

álgebra de Boole

$$\mathcal{B} = (K, +, \cdot; 0, 1, -)$$

$|K| \geq 2$ Operaciones cerradas
 $a, b \in K \rightarrow$
 $\begin{cases} a+b \in K \\ a \cdot b \in K \end{cases}$ Neutros, Complementos

A₁) Axioma de Comutatividad

$$\forall a, b \in K : \begin{aligned} a+b &= b+a \\ a \cdot b &= b \cdot a \end{aligned}$$

A₂) Ax. de Asociatividad

$$\forall a, b, c \in K : \begin{cases} (a+b)+c = a+(b+c) = a+b+c \\ (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) = a \cdot b \cdot c \end{cases}$$

A₃) Ax. de la doble distributividad

$$\forall a, b, c \in K : \begin{cases} a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c \\ a + (b \cdot c) = (a+b) \cdot (a+c) \end{cases}$$

A₄) Ax. de Existencia de elementos neutros

$$\exists 0, 1 \in K, 0 \neq 1 / \forall a \in K : \begin{cases} a+0 = a \\ a \cdot 1 = a \end{cases}$$

A₅) Ax. de Existencia de elementos inversos

$$\forall a \in K : \exists \bar{a} \in K : \begin{cases} a + \bar{a} = 1 \\ a \cdot \bar{a} = 0 \end{cases}$$

$$A + B = A \cup B$$

$$A \cdot B = A \cap B$$

(A_1, A_2, A_3 probables en lógica)

$$\left. \begin{array}{l} A + ? = A \\ A \cup \emptyset = A \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{"0"} = \emptyset \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} A \cdot ? = A \\ A \cap M = A \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{"1"} = M \end{array}$$

$$A \cup (M - A) = M = \text{"1"}$$

$$A \cap (M - A) = \emptyset = \text{"0"}$$

$$(P[M]; \cup; \cap; \emptyset; M; \bar{A} = M - A) \text{ es } AB$$

Ej: $K = \{0, 1\}$

+	0	1	·	0	1	$\bar{0} = 1$
0	0	1	0	0	0	$\bar{1} = 0$
1	1	1	0	1	1	

$$(\{0, 1\}; +, \cdot; 0, 1; \bar{}) \text{ es } AB$$

Expresión Dual

Son aquellas que se obtienen cambiando:

I. $+$ $\rightarrow$ $\cdot$

II. $\cdot$ $\rightarrow$ $+$

III. 1 $\rightarrow$ 0

IV. 0 $\rightarrow$ 1

Principio de Dualidad

$$\forall a, b \in B: \begin{cases} \overline{a+b} = \bar{a} \cdot \bar{b} \\ \overline{a \cdot b} = \bar{a} + \bar{b} \end{cases}$$

$$\overline{a+b} = \bar{a} \cdot \bar{b}$$

$$\Rightarrow (a+b) + (\bar{a} \cdot \bar{b}) = 1 \quad (1)$$

$$(a+b) \cdot (\bar{a} \cdot \bar{b}) = 0$$

$$(1) \quad (a+b) + \bar{a} \cdot \bar{b} = a + \underbrace{(b + \bar{a} \bar{b})}_{A_2} \quad \underbrace{a + (\bar{a} \cdot \bar{b})}_{T_5}$$

$\stackrel{=1}{T_4}$

$$T_7) \quad \forall a, b, c \in B : a \cdot b + \bar{a} \cdot c \neq b \cdot c$$

$$(a+b) \cdot (a+c) \cdot (b+c)$$

$$\cancel{a+b} \cdot ab + \bar{a}c + bc = ab + \bar{a}c + bc \cdot 1 = ab + \bar{a}c$$

$$= ab + \bar{a}c + abc + \bar{a}bc = (ab + abc) + (\bar{a}c + \bar{a}bc)$$

$$\text{Eg: 1) } a \cdot b + a \cdot \bar{b}c + a \cdot \bar{b} \cdot \bar{c} + (a+c)(\bar{a}+b)$$

$$ab + \underbrace{a\bar{b}c + a\bar{b}\bar{c}}_{a\bar{b}} + \underbrace{a\bar{a}}_{=0} + ab + c\bar{a} + cb$$

$$\underbrace{ab + a\bar{b}}_{a(b+\bar{b})} + a\bar{b} + c\bar{a} + cb$$

$$\underbrace{a(b+\bar{b})}_{=1} + \bar{a}c + bc$$

$$\underbrace{a}_{=1} + c + bc$$

$$a + c$$

minitermierung

$$f(x, y, z) = \sum_{i=1}^n m_i = (a_0 m_1 + \dots + a_n m_n)$$

$$d + ac + abc + \bar{a}\bar{c} + \bar{a}b =$$

$$\begin{aligned} & \rightarrow abcd \\ & \quad abcd \\ & \rightarrow abcd \\ & \quad abcd \quad 14 \\ & \quad a\bar{b}cd \\ & \quad a\bar{b}cd \quad 10 \\ & \rightarrow abcd \quad 15 \\ & \quad ab\bar{c}d \quad 13 \\ & \quad a\bar{b}cd \quad 11 \\ & \quad a\bar{b}\bar{c}d \quad 9 \\ & \quad \bar{a}bcd \quad 7 \\ & \quad \bar{a}b\bar{c}d \quad 5 \\ & \quad \bar{a}\bar{b}cd \quad 3 \\ & \quad \bar{a}\bar{b}\bar{c}d \quad 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \rightarrow \bar{a}bcd \\ & \quad \bar{a}bcd \quad 6 \\ & \quad \bar{a}b\bar{c}d \\ & \quad \bar{a}b\bar{c}d \quad 4 \\ & \rightarrow \bar{a}bcd \\ & \quad \bar{a}b\bar{c}d \\ & \quad \bar{a}\bar{b}\bar{c}d \\ & \quad \bar{a}\bar{b}\bar{c}d \quad 0 \end{aligned}$$

$$f(a,b,c,d) = \sum m(0, 1, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15)$$

Sumatoria de minterms

$$= \prod M(2, 8, 12)$$

Productoria de maxterms

$$\prod M(2, 8, 12) = (a+b+\bar{c}+d) \cdot (\bar{a}+b+c+d)$$

$$f_n(x, y, \dots) = \sum m_i = \prod M_j \quad \forall i \neq j$$

cd \ ab	00	01	11	10
00	0	0	0	0
01	0	0	0	0
11	0	0	0	0
10	0	0	0	0

(Conmut)

$$\begin{aligned} & \bar{a}\bar{c} \\ & 0, 4 \quad \bar{a}\bar{c}d \\ & 1, 5 \quad \bar{a}\bar{c}d \end{aligned}$$

$$x R y \text{ si } xy = x$$

Es relación de orden? Reflexiva: sí, por idempotencia

Antisimétrica: sí, por conmutatividad

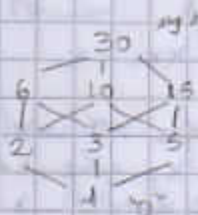
Transitividad: sí, por asociatividad

$$\Rightarrow x \leq y$$

{1, 2, 3}

$$x \leq y \iff x \cdot y = x \quad \text{mcd}(x, y) = x \iff x \mid y$$

$$3 \cdot 5 = \text{mcd}(3, 5) = 1$$



$$x \leq y \text{ si } xy = x \equiv x + y = y$$

Teorema

$$\forall x, y \in B : xy = x \iff x + y = y$$

$$\rightarrow : x + y = xy + y = y$$

$$\leftarrow : xy = x(x + y) = x \cdot x + x \cdot y = x + xy = x$$

$$\text{Ej: 1)} b. a \leq b \iff a \cdot \bar{b} = 0$$

$$a \cdot b = a \quad a + b = b$$

$$\rightarrow : a \cdot \bar{b} = (a \cdot b) \cdot \bar{b} = a(b \cdot \bar{b}) = a \cdot 0 = 0 \quad \nearrow a \cdot \bar{b} = 0$$

$$\leftarrow : b = b + 0 = b + a \cdot \bar{a} = (b + a)(\underbrace{b + \bar{a}}_{=1}) = b + a$$

Teorema

$$\forall x \in B : 0 \leq x \leq 1$$

$$\begin{aligned} & 1 + 0 \cdot x = 1 \text{ por } A_4 \\ & 1 + 0 \cdot x = 0 \text{ por Asociatividad} \end{aligned}$$

Definición

$$x_0 \in B \text{ es un átomo de } B \text{ si } x_0 \neq 0 \text{ y } (x_0 \leq x \implies x = x_0)$$

$$x \cdot x_0 \neq x_0 \rightarrow x \cdot x_0 = x_0 \quad \forall x \cdot x_0 = 0$$

$$xx_0 + x_0 = x_0 \text{ por absorción} /$$

II) Si x_1, x_2 son elementos distintos de $B \rightarrow x_1 \cdot x_2$

D/ Por ser x_i átomo $\underline{I}$, $\forall x \in B: x x_i = 0 \quad \vee \quad x x_i = x_i$

$$\begin{aligned} &\rightarrow x_2 x_1 = 0 \quad \vee \quad x_2 x_1 = x_1 \\ &\xrightarrow{x_2} x_1 x_2 = 0 \quad \vee \quad x_1 x_2 = x_2 \end{aligned} \quad \left\{ \begin{array}{l} x_2 x_1 = 0 \quad \wedge \quad x_1 x_2 = 0 \rightarrow x_1 x_2 = 0 \\ x_2 x_1 = 0 \quad \wedge \quad x_1 x_2 = x_2 \rightarrow x_1 x_2 = x_2 \\ x_2 x_1 = x_1 \quad \wedge \quad x_1 x_2 = 0 \rightarrow x_1 x_2 = 0 \\ x_2 x_1 = x_1 \quad \wedge \quad x_1 x_2 = x_2 \rightarrow x_1 x_2 = x_2 \end{array} \right.$$

III) Si $x \in B / x \cdot x_i = 0 \quad \forall x_i \text{ átomo de } B \rightarrow x = 0$

D/ Considera $A = \{y \in B: 0 \leq y \leq x \text{ y } y \neq 0\}$ y $x \neq 0$

$A \neq \emptyset$ porque $x \in A$. $Z_0 = \text{Min. de una r.a.}$

$$Z_0 \in A, Z_0 \neq 0 \wedge Z_0 \leq x \rightarrow Z_0 x = Z_0 \quad (*)$$

Como Z_0 es mín y no es cero, es átomo.

$$\text{por H) } x Z_0 = 0 \quad \text{y por } (*) (Z_0 x = Z_0) \rightarrow Z_0 = 0 \text{ Absurdo}$$

Teorema

Sean $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ los átomos de $B \rightarrow$

$$\forall x \in B: \exists c_i \in \{0, 1\} \quad 1 \leq i \leq n / x = \sum_{i=1}^n c_i x_i$$

D/ Si $x = 0$ (trivial) $x = 0x_1 + 0x_2 + \dots + 0x_n$

Si $x \neq 0$: define $A = \{x_i: x_i \text{ átomo} \wedge x x_i \neq 0\}$

$A \neq \emptyset$ porque si $A = \emptyset \rightarrow x x_i = 0 \quad \forall x_i \rightarrow x = 0$ por p.p.

$$\text{Definir } y = \sum_{x_i \in A} x_i \quad \text{notación más } x = y \rightarrow \begin{cases} xy = y & (1) \\ x \bar{y} = 0 & (2) \end{cases}$$

$$(1) \quad x \cdot y = x \cdot \sum_{x_i \in A} x_i = \sum_{x_i \in A} x x_i = \sum_{x_i \in A} x_i = y$$

$$\left. \begin{aligned} 15.2 &= \text{mod}(15,2) = 1 = "0" \\ 15.3 &= \text{mod}(15,3) = 0 \neq "1" \\ 15.5 &= \text{mod}(15,5) = 0 \neq "1" \end{aligned} \right\}$$

un átomo: $\{x_i\} \quad x = c_0, x_1 \quad B = \{0, 1\}$

Dois átomos: $\{x_1, x_2\} \quad X = c_1 x_1 + c_2 x_2$

$$0x_1 + 0x_2 = 0$$

$$1x_1 + 0x_2 = x_1$$

$$0x_1 + 1x_2 = x_2$$

$$1x_1 + 1x_2 = x_1 + x_2$$



n átomos: $|B| = 2^n$

Si un conjunto no tiene un número par
imposible construir un álgebra de Boole

Isomorfismos

$$B_1 = (B_1, +, \cdot, 0, 1, -)$$

$$B_2 = (B_2, +, \cdot, 0, 1, -)$$

Son isomorfas si $\exists f: B_1 \rightarrow B_2$ biyect

$$1) f(x + y) = f(x) + f(y)$$

$$2) f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$$

$$3) f(\bar{x}) = \overline{f(x)}$$

Cantidad de isomorfismos posibles = $n!$

Ej: 2!) a $f(0_1) = 0_2$ a pa $f(0_1)$ es "el cero"
 $\rightarrow \forall y \in B_2: y +_2 f(0_1) = f(y)$

$$a + f(0_1) = f(x) + f(0_1) = f(x +_1 0_1) = f(x)$$

Def de $\leq$

$$y \leq f(x_0) = y$$

$$f(x) \leq f(x_0) = f(x)$$

$$f(x_1, x_0) = f(x)$$

Def de inyectiva:

$$x_1 \neq x_0 \rightarrow x \leq x_0 \rightarrow$$

$$f(x) = f(0_1) \rightarrow y = 0_2$$

$$f(x) = f(x_0) \rightarrow y = f(x_0)$$

Propiedades

$$I) x + y = 0 \iff x = 0 \wedge y = 0 \quad x = x + 0 = x + (y \cdot 0) = (x + y) \cdot 0$$

$$II) x \cdot y = 1 \iff x = 1 \wedge y = 1 \quad x = x + 0$$

$$III) x + \bar{y} = z + \bar{y} \wedge x + y = z + y \longrightarrow x = z = (\bar{z} + y)$$

$$IV) x + y = x \cdot y \longrightarrow x = y \quad x = x + 0 = x + y \cdot 0 = (x + y) \cdot (x \cdot 0) = (x + y) \cdot 0 = x + y \cdot 0 = x + 0 = x$$

$$Ej: 13) a) \begin{cases} \omega(x + y + z) = 1 \rightarrow \omega = 1 \wedge x + y + z = 1 \\ xy + xz = y \omega \rightarrow xy + xz = y \\ x \omega = 0 \Rightarrow xy = 0 \end{cases}$$

$$0 + xz = y - xz \quad ; \quad x + xz + z = 1$$

$$x(xz) = 0$$

$$xz = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} xz = 0 \\ x + z = 1 \end{cases} \Rightarrow x = \bar{z}$$

$$\begin{cases} x + y + \bar{x} = 1 \Rightarrow -1 + y = 1 \\ xy + x\bar{x} = y \Rightarrow xy = y \\ x \omega = 0 \Rightarrow xy = 0 \end{cases}$$

$$xy = y > y = 0$$

$$xy = 0$$

$$Solucion: (x, y, z, \omega) = (x, 0, \bar{x}, 1)$$

Dados repartidos en 2 casas, el perro y el gato bien juntos, en tampoco el gato con el conejo que este con ellos al loro.

a. Hallar una función que indique con sea posible distribuirlos.

b. Expresar la función en la forma canónica obtener una expresión simplificada.

d. Hacer circuito con puertos NAND.

p: perro ; g: gato ; c: conejo ; l: loro

	p	g	c	l	
0	0	0	0	0	1
1	0	0	0	1	0
2	0	0	1	0	1
3	0	0	1	1	0
4	0	1	0	0	1
5	0	1	0	1	1
6	0	1	1	0	0
7	0	1	1	1	1
8	1	0	0	0	1
9	1	0	0	1	0
10	1	0	1	0	1
11	1	0	1	1	1
12	1	1	0	0	0
13	1	1	0	1	1
14	1	1	1	0	0
15	1	1	1	1	1

$$f(p, g, c, l) = \bar{p}\bar{g}\bar{c}\bar{l} + \bar{p}\bar{g}c\bar{l} + \bar{p}g\bar{c}\bar{l} + \bar{p}gcl + p\bar{g}\bar{c}\bar{l} + p\bar{g}c\bar{l} + pg\bar{c}\bar{l} + pgcl$$

$$\Sigma m(0, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11, 13, 15)$$

1	1
1	1
1	1
1	1

5, 7, 13, 15:

0, 2, 8, 10:

$$f(p, g, c, l) = g\bar{l} + \bar{g}\bar{l} + \bar{p}\bar{c}\bar{l} + p\bar{c}l$$

Para hacerlo con NAND necesito producto en

$$f(p, g, c, l) = \overline{\bar{g}\bar{l} \cdot \bar{g}\bar{l} \cdot \bar{p}\bar{c}\bar{l} \cdot p\bar{c}l}$$

p	g	c	l
---	---	---	---