

$$X(s) = \frac{-17}{s-2} - \frac{12}{s-3}$$

$$L^{-1} \left\{ X(s) \right\} \Rightarrow x(t) = (-17 \cdot e^{2t} - 12 \cdot e^{3t}) u(t)$$

Y holo para $s \geq 3$

$$b) Y(s) = \frac{7s+3}{(s-2)(s-3)} = \frac{7s}{(s-2)(s-3)} + \frac{3}{(s-2)(s-3)}$$

$|Y(s)| \leq \frac{M}{|s-a|}$ Trab para $s \leq a$
 y Tiene un n.º finito de singularidades en $\text{Re}(s) < a \Rightarrow$

$$L^{-1} \left\{ Y(s) \right\} \Rightarrow y(t) = \sum_{k=1}^n \text{Res} \left(F(s) \cdot e^{st}, s_k \right) = \lim_{s \rightarrow 2} \frac{(s-2) \cdot (7s+3) \cdot e^{2t}}{(s-2)(s-3)} + \lim_{s \rightarrow 3} \frac{(s-3) \cdot (7s+3) \cdot e^{3t}}{(s-2)(s-3)} = 17 \cdot e^{2t} + 24 \cdot e^{3t}$$

$$y(t) = -17 \cdot e^{2t} + 24 \cdot e^{3t}$$

$$10/2/10$$

s) Para cumplir lo pedido debe ser la parte imaginaria de un potencial complejo.

Debe ser la parte imaginaria de una función holomorfa

$$\underbrace{e^{x^2-y^2} \sin(2xy) - \frac{y}{x^2+y^2} + x^2-y^2}_{\text{Im}(e^{z^2})} \quad \text{Armonica en } \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$$

$$z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$$

$$e^{z^2} = e^{x^2-y^2} \cdot \cos(2xy) + i e^{x^2-y^2} \cdot \sin(2xy)$$

$$\Rightarrow e^{x^2-y^2} \sin(2xy) - \frac{y}{x^2+y^2} + x^2-y^2 = \text{Im} \left(e^{z^2} + \frac{1}{z} + z^2 \right) \quad \frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy} \cdot \frac{x-iy}{x-iy} = \frac{x-iy}{x^2+y^2}$$

Por lo tanto puede ser la ecuación de las líneas de flujo de un fluido ideal en $D = \mathbb{R}^2 - \{0,0\}$

$$\Rightarrow \text{Potencial complejo} = \boxed{W(z) = e^{z^2} + \frac{1}{z} + z^2} \quad \text{en } D = \mathbb{C} - \{0,0\}$$

$$2) \begin{cases} -x'(t) + 2y'(t) - 3x(t) + 10y(t) = 0 \\ x'(t) + 3x(t) + 8y(t) = 10 \end{cases}$$

$$L(x'(t))_{(s)} = sX(s) - \underbrace{x(0^+)}_0$$

$$L(y'(t))_{(s)} = sY(s) - \underbrace{y(0^+)}_0$$

$$L(x(t))_{(s)} = X(s)$$

$$L(y(t))_{(s)} = Y(s)$$

$$\begin{cases} -sX(s) + 2sY(s) - 3X(s) + 10Y(s) = 0 \\ sX(s) + 3X(s) + 8Y(s) = 10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (-s-3)X(s) + (2s+10)Y(s) = 0 \\ (s+3)X(s) + 8Y(s) = 10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (-s-3)X(s) + (2s+10)Y(s) = 0 \\ (s+3)X(s) + 8Y(s) = 10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (-s-3)X(s) + (2s+10)Y(s) = 0 \\ (s+3)X(s) + 8Y(s) = 10 \end{cases}$$

$$\operatorname{Re}(s) > 0$$

Resuelvo por regla de Cramer

$$X(s) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 2s+10 \\ 10 & 8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -s-3 & 2s+10 \\ s+3 & 8 \end{vmatrix}} = \frac{20s+100}{-8s-24-2s^2-6s-10s-30} = \frac{20s+100}{-2s^2-24s-34} = \frac{10(s+5)}{s^2+12s+17}$$

$$X(s) = \frac{-10(s+5)}{(s+6)(s+13)}$$

$$Y(s) = \frac{\begin{vmatrix} -s-3 & 0 \\ s+3 & 10 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -s-3 & 2s+10 \\ s+3 & 8 \end{vmatrix}} = \frac{-10(s-3)}{-2(s+6)(s+13)} = \frac{s(s-3)}{(s+6)(s+13)}$$

$$\frac{-12 \pm \sqrt{12^2 - 4 \cdot 1 \cdot 27}}{2 \cdot 1} =$$

$$s_1, s_2 = \frac{-12 \pm \sqrt{36}}{2} = \frac{-12 \pm 6}{2} = -6, -13$$

Ant. Transformamos por Residuos.

$$x(t) = \operatorname{Res} \left(\frac{-10(s+5)}{(s+6)(s+13)} \cdot e^{st}, -6 \right) + \operatorname{Res} \left(\frac{-10(s+5)}{(s+6)(s+13)} \cdot e^{st}, -13 \right)$$

$$x(t) = \lim_{s \rightarrow -6} \frac{-10(s+5)}{s+13} \cdot e^{st} + \lim_{s \rightarrow -13} \frac{-10(s+5)}{s+6} \cdot e^{st}$$

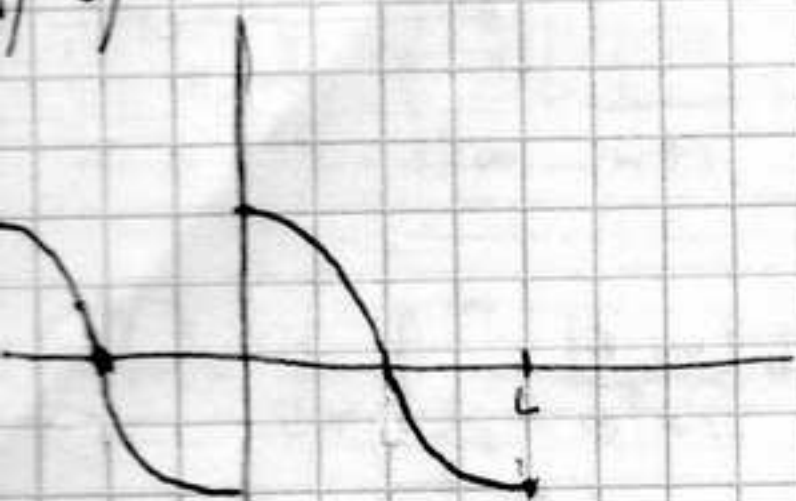
$$x(t) = \frac{10 \cdot e^{-6t}}{12} + \frac{120 \cdot e^{-13t}}{-12} = \frac{5}{6} \cdot e^{-6t} - 10 e^{-13t}$$

$$y(t) = \lim_{s \rightarrow -6} \frac{s(s-3)}{s+13} \cdot e^{st} + \lim_{s \rightarrow -13} \frac{s(s-3)}{s+6} \cdot e^{st}$$

$$y(t) = \frac{-45 \cdot e^{-6t}}{12} + \frac{105 \cdot e^{-13t}}{12}$$

$$t > 0$$

d)



Como busco el desarrollo en series de Fourier seno $\Rightarrow$

$$a_0 = 0 \quad a_n = 0$$

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \frac{2}{L} \left[\frac{\cos\left(\frac{n\pi}{L} + \frac{\pi}{L}\right)}{\frac{2(n\pi + \pi)}{L}} - \frac{\cos\left(\frac{n\pi}{L} - \frac{\pi}{L}\right)}{\frac{2(n\pi - \pi)}{L}} \right] \Big|_0^L$$

$$n \neq 1 \quad b_n = \frac{2}{L} \cdot \left(\frac{-\cos\left(\frac{(n+1)\pi}{L}\right)}{\frac{2(n+1)\pi}{L}} - \frac{\cos\left(\frac{(n-1)\pi}{L}\right)}{\frac{2(n-1)\pi}{L}} \right) \Big|_0^L = \frac{2}{L} \left(\frac{L(-1)^n}{2(n+1)\pi} + \frac{L(-1)^n}{2(n-1)\pi} + \frac{1}{2(n+1)\pi} + \frac{1}{2(n-1)\pi} \right)$$

$$b_n = \frac{1+(-1)^n}{2(n+1)\pi} + \frac{1+(-1)^n}{2(n-1)\pi}$$

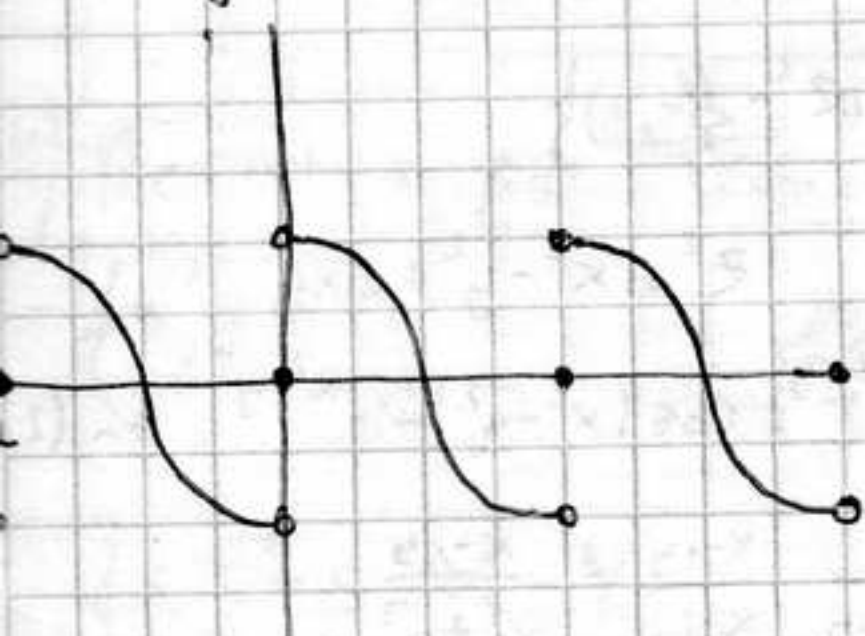
si $n=1$

$$b_1 = \frac{2}{L} \int_0^L \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) dx = \frac{2}{L} \int_0^L \frac{1}{2} \cdot \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right) = -\frac{1}{L} \cdot \cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right) \cdot \frac{L}{2\pi} \Big|_0^L = -\frac{1}{2\pi} \cdot (1-1) = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{si } n \text{ es impar } b_n = 0 \\ \text{si } n \text{ es par } b_n = \frac{1+(-1)^n}{2(n+1)\pi} + \frac{1+(-1)^n}{2(n-1)\pi} \end{array} \right\} b_n = \frac{1}{(2n+1)\pi} + \frac{1}{(2n-1)\pi} \quad \forall n$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(2n+1)\pi} + \frac{1}{(2n-1)\pi} \right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

Converge a

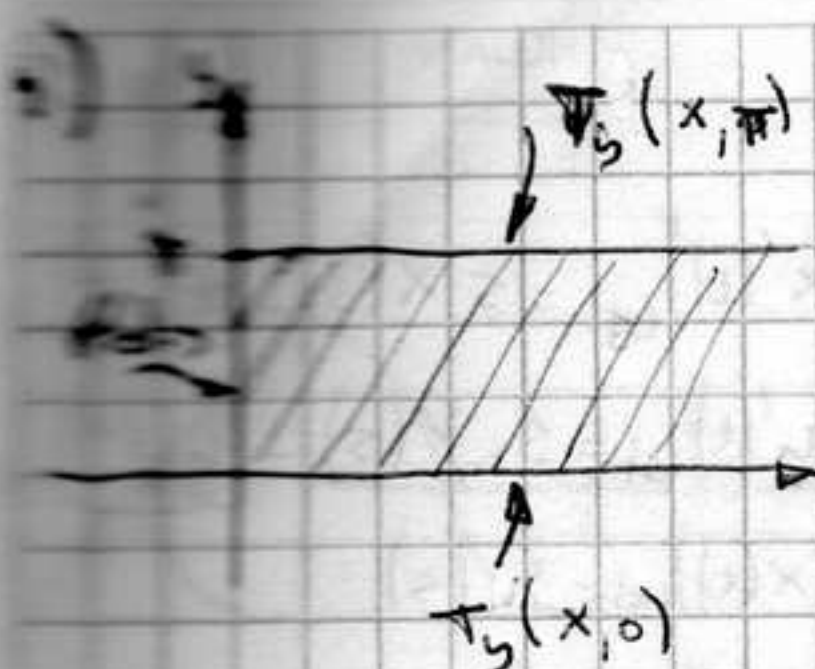


Es decir converge a la extensión periódica impar de $f(x)$ donde ésta es continua y a 0 en los puntos donde no lo es.

c) No se puede derivar miembro a miembro porque para que la igualdad siga valiendo la convergencia de la serie debe ser uniforme. Como f no es continua no puede haber convergencia uniforme.

d) si se puede, pues f es seccionalmente continua y $2L$ periódica y el a_0 de la serie es 0 por ser una serie de senos.

$$\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \cdot \frac{L}{\pi} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(2n+1)\pi} + \frac{1}{(2n-1)\pi} \right) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cdot \frac{L}{\pi}$$



La ecuación del calor en régimen estacionario es

$$T_{xx}(x, y) + T_{yy}(x, y) = 0$$

Resuelto por variables separables.

Propongo $T(x, y) = X(x) \cdot Y(y)$

$$T_{xx}(x, y) = X''(x) \cdot Y(y)$$

$$T_{yy}(x, y) = X(x) \cdot Y''(y)$$

$$T(0, y) = y$$

$$X''(x) Y(y) + X(x) Y''(y) = 0$$

Divido por T

$$\frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} = 0$$

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = \alpha$$

separa en 2 ecuaciones

$$\alpha = \lambda^2$$

Como el miembro izq. depende solo de x y el derecho solo de y deben ser igual a una constante

$$X''(x) - \alpha X(x) = 0$$

$$X(x) = A \cdot e^{\lambda x} + B \cdot e^{-\lambda x}$$

$$X(x) = A \cdot e^{n x} + B \cdot e^{-n x}$$

Debo pedir λ pre sea positivo en $[0, \infty)$

$$\Rightarrow X(x) = C \cdot e^{-n x} \quad \text{con } n > 0$$

$$Y''(y) + \alpha Y(y) = 0$$

$$Y(y) = A \cdot \cos(\lambda y) + B \cdot \sin(\lambda y)$$

$$Y'(y) = -A \cdot \lambda \sin(\lambda y) + \lambda B \cdot \cos(\lambda y)$$

$$Y'(0) = \lambda B = 0 \Rightarrow B = 0$$

$$Y'(\pi) = -A \lambda \sin(\lambda \pi) = 0$$

$$\lambda \pi = n \pi$$

$$\lambda = n$$

$$Y(y) = A \cdot \cos(n y)$$

$$T(x, y) = C \cdot \cos(n y) \cdot e^{-n x}$$

$$T_n(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n y) \cdot e^{-n x}$$

$$T_n(0, y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n y) = y$$

$$C_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} y \cdot \cos(n y) dy$$

$$T(x, y) = C_n \cos(n y) \cdot e^{-n x}$$

3) Para que $f(t)$ tenga Transformada de Fourier debe pedir que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(at)}{t} \cdot e^{-i\omega t} dt \quad \text{converge.}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iat} - e^{-iat}}{2it} \cdot e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{it(a-\omega)}}{2it} dt - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-it(a+\omega)}}{2it} dt$$

Kemos si la integral converge en $(1, \infty)$

~~$\frac{1}{2i} \int_1^{\infty} \frac{e^{it(a-\omega)}}{t} dt$~~ $p = \frac{1}{-it}$ es C_1 en $(1, \infty)$, decimos pues $p' = -\frac{1}{t^2} < 0 \quad \forall t \in (1, \infty)$

~~$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} = 0$~~

~~$\int_1^{\infty} \frac{e^{it(a-\omega)}}{t} dt = \int_1^{\infty} \frac{e^{it(a-\omega)}}{t} dt = \int_1^{\infty} \frac{e^{it(a-\omega)}}{t} dt$~~

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{it(a-\omega)}}{2it} dt$$

$$\int_P \frac{e^{iz(a-\omega)}}{2iz} dz$$

$$\int_{C_1 + C_2} \frac{e^{iz(a-\omega)}}{(z \cdot 2i)} dz = \int_{C_1} \frac{e^{iz(a-\omega)}}{2iz} dz + \int_{C_2} \frac{e^{iz(a-\omega)}}{2iz} dz = 0$$

Por Jordan 3

20 polo simple e_2 sea k en $\arg$, $\arg(a-\omega) = 0$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{C_2} \frac{e^{iz(a-\omega)}}{2iz} dz = i \operatorname{Res}(f, 0) \cdot -\pi = i \cdot 1 \cdot -\pi = -\frac{\pi}{2}$$

