

1er. Recuperatorio - Análisis III - 07/05/05

1. a) Hallar todas las funciones enteras $f(z)$ de la forma $f(z) = u(x) + iv(y)$, $z = x + iy$.
b) Mostrar que $f(z) = \frac{\text{Log}(z+4)}{z^2+i}$ es analítica en todo el plano complejo salvo en los puntos $\pm \frac{1-i}{\sqrt{2}}$ y sobre la semirrecta $y = 0$, $x \leq -4$.
2. Desarrollar $f(z) = \frac{z}{z^2 - 2z + 5}$ en potencias de $z - 1$ y determinar el radio de convergencia.
3. a) Mostrar que la transformación $w = \frac{i-z}{i+z}$ aplica el semiplano superior $\text{Im}(z) > 0$, en el interior del círculo unitario $|w| \leq 1$.
b) Hallar una transformación que aplique el sector $0 \leq \theta \leq \pi/4$, $r > 0$ en el interior del círculo unitario.
4. Demostrar que $\int_0^{2\pi} e^{\cos t} \sin(\sin t) dt = 0$ y $\int_0^{2\pi} e^{\cos t} \cos(\sin t) dt = 2\pi$.
(Ayuda: Calcular $\int_{|z|=1} \frac{e^z}{z} dz$).
5. Analizar convergencia y calcular $\int_0^\infty \frac{1}{1+x^5} dx$.