -4\pi i$ .
3. a) Mostrar que  $w = \sin z$  transforma el recinto:  $D = \{z / -\pi/2 \leq \text{Re}(z) \leq \pi/2, \text{Im}(z) \geq 0\}$  en el semiplano superior del plano  $w$ .  
b) Hallar la función armónica en el interior del recinto  $D$  que vale cero sobre la semirrecta  $x = -\pi/2$ , 20 sobre el segmento del eje real  $(-\pi/2, \pi/2)$  y 30 sobre la semirrecta  $x = \pi/2$ .
4. Hallar el desarrollo en serie de Taylor en un entorno de  $z = 0$  de  $f(z) = \int_{|s|=1} \frac{ds}{s-z}$ ;  $|z| \neq 1$  y determinar el radio de convergencia.
5. Estudiar la convergencia de  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x+1)(x^2+2)}$  y calcular el Valor Principal de Cauchy de dicha integral.

### Parcial Análisis Matemático III - 11/11/03

1. Sea  $f(z)$  analítica en una región  $D$  y tal que tiene un cero de orden  $m$  en  $z = a \in D$ . Analizar si  $z = a$  es singularidad de  $h(z) = \frac{f''(z)}{f(z)}$ , clasificarla y calcular  $\text{Res}[h(z), z = a]$ .
2. Sea  $f(z)$  analítica sobre un contorno simple cerrado  $C$  y en su interior  $D$ , salvo en  $z_0 \in D$  y  $z_1 \in D$  donde tiene polos simples. Si  $f(z) \neq 0 \forall z$ , demostrar que  $\int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = -4\pi i$ .
3. a) Mostrar que  $w = \sin z$  transforma el recinto:  $D = \{z / -\pi/2 \leq \text{Re}(z) \leq \pi/2, \text{Im}(z) \geq 0\}$  en el semiplano superior del plano  $w$ .  
b) Hallar la función armónica en el interior del recinto  $D$  que vale cero sobre la semirrecta  $x = -\pi/2$ , 20 sobre el segmento del eje real  $(-\pi/2, \pi/2)$  y 30 sobre la semirrecta  $x = \pi/2$ .
4. Hallar el desarrollo en serie de Taylor en un entorno de  $z = 0$  de  $f(z) = \int_{|s|=1} \frac{ds}{s-z}$ ;  $|z| \neq 1$  y determinar el radio de convergencia.
5. Estudiar la convergencia de  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x+1)(x^2+2)}$  y calcular el Valor Principal de Cauchy de dicha integral.