Ejercicio 1

a) Definir convergencia en media cuadrática y convergencia puntual de una serie de Fourier.

b) Sea $f : [0, 2] \longrightarrow \mathbb{R}/ \qquad f(x) = \begin{cases} 1 & si\ x = 0 \\ 2 & si\ x = \frac{1}{2} \\ 3 & si\ x = 2 \\ x & si\ x \neq 0,\ x \neq \frac{1}{2},\ x \neq 2 \end{cases}$

c) Comprobar que el DSF de f es $1 - \dfrac{2}{\pi} \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{sin(n\pi x)}{n}$. ¿A qué función converge?. Calcule el DSF exponencial de f a partir de él.

d) Mediante este desarrollo, calcular $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+2n}$.

e)

Ejercicio 2

a) Sea $I(\alpha, \beta) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2)^{\beta} \left(\sqrt{x^2+1}\right)^{\alpha}}$. Hallar la región $A = \Big\{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 :\ I(\alpha, \beta) \text{ es convergente}\Big\}$. Graficar A.

b) Elegir un par (α, β) y calcular la integral por métodos de variable compleja.

Ejercicio 3

Verificar que $\displaystyle\oint_{|z|=\frac{1}{100}} \left[cos\left(1 - \frac{1}{z}\right) - \frac{sin(z+1)}{sh(z)}\right] dz = 0.$

Ejercicio 4

a) Definir transformada y antitransformada coseno de Fourier. Establacer condiciones bajo las cuales se asegura la existencia de ambas. ¿A qué función converge la antitransformada?.

b) Si $F_c(\omega)$ es la transformada coseno de Fourier, establenciendo las hipótesis necesarias, mostrar que

$$\mathcal{F}_c\left\{f''(t)\right\}(\omega) = -f'\left(0^+\right) - \omega^2 F_c(\omega)$$

c) Resolver mediante transformada coseno de Fourier el problema

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 & 0 < x < \infty, \quad 0 < y < \infty \\ u_y(x, 0) = 0 \\ u(0, y) = f(y) \end{cases}$$

d) Decidir cuál o cuáles de las siguientes funciones podrían ser $f(y)$: (i) y^2, (ii) $H(y)$, (iii) e^{-2y}.

e) Describir un posible problema físico representado por este modelo.

Ejercicio 5

a) Demostrar que si $f(t)$ es una función continua de orden exponencial, entonces $g(t) = \displaystyle\int_0^t f(x)dx$ es también de orden exponencial.

b) Demostrar, estableciendo hipótesis necesarias, que si $F(s)$ es la transformada de Laplace de $f(t)$, entonces $G(s) = \dfrac{F(s)}{s}$, siendo ésta última la transformada de Laplace de la función $g(t)$ del item a).