Campo de velocidades plano y potencial complejo

Rev. 2010-03-10

Eduardo G. Murmis – Gustavo M. Murmis – Ariel Burman

U.B.A. - Facultad de Ingeniería – Análisis Matemático III

Introducción

El movimiento de un fluido se puede describir a partir de la velocidad de cada punto del mismo. Si consideramos que el fluido se mueve en un plano y que el movimiento es estacionario, es decir que la velocidad de cada punto es independiente del tiempo, entonces la velocidad de cada punto se puede expresar utilizando la siguiente función que representa un campo vectorial plano de velocidades:

$$\vec{V}(x,y) = \big(u(x,y)\,,\,v(x,y)\big)$$

Vamos a analizar el caso en que dentro del recinto considerado se cumplen las siguientes condiciones:

1. No hay fuentes ni sumideros, es decir que el campo es solenoidal. Esto significa que la divergencia de este campo vectorial será nula:

$$\nabla \cdot \vec{V} = 0$$

2. No hay torbellinos, es decir que el campo es irrotacional. Esto significa que el rotor de este campo vectorial será nulo:

$$\nabla \times \vec{V} = 0$$

Líneas de corriente

Si aplicamos el teorema de Gauss al recinto analizado, llamando D al mismo, C a la curva que define su contorno y $\vec{n}$ al versor normal a esta curva en cada punto, y teniendo en cuenta que $\vec{V}$ es un campo solenoidal, queda:

$$\oint_C \vec{V} \cdot \overrightarrow{dn} = \iint_D \nabla \cdot \vec{V}\, ds = 0$$

La primera integral representa el flujo del fluido a través de la curva C.

Expresando los diferenciales de camino a lo largo de la curva C como dx_S y dy_S y considerando que $\vec{V} = (u,v)$, $\overrightarrow{dn} = (dy_S, -dx_S)$:

$$\oint_C \vec{V} \cdot \overrightarrow{dn} = \oint_C (u,v) \cdot (dy_S, -dx_S) = \oint_C (u\,dy_S - v\,dx_S) = 0$$

Dado que la última integral de la expresión anterior es nula para toda curva cerrada C, eso significa que la integral en una curva no cerrada no dependerá del camino. Entonces podemos definir la siguiente función potencial:

$$\psi(x,y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} (\,u\,dy_S - v\,dx_S) \qquad (1)$$

Se ve que el flujo de fluido a través de una curva se obtiene como diferencia entre los valores de la función ψ en los extremos de la misma. Esto significa que las líneas que se obtienen uniendo puntos de igual valor de ψ son las líneas de corriente (o de campo o de flujo). Por esta razón, a la función ψ se la denomina función de corriente.

De la expresión anterior se puede deducir que:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \qquad\qquad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \qquad\qquad (2)$$

Recordando que el rotor del campo vectorial $\vec{V}$ es nulo, esto significa que:

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \qquad\qquad (3)$$

Si calculamos el Laplaciano de ψ y tenemos en cuenta las expresiones (2) y (3), obtenemos:

$$\nabla^2 \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

Es decir que ψ es una función armónica.

Líneas equipotenciales

Si aplicamos el teorema de Stokes al recinto analizado, llamando D al mismo, C a la curva que define su contorno y $\vec{t}$ al versor tangente a esta curva en cada punto y teniendo en cuenta que $\vec{V}$ es un campo irrotacional, queda:

$$\oint_C \vec{V} \cdot \overrightarrow{dt} = \iint_D \nabla \times \vec{V}\, ds = 0$$

Considerando que $\vec{V} = (u, v)$ y $\overrightarrow{dt} = (dx_s, dy_s)$:

$$\oint_C \vec{V} \cdot \overrightarrow{dt} = \oint_C (u, v) \cdot (dx_s, dy_s) = \oint_C (u dx_s + v dy_s) = 0$$

Dado que la última integral de la expresión anterior es nula para toda curva cerrada C, eso significa que la integral en una curva no cerrada no dependerá del camino. Entonces podemos definir la siguiente función potencial:

$$\varphi(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x,y)} (u dx_s + v dy_s)$$

De la expresión anterior se puede deducir que

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \qquad\qquad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y} \qquad\qquad (4)$$

Por lo tanto el campo de velocidades es el gradiente de esta función potencial $\varphi(x, y)$:

$$\vec{V} = \nabla \varphi(x, y)$$

Dado que la divergencia de $\vec{V}$ es cero, podemos deducir que:

$$\nabla^2\varphi(x,y) = \nabla\cdot\nabla\varphi = 0$$

Es decir que φ es una función armónica.

A la función φ se la denomina función potencial o función potencial de velocidades y las líneas que se obtienen uniendo puntos de igual valor de φ son las líneas equipotenciales.

Potencial complejo

A partir de las expresiones (2) y (4) se deduce que:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y} \qquad\qquad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\frac{\partial\psi}{\partial x}$$

Esto significa que las funciones φ y ψ cumplen las condiciones de Cauchy – Riemann. Como además hemos demostrado que estas funciones son armónicas, entonces constituyen un par ordenado de funciones conjugadas armónicas y es posible definir la siguiente función compleja holomorfa:

$$f(z) = f(x,y) = \varphi(x,y) + i\psi(x,y)$$

Esta función $f(z)$ se denomina potencial complejo del fluido.

Si hacemos la derivada de esta función, obtenemos:

$$f'(z) = \frac{df}{dz} = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial\varphi}{\partial x} + i\frac{\partial\psi}{\partial x} = u - iv$$

Entonces se ve que las partes real e imaginaria de la función compleja $\overline{f'(z)}$ coinciden con las coordenadas del campo vectorial de velocidades:

$$\overline{f'(z)} = u + iv \quad \leftrightarrow \quad \vec{V} = (u,v)$$

Esto significa que se puede estudiar un campo de velocidades, analizando el potencial complejo asociado al mismo, el cual es una función holomorfa.

Adicionalmente se puede decir lo siguiente:

De la expresión (4) se ve que: $\nabla\varphi(x,y) = (u,v)$

De la expresión (2) se puede deducir que: $\nabla\psi(x,y) = (-v,u)$

Entonces: $\nabla\varphi(x,y)\cdot\nabla\psi(x,y) = -uv + vu = 0$

Por lo tanto podemos concluir que el gradiente de φ es perpendicular al gradiente de ψ y consecuentemente las curvas de φ constante (líneas equipotenciales) son perpendiculares a las curvas de ψ constante (líneas de corriente).

Resumen

Potencial complejo	$f(z) = f(x,y) = \varphi(x,y) + i\psi(x,y)$
Función potencial o potencial de velocidades	$\varphi(x,y)$
Líneas equipotenciales	$\varphi(x,y) = cte$
Función de corriente	$\psi(x,y)$
Líneas de corriente, campo o flujo	$\psi(x,y) = cte$
Campo de velocidades	$\vec{V} \quad \leftrightarrow \quad \overline{f'(z)}$

Ejemplos

1. Flujo uniforme

En este caso el campo de velocidades es constante, es decir que se puede escribir como una constante compleja expresada de la siguiente forma:

$$\vec{V} = V_0\,\vec{\theta} = V_0\,(\cos\theta\,,\operatorname{sen}\theta) \qquad (\vec{\theta}\text{: versor en la dirección de ángulo } \theta)$$

Hallamos el potencial complejo:

$$\overline{f'(z)} = V_0\,e^{i\theta} \quad \Rightarrow \quad f'(z) = V_0\,e^{-i\theta} \quad \Rightarrow \quad f(z) = V_0\,e^{-i\theta}z$$

Expresamos el potencial complejo en coordenadas x, y:

$$f(z) = V_0\,e^{-i\theta}z = V_0\,(\cos\theta - i\operatorname{sen}\theta)(x+iy) = (V_0 x\cos\theta + V_0 y\operatorname{sen}\theta) + i(V_0 y\cos\theta - V_0 x\operatorname{sen}\theta)$$

El potencial de velocidades es:

$$\varphi(x,y) = V_0 x\cos\theta + V_0 y\operatorname{sen}\theta$$

La función de corriente es:

$$\psi(x,y) = V_0 y\cos\theta - V_0 x\operatorname{sen}\theta$$

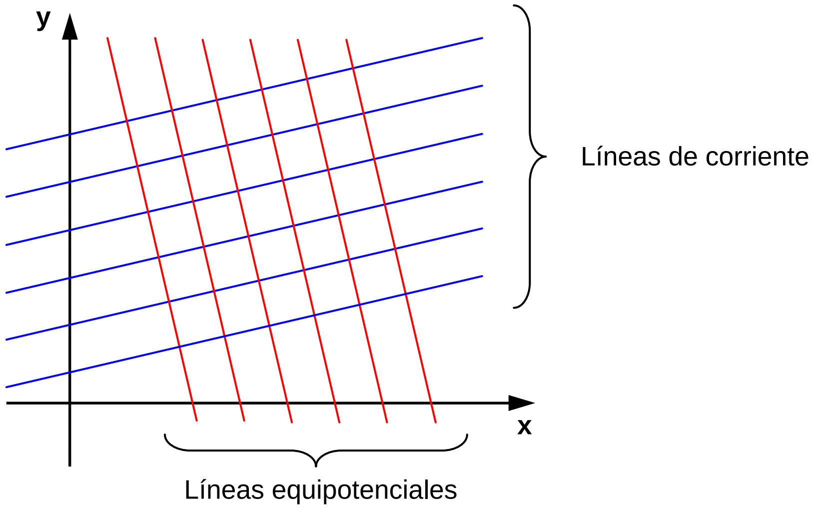
Las líneas equipotenciales se obtienen haciendo:

$$\varphi(x,y) = V_0 x\cos\theta + V_0 y\operatorname{sen}\theta = k_\varphi \quad \Rightarrow \quad y = \frac{k_\varphi}{V_0\operatorname{sen}\theta} - x\operatorname{cotg}\theta$$

Las líneas de corriente se obtienen haciendo:

$$\psi(x,y) = V_0 y\cos\theta - V_0 x\operatorname{sen}\theta = k_\psi \quad \Rightarrow \quad y = \frac{k_\psi}{V_0\cos\theta} + x\operatorname{tg}\theta$$

Se puede ver que las líneas equipotenciales y las líneas de corriente son familias de rectas ortogonales entre sí, lo cual se muestra en el siguiente gráfico:



Si el campo de velocidades es una constante real, es decir que el ángulo θ es cero, entonces se puede escribir de la siguiente forma:

$$\vec{V} = V_0 \vec{x} = (V_0 \ , 0) \qquad (\vec{x}: \text{versor en la dirección } x)$$

En este caso los resultados son los siguientes:

El potencial complejo es:

$$\overline{f'(z)} = V_0 \quad \Rightarrow \quad f'(z) = V_0 \quad \Rightarrow \quad f(z) = V_0 z = V_0(x+iy) = V_0 x + iV_0 y$$

El potencial de velocidades es:

$$\varphi(x,y) = V_0 x$$

La función de corriente es:

$$\psi(x,y) = V_0 y$$

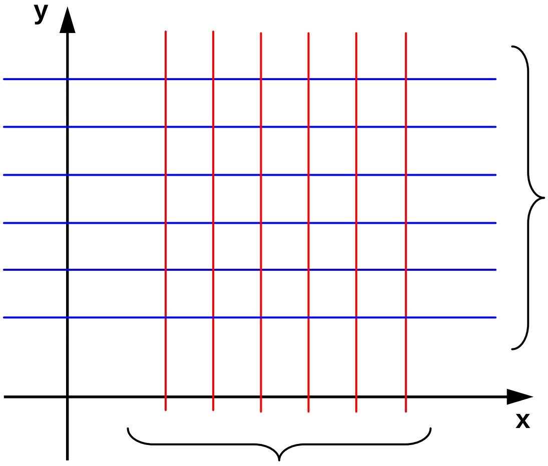
Las líneas equipotenciales se obtienen haciendo:

$$\varphi(x,y) = V_0 x = k_\varphi \quad \Rightarrow \quad x = \frac{k_\varphi}{V_0}$$

Las líneas de corriente se obtienen haciendo:

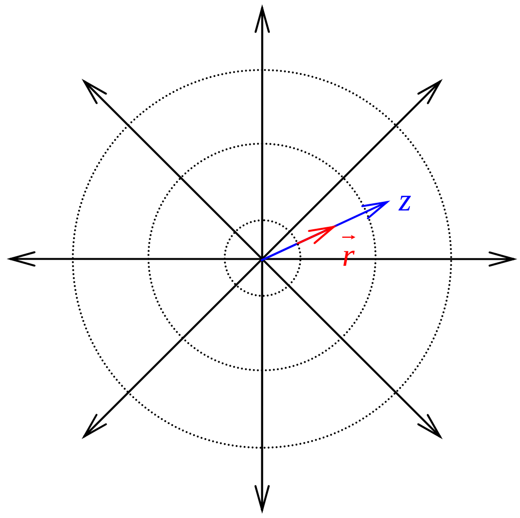
$$\psi(x,y) = V_0 y = k_\psi \quad \Rightarrow \quad y = \frac{k_\psi}{V_0}$$

Se puede ver que las líneas equipotenciales y las líneas de corriente son familias de rectas ortogonales entre sí y en este caso se trata de líneas verticales y horizontales, lo cual se muestra en el siguiente gráfico:



2. Fuente puntual

Consideremos una fuente puntual ubicada en el origen de coordenadas. En este caso hay simetría radial y por lo tanto, considerando $z = r\,e^{i\theta}$ y llamando $\vec{r}$ al versor radial, el campo de velocidades se puede expresar de la siguiente forma:



$$\vec{V}(r,\theta) = V(r)\,\vec{r} \qquad (2.1)$$

Si consideramos una corona circular delimitada por dos circunferencias centradas en el origen de radios r_1 y r_2, dentro de dicho recinto no hay fuentes y por lo tanto la divergencia del campo vectorial es nula. Entonces, si aplicamos el teorema de Gauss queda:

$$\oint_{C(r_2)} \vec{V}\cdot\overrightarrow{d\rho} - \oint_{C(r_1)} \vec{V}\cdot\overrightarrow{d\rho} = \iint_D \nabla\cdot\vec{V}\,ds = 0$$

Esto significa que el flujo del campo vectorial será igual para cualquier circunferencia sin depender de r. Este valor de flujo determina la intensidad de la fuente y lo llamaremos M. Entonces:

$$\oint_{C(r_2)} \vec{V}\cdot\overrightarrow{d\rho} = \oint_{C(r_1)} \vec{V}\cdot\overrightarrow{d\rho} = M$$

$$M = \oint_{C(r)} \vec{V}\cdot\overrightarrow{d\rho} = \oint_{C(r)} V(r)\vec{\rho}\cdot\overrightarrow{d\rho} = V(r)\,2\pi r \qquad (2.2)$$

Es decir que el módulo del campo vectorial es: $V(r) = \dfrac{M}{2\pi r}$

Reemplazando en (2.1): $\vec{V} = \dfrac{M}{2\pi}\dfrac{\vec{r}}{r}$

Utilizando variable compleja, se puede escribir lo siguiente:

$$\frac{\vec{r}}{r} \quad \leftrightarrow \quad \frac{x+iy}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{z}{|z|^2} = \frac{z}{z\bar{z}} = \frac{1}{\bar{z}}$$

Entonces el campo de velocidades será:

$$\vec{V} = \frac{M}{2\pi}\frac{\vec{r}}{r} \quad \leftrightarrow \quad \overline{f'(z)} = \frac{M}{2\pi}\frac{1}{\bar{z}}$$

Hallamos ahora el potencial complejo:

$$\overline{f'(z)} = \frac{M}{2\pi}\frac{1}{\bar{z}} \quad \Rightarrow \quad f'(z) = \frac{M}{2\pi}\frac{1}{z} \quad \Rightarrow \quad f(z) = \frac{M}{2\pi}\,\mathrm{Ln}\, z + k$$

Separando parte real e imaginaria y recordando que $z = r\, e^{i\theta}$:

$$f(z) = \left(\frac{M}{2\pi}\ln r + k_1\right) + i\left(\frac{M}{2\pi}\theta + k_2\right)$$

El potencial de velocidades es:

$$\varphi(r,\theta) = \left(\frac{M}{2\pi}\ln r + k_1\right)$$

La función de corriente es:

$$\psi(r,\theta) = \left(\frac{M}{2\pi}\theta + k_2\right)$$

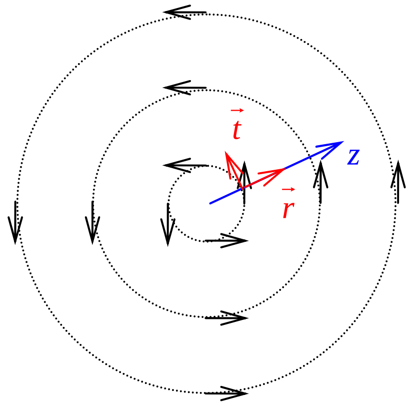
Si en lugar de estar en el origen de coordenadas, la fuente estuviera en $z = z_0$, entonces, el potencial complejo sería:

$$f(z) = \frac{M}{2\pi}\,\mathrm{Ln}(z - z_0) + k$$

Si en lugar de una fuente se tratase de un sumidero, el resultado es el mismo cambiando el signo, ya que un sumidero puede analizarse como una fuente de intensidad negativa.

3. Torbellino puntual

Consideremos un torbellino puntual ubicado en el origen de coordenadas. Al igual que en el caso anterior, hay simetría radial. Pero en este caso, la dirección del vector campo de velocidades es tangencial. Por lo tanto, considerando $z = r\, e^{i\theta}$ y llamando $\vec{t}$ al versor tangencial, el campo de velocidades se puede expresar de la siguiente forma:



$$\vec{V}(r,\theta) = V(r)\vec{t} \qquad (3.1)$$

Si consideramos una corona circular delimitada por dos circunferencias centradas en el origen de radios r_1 y r_2, dentro de dicho recinto no hay torbellinos y por lo tanto el rotor del campo vectorial es nulo. Entonces, si aplicamos el teorema de Stokes queda:

$$\oint_{C(r_2)} \vec{V}\cdot\overrightarrow{d\tau} - \oint_{C(r_1)} \vec{V}\cdot\overrightarrow{d\tau} = \iint_D \nabla\times\vec{V}\, ds = 0$$

Esto significa que la circulación del campo vectorial será igual para cualquier circunferencia sin depender de r. Este valor de circulación determina la intensidad del torbellino y lo llamaremos N. Entonces:

$$\oint_{C(r_2)} \vec{V}\cdot\overrightarrow{d\tau} = \oint_{C(r_1)} \vec{V}\cdot\overrightarrow{d\tau} = N$$

$$N = \oint_{C(r)} \vec{V}\cdot\overrightarrow{d\tau} = \oint_{C(r)} V(r)\vec{\tau}\cdot\overrightarrow{d\tau} = V(r)\, 2\pi r \qquad (3.2)$$

Es decir que el módulo del campo vectorial es: $V(r) = \dfrac{N}{2\pi r}$

Reemplazando en (3.1):

$$\vec{V} = \frac{N}{2\pi}\frac{\vec{t}}{r}$$

Utilizando variable compleja, se puede escribir lo siguiente:

$$\frac{\vec{t}}{r} \leftrightarrow \frac{-y+ix}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{i\,z}{|z|^2} = \frac{i\,z}{z\bar{z}} = i\frac{1}{\bar{z}}$$

Entonces el campo de velocidades será:

$$\vec{V} = \frac{N}{2\pi}\frac{\vec{t}}{r} \leftrightarrow \overline{f'(z)} = i\frac{N}{2\pi}\frac{1}{\bar{z}}$$

Hallamos ahora el potencial complejo:

$$\overline{f'(z)} = i\frac{N}{2\pi}\frac{1}{\bar{z}} \Rightarrow f'(z) = -i\frac{N}{2\pi}\frac{1}{z} \Rightarrow f(z) = -i\frac{N}{2\pi}\operatorname{Ln} z + k$$

Separando parte real e imaginaria y recordando que $z = r\,e^{i\theta}$:

$$f(z) = \left(\frac{N}{2\pi}\theta + k_1\right) + i\left(-\frac{N}{2\pi}\ln r + k_2\right)$$

El potencial de velocidades es:

$$\varphi(r,\theta) = \frac{N}{2\pi}\theta + k_1$$

La función de corriente es:

$$\psi(r,\theta) = -\frac{N}{2\pi}\ln r + k_2$$

Si en lugar de estar en el origen de coordenadas, la fuente estuviera en $z = z_0$, entonces, el potencial complejo sería:

$$f(z) = -i\,\frac{N}{2\pi}\,\mathrm{Ln}(z - z_0) + k$$

4. Dipolo puntual fuente - sumidero

Consideremos un dipolo formado por una fuente ubicada en $z = -h$ y un sumidero ubicado en $z = 0$.

El potencial complejo será la suma de los potenciales generados, es decir:

$$f(z) = \frac{M}{2\pi}\mathrm{Ln}(z+h) - \frac{M}{2\pi}\mathrm{Ln}\,z$$

Multiplicando y dividiendo por h y desarrollando:

$$f(z) = \frac{Mh}{2\pi}\,\frac{\mathrm{Ln}(z+h) - \mathrm{Ln}\,z}{h}$$

El producto Mh se denomina momento dipolar y lo llamaremos p .

Si ahora hacemos tender h a cero para que el dipolo sea puntual, queda:

$$f(z) = \lim_{h\to 0}\frac{p}{2\pi}\,\frac{\mathrm{Ln}(z+h) - \mathrm{Ln}\,z}{h} = \frac{p}{2\pi}\,\frac{d\,\mathrm{Ln}\,z}{dz}$$

Es decir que el potencial complejo del dipolo es:

$$f(z) = \frac{p}{2\pi z}$$

Separando parte real e imaginaria:

$$f(z) = \frac{p}{2\pi(x+iy)} = \frac{px}{2\pi(x^2+y^2)} - i\,\frac{py}{2\pi(x^2+y^2)}$$

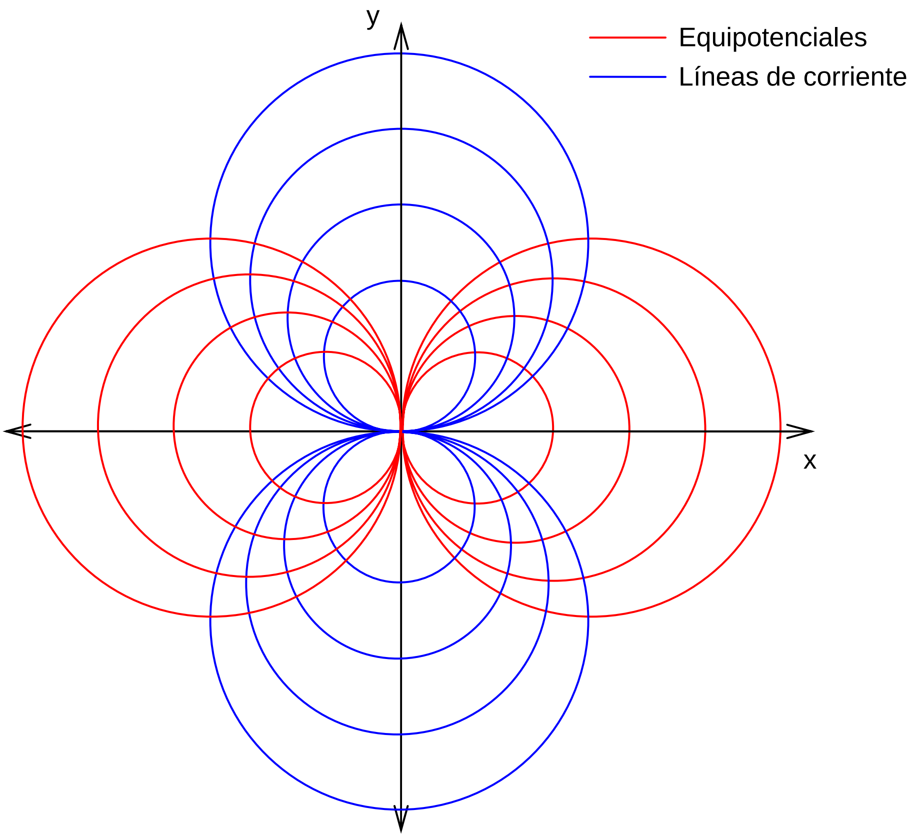
El potencial de velocidades es:

$$\varphi(x,y) = \frac{px}{2\pi(x^2+y^2)}$$

La función de corriente es:

$$\psi(x,y) = -\frac{py}{2\pi(x^2+y^2)}$$

Se puede ver que las líneas equipotenciales y las líneas de corriente serán circunferencias con centro sobre el eje y y sobre el eje x respectivamente, como se muestra en la siguiente figura.



Si en lugar de estar en el origen de coordenadas, el dipolo estuviera en $z = z_0$, entonces, el potencial complejo sería:

$$f(z) = \frac{p}{2\pi(z-z_0)}$$

5. Dipolo puntual torbellino – torbellino

De forma análoga al caso anterior se puede considerar el caso en que hay dos torbellinos puntuales de intensidad N y $-N$ ubicados en $z = z_0 - h$ y en $z = z_0$ y analizar el comportamiento cuando hacemos tender h a cero. El potencial complejo será:

$$f(z) = -\frac{iq}{2\pi(z - z_0)}$$

donde $q = Nh$.

6. Cuadripolo puntual

Supongamos ahora que la expresión de un potencial complejo es una función con un polo simple de orden 1, es decir:

$$f(z) = \frac{C_{-1}}{(z - z_0)} \qquad C_{-1} \in \mathbb{C}$$

En base a lo analizado anteriormente, se ve que esto puede interpretarse como un conjunto de un dipolo (fuente – sumidero) superpuesto con un par de torbellinos de intensidades iguales y opuestas, siendo:

$$C_{-1} = \frac{1}{2\pi}(M - iN)h = \frac{1}{2\pi}(p - iq)$$

$\pm M$: Intensidad de las fuentes

$\pm N$: Intensidad de los torbellinos

Este conjunto se denomina cuadripolo o multipolo de orden 2.

7. Multipolo puntual de orden n

Consideremos un conjunto formado por dos cuadripolos como los del caso anterior con momentos dipolares opuestos, uno ubicado en $z = z_0 - h$ y el otro ubicado en $z = z_0$.

El potencial complejo será la suma de los potenciales generados, es decir:

$$f(z) = \frac{C_{-1}}{(z - z_0 + h)} - \frac{C_{-1}}{(z - z_0)} = \frac{C_{-1}h}{h}\left(\frac{1}{z - z_0 + h} - \frac{1}{z - z_0}\right)$$

Si ahora hacemos tender h a cero y llamando C_{-2} a $-C_{-1}h$ queda:

$$f(z) = -\lim_{h \to 0} \frac{C_{-2}}{h}\left(\frac{1}{z - z_0 + h} - \frac{1}{z - z_0}\right) = -C_{-2}\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{z - z_0}\right)$$

$$f(z) = \frac{C_{-2}}{(z - z_0)^2} \qquad C_{-2} \in \mathbb{C}$$

El conjunto analizado se denomina multipolo de orden 4 y como puede verse de la expresión anterior, su potencial complejo es una función con un polo de orden 2.

No es difícil ver que se puede demostrar que la función potencial de un multipolo de orden 8 será una función con un polo de orden 3. En forma sucesiva, se puede deducir que la función potencial de un multipolo de orden 2^n será una función con un polo de orden n.

Resumen de ejemplos de potenciales complejos

Campo de velocidades	Potencial complejo
Flujo uniforme $\vec{V} = V_0\,\vec{\theta}$	$f(z) = V_0\, e^{-i\theta} z$
Generado por una fuente de intensidad M en z_0	$f(z) = \frac{M}{2\pi}\operatorname{Ln}(z - z_0) \qquad M > 0$
Generado por un sumidero de intensidad M en z_0	$f(z) = \frac{M}{2\pi}\operatorname{Ln}(z - z_0) \qquad M < 0$
Generado por un torbellino de intensidad N en z_0	$f(z) = -\frac{iN}{2\pi}\operatorname{Ln}(z - z_0)$
Generado por un dipolo fuente – sumidero de momento dipolar p en z_0	$f(z) = \frac{p}{2\pi(z - z_0)}$
Generado por un dipolo torbellino – torbellino de momento dipolar q en z_0	$f(z) = -\frac{iq}{2\pi(z - z_0)}$
Generado por un cuadripolo en z_0	$f(z) = \frac{C_{-1}}{(z - z_0)} \qquad C_{-1} \in \mathbb{C}$
Generado por un multipolo de orden n en z_0	$f(z) = \frac{C_{-n}}{(z - z_0)^n} \qquad C_{-n} \in \mathbb{C}$