

### 1er Recuperatorio Parcial Análisis III - 08-06-2010

1. Sea  $f(z) = \frac{z+1}{(z-1)}$ . Determinar el dominio  $\Omega$  donde  $f(z)$  es holomorfa. ¿Es conforme en  $z_0 = 0$ ? Hallar las imágenes de los ejes real e imaginario bajo la función  $f$ . ¿Con qué ángulo se cortan dichas imágenes?
2. Calcular, según los valores de  $\alpha$ :  $\oint_{|z-1|=2} \frac{z(e^z - 1)}{(z - \alpha)^2} dz$ .
3. **a)** Si  $z_0$  es un polo de orden  $m$  de  $f(z)$ , determinar que tipo de singularidad tiene  $\frac{f'(z)}{f(z)}$  en  $z_0$ . Hallar residuo en  $z_0$ .  
**b)** Si  $z_1$  es un cero de orden  $n$  de  $f(z)$ , determinar que tipo de singularidad tiene  $\frac{f'(z)}{f(z)}$  en  $z_1$ . Hallar residuo en  $z_1$ .  
**c)** Si  $f(z)$  es analítica dentro y sobre una curva cerrada  $C$ , excepto quizá en un número finito de polos en el interior de  $C$ ,  $f(z)$  no tiene ceros sobre  $C$ ,  $N$  es el número de ceros y  $P$  es el número de polos de  $f(z)$  en el interior de  $C$  contados con sus respectivas multiplicidades, mostrar que:
 
$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = N - P$$
4. **a)** Hallar todos los desarrollos posibles en serie de potencias de  $(z - i)$  de  $f(z) = \frac{1}{z-2}$  indicando la región de convergencia de cada una.  
**b)** Si es posible, hallar a partir de **a)** los desarrollos en serie de potencias de  $(z - i)$  de  $f(z) = \frac{1}{(z-2)^3}$
5. Determinar si la ecuación  $2xy + y = k$  puede corresponder a las líneas equipotenciales o de flujo de un campo de velocidades de un fluido. En caso afirmativo, hallar el potencial complejo para cada una de las posibilidades. Dar el potencial de velocidades y la función de corriente para cada caso.

### 1er Recuperatorio Parcial Análisis III - 08-06-2010

1. Sea  $f(z) = \frac{z+1}{(z-1)}$ . Determinar el dominio  $\Omega$  donde  $f(z)$  es holomorfa. ¿Es conforme en  $z_0 = 0$ ? Hallar las imágenes de los ejes real e imaginario bajo la función  $f$ . ¿Con qué ángulo se cortan dichas imágenes?
2. Calcular, según los valores de  $\alpha$ :  $\oint_{|z-1|=2} \frac{z(e^z - 1)}{(z - \alpha)^2} dz$ .
3. **a)** Si  $z_0$  es un polo de orden  $m$  de  $f(z)$ , determinar que tipo de singularidad tiene  $\frac{f'(z)}{f(z)}$  en  $z_0$ . Hallar residuo en  $z_0$ .  
**b)** Si  $z_1$  es un cero de orden  $n$  de  $f(z)$ , determinar que tipo de singularidad tiene  $\frac{f'(z)}{f(z)}$  en  $z_1$ . Hallar residuo en  $z_1$ .  
**c)** Si  $f(z)$  es analítica dentro y sobre una curva cerrada  $C$ , excepto quizá en un número finito de polos en el interior de  $C$ ,  $f(z)$  no tiene ceros sobre  $C$ ,  $N$  es el número de ceros y  $P$  es el número de polos de  $f(z)$  en el interior de  $C$  contados con sus respectivas multiplicidades, mostrar que:
 
$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = N - P$$

donde  $N$  es el número de ceros y  $P$  es el número de polos de  $f(z)$  en el interior de  $C$ , contados con sus respectivas multiplicidades.

4. **a)** Hallar todos los desarrollos posibles en serie de potencias de  $(z - i)$  de  $f(z) = \frac{1}{z-2}$  indicando la región de convergencia de cada una.  
**b)** Si es posible, hallar a partir de **a)** los desarrollos en serie de potencias de  $(z - i)$  de  $f(z) = \frac{1}{(z-2)^3}$
5. Determinar si la ecuación  $2xy + y = k$  puede corresponder a las líneas equipotenciales o de flujo de un campo de velocidades de un fluido. En caso afirmativo, hallar el potencial complejo para cada una de las posibilidades. Dar el potencial de velocidades y la función de corriente para cada caso.