

Enunciado

1. Se colocarán 8 regalos navideños en 5 cajas. Suponiendo que los regalos son indistinguibles y que todas las configuraciones distintas son equiprobables calcular la probabilidad de que todas las cajas contengan al menos un regalo navideño.

2. Sean X e Y dos variables aleatorias con densidad conjunta

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{x} \exp\left(-\frac{4x^2 + y}{2x}\right) \mathbf{1}\{x > 0, y > 0\}.$$

Calcular la covarianza entre X e Y .

3. El peso de ciertas bolsas de naranjas es una variable aleatoria exponencial de media 3 kilos. Se van agregando bolsas en una balanza hasta que el peso supera 5 kilos. Calcular la probabilidad de que el peso final en la balanza supere los 7 kilos.

4. El tamaño, X (en MB), de ciertos archivos es una variable aleatoria cuya función de densidad es de la forma

$$f(x|\theta) = \frac{\theta}{x^{\theta+1}} \mathbf{1}\{x \geq 1\}, \quad \theta > 0.$$

Se observa que los tamaños de tres archivos son: 2.5, 3.1, 3.6. En virtud de la información muestral estimar por máxima verosimilitud la probabilidad de que un archivo del mismo tipo tenga un tamaño mayor que 3 MB.

5. ~~La potencia~~ El voltaje de ruptura de ciertos capacitores obedece a una distribución normal. En una muestra aleatoria de 9 capacitores se observaron los siguientes voltajes de ruptura:

210, 230, 225, 178, 208, 223, 239, 179, 205.

Hallar una cota inferior de confianza de nivel 0.95 para ~~la potencia~~ el voltaje de ruptura de dichos capacitores.

Ejercicio 1

Se resuelve como un problema típico de bolas y urnas de la guía 1:

$$n = \text{cantidad de cajas} = 5$$

$$r = \text{cantidad de regalos} = 8$$

_ | _ | _ | _ | _

$$\#posibles = \binom{n+r-1}{r} = \binom{12}{8} = 495$$

Favorables: al tener que tener obligatoriamente un regalo en cada caja, el problema se resume a como poner los 3 regalos sobrantes en algunas de las 5 cajas, entonces:

$$n = 5$$

$$R = 3$$

$$\#favorables = \binom{7}{3} = 35$$

Por lo que la probabilidad de que todas las cajas tengan al menos un regalo es:

$$\frac{\#favorables}{\#posibles} = \frac{35}{495} = 0.0707$$

Ejercicio 2

$$f_{XY}(x,y) = \frac{1}{x}e^{-2x}e^{-y/2x} * 1_{\{x>0, y>0\}}$$

$$\text{Cov}(X,Y) = ?$$

Obtenemos $f_X(x)$, $f_{Y|X=x}(y)$:

$$f_X(x) = \int_0^{\infty} f_{XY}(x,y) dy = \int_0^{\infty} \frac{1}{x} e^{-2x} e^{-y/2x} dy = e^{-2x} \int_0^{\infty} \frac{1}{x} e^{-y/2x} dy = e^{-2x} - 2e^{-y/2x} \Big|_0^{\infty} = 2e^{-2x} * 1_{\{x>0\}}$$

$$f_{Y|X=x}(y) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_X(x)} = \frac{\frac{1}{x} e^{-2x} e^{-y/2x}}{2e^{-2x}} = \frac{1}{2x} e^{-y/2x} * 1_{\{y>0\}}$$

$$X \sim \text{Exp}(\lambda = 2) \quad Y|_{X=x} \sim \text{Exp}(\lambda = \frac{1}{2x})$$

$$E[Y|_{X=x}] = 2x = \varphi(x) \quad E[Y|_X] = \varphi(X) = 2X$$

$$E[X] = \frac{1}{2} \quad V(X) = \frac{1}{4}$$

Como vemos, la esperanza condicional $E[Y|_X]$ es una ecuación lineal, por lo que:

$\frac{\text{Cov}(X,Y)}{V(X)} = 2 \quad \text{Cov}(X,Y) = 2V(X) = 2 \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$
--

Este ejercicio también puede resolverse planteando:

$$\text{Cov}(X,Y) = E[XY] - E[X]E[Y] \text{ pero requiere más cuentas y es más complicado.}$$

Ejercicio 3

La magia del ejercicio es que se puede aprovechar la falta de memoria de las distribuciones exponenciales. Si el peso total hasta el momento es menor a 5kg. se agrega una bolsa más. Si te pasaste, sabés que lo que te sobra va a tomar la forma de una exponencial, con el mismo λ de las bolsas que usás.

X : peso de una bolsa $\sim \text{Exp}(\lambda = \frac{1}{3})$

Por lo tanto:

$$P(\text{"balanza muestre mas de 7kg"}) = P(X > 2) = \int_2^{\infty} \frac{1}{3} e^{-\frac{1}{3}x} dx = -e^{-\frac{1}{3}x} \Big|_2^{\infty} = e^{-\frac{2}{3}}$$

$P(\text{"balanza muestre mas de 7kg"}) = 0.5134$

Ejercicio 4

$$f(x|\theta) = \frac{\theta}{x^{\theta+1}} * 1\{x \geq 1\}, \theta > 0$$

$$\Omega = \{2.6; 3.1; 3.5\}$$

Primero, debemos obtener el θ_{mv} porque nos piden calcular la probabilidad por máxima verosimilitud (tengan bien presente las propiedades de los logaritmos antes de seguir).

$$L(\theta|\Omega) = \prod_{i=1}^n f(x_i|\theta) \Rightarrow \ln(L(\theta|\Omega)) = \ln\left(\prod_{i=1}^n f(x_i|\theta)\right) = \sum_{i=1}^n \ln(f(x_i|\theta))$$

$$\begin{aligned} \ln(L(\theta|\Omega)) &= \sum_{i=1}^n \ln\left(\frac{\theta}{x_i^{\theta+1}}\right) = \sum_{i=1}^n [\ln(\theta) - \ln(x_i^{\theta+1})] = \\ &= \sum_{i=1}^n [\ln(\theta) - (\theta+1)\ln(x_i)] = 3\ln(\theta) - (\theta+1)(\ln(2.6) + \ln(3.1) + \ln(3.5)) \quad (1) \end{aligned}$$

Como sabemos de análisis II, para obtener el máximo (a.k.a θ_{mv}) debemos derivar la función (1) e igualarla a cero:

$$\frac{d(\ln(L(\theta|\Omega)))}{d\theta} = 3\frac{1}{\theta} - (\ln(2.6) + \ln(3.1) + \ln(3.5)) = 0$$

$$\theta_{mv} = 0.898$$

Una vez que obtenemos este resultado, nos queda sacar la probabilidad en $f(x_i|\theta_{mv})$

$$P(\text{"nuevo dato mayor a 3"}) = \int_3^{\infty} \frac{\theta_{mv}}{x^{\theta_{mv}+1}} dx = \int_3^{\infty} \theta_{mv} x^{-\theta-1} dx = -x^{-\theta} \Big|_3^{\infty} = 3^{-\theta_{mv}}$$

$$P(\text{"nuevo dato mayor a 3"}) = 0.372$$

Nota: quizás haya algún error de cuentas, pero el ejercicio esta bien planteado y fue bien calificado de esta forma.

Ejercicio 5

X : voltaje de ruptura del capacitor $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ con μ y σ desconocidos.

$$\Omega = \{210; 230; 225; 178; 208; 223; 239; 179; 205\}$$

Queremos buscar la CI para μ dada la muestra Ω con un nivel de significación de $\alpha = 0.95$

Planteamos el pivote para nuestro parámetro:

$$Y = \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t_{n-1} \quad \text{con} \quad S = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}$$

$$n = 9 \quad \bar{X} = 211.5 \quad S = 21.35 \quad t_{8,0.95} = 1$$

$$\mu \geq \bar{X} - t_{8,\alpha} \frac{S}{\sqrt{n}}$$

$$CI(\mu) = \bar{X} - t_{8,\alpha} \frac{S}{\sqrt{n}} = 211.5 - t_{8,0.95} \frac{21.35}{3} = 198.26$$

Nota: quizás haya algún error de cuentas, pero el ejercicio esta bien planteado y fue bien calificado de esta forma.