

Final del S/B/O/P

1)

① Quiero desarrollar $f(z) = \frac{1}{z-2}$ en series de potencia de $(z-i)$

$$f(z) = \frac{1}{z-2} = \frac{1}{z-i+i-2} = \frac{1}{(i-z)\left(1+\frac{(z-i)}{(i-z)}\right)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(i-z)} \frac{(z-i)^n}{(i-z)^n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n (z-i)^n}{(i-z)^{n+1}}$$

$$f(z) = \frac{1}{(z-i)\left(1+\frac{(i-z)}{(z-i)}\right)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z-i} \cdot \frac{(i-z)^n}{(z-i)^n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n (i-z)^n}{(z-i)^{n+1}}$$

$$\left| \frac{z-i}{i-z} \right| < 1$$

$$R_c: |z-i| < \sqrt{5}$$

$$\frac{|i-z|}{|z-i|} < 1$$

$$R_c: \sqrt{5} < |z-i|$$

② En las regiones indicadas la convergencia es uniforme pues f es holomorfa en esas regiones $\Rightarrow$ puedo integrar derivar miembro a miembro las series halladas -

$$\Rightarrow -f'(z) = \frac{1}{(z-2)^2} = - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n \cdot (z-i)^{n-1}}{(i-z)^{n+1}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot n \cdot (z-i)^{n-1}}{(i-z)^{n+1}} \quad R_c: |z-i| < \sqrt{5}$$

$$\Rightarrow -f'(z) = \frac{1}{(z-2)^2} = - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} (i-z)^n}{(z-i)^{n+2}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} (i-z)^n}{(z-i)^{n+2}} \quad R_c: |z-i| < \sqrt{5}$$

③ Dicha integral es igual a 0 pues $\frac{1}{(z-2)^2}$ es una ~~función~~ función holomorfa

en la región considerada y esto se asegura por el Teorema de Cauchy-Goursat que si la curva se recorre en sentido $\oplus$ ese integral da 0.

z. Por Teorema de los Residuos sabemos que $\oint \frac{1}{(z-2)^2} = 2\pi i \sum_{n=1}^k \text{Res}(f, z_n)$.

Como la ~~función~~ función no posee singularidades en la región considerada

el término $i z$ fuerza que es la suma de los residuos en la singularidades por 2π .

es 0.

$$\oint_C \frac{1}{(z-2)^2} dz = 2\pi i \lim_{z \rightarrow 2} \left(\frac{(z-2)^2 \cdot 1}{(z-2)^2} \right)' = 0$$

$$\frac{1}{\left(\frac{1-z}{z}\right)^2} = \frac{1 \cdot z^2}{(1-z)^2}$$

$$\mathcal{F}(f) \cdot \mathcal{F}(g) = \int_{-\infty}^{\infty} f \cdot e^{-i\omega t} dt \quad \text{HOJA N}^\circ \quad \int_{-\infty}^{\infty} g \cdot e^{-i\omega t} dt$$

FECHA

4) Sea $f(t)$ y $g(t)$

$$f(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cdot g(t-\tau) \cdot U(t-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cdot g(t-\tau) d\tau$$

$$\mathcal{F}(f(t) * g(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cdot g(t-\tau) U(t-\tau) e^{-i\omega t} dt d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \left(\int_{-\infty}^{\infty} g(t-\tau) U(t-\tau) e^{-i\omega t} dt \right) d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \left(\int_{-\infty}^{\infty} g(t-\tau) U(t-\tau) e^{-i\omega t} dt \right) d\tau$$

$$\begin{aligned} & \text{Hagamos } v = t - \tau \\ & t - \tau = v \\ & dt = dv \end{aligned}$$

$$G(\omega) \int_{-\infty}^{\infty} g(v) U(v) e^{-i\omega(v+\tau)} dv = \int_{-\infty}^{\infty} g(v) U(v) e^{-i\omega v} dv$$

$$= e^{-i\omega \tau} \mathcal{F}(g)(\omega)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cdot e^{-i\omega \tau} d\tau \cdot \mathcal{F}(g)(\omega) = \mathcal{F}(f)(\omega) \cdot \mathcal{F}(g)(\omega)$$

$$\mathcal{F}(f)(\omega)$$

$$2) \int_0^t f(t) * g(t) = \int_0^t e^{-2t} U(t) \cdot e^{-4(t-\tau)} U(t-\tau) d\tau = \int_0^t e^{-2t} \cdot e^{-4t} \cdot e^{4\tau} d\tau = e^{-4t} \int_0^t e^{2\tau} d\tau$$

$$= e^{-4t} \cdot \frac{e^{2\tau}}{2} \Big|_0^t$$

$$= e^{-4t} \cdot \frac{e^{2t} - 1}{2}$$

$$= \frac{e^{-2t} - e^{-4t}}{2}$$

$$\text{Si } t > 0$$

$$\text{Si } t < 0$$

$$= 0$$

$$3) \mathcal{F}(f(t) * g(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{e^{-2t} - e^{-4t}}{2} \right) U(t) e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (e^{-2t} - e^{-4t}) U(t) e^{-i\omega t} dt$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{e^{(-2-i\omega)t}}{(-2-i\omega)} - \frac{e^{(-4-i\omega)t}}{(-4-i\omega)} \right) \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2+i\omega} + \frac{1}{4+i\omega} \right) = \frac{1}{2} \frac{4+i\omega - (2+i\omega)}{8+6i\omega - \omega^2} = \frac{1}{8+6i\omega - \omega^2}$$

$$\mathcal{F}(f(t))(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2t} U(t) e^{-i\omega t} dt = \int_0^{\infty} e^{(-2-i\omega)t} dt = \frac{e^{(-2-i\omega)t}}{-2-i\omega} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{2+i\omega}$$

$$\mathcal{F}(g(t))(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-4t} U(t) e^{-i\omega t} dt = \int_0^{\infty} e^{(-4-i\omega)t} dt = \frac{e^{(-4-i\omega)t}}{-4-i\omega} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{4+i\omega}$$

$$\frac{1}{2+i\omega} \cdot \frac{1}{4+i\omega} = \frac{1}{8+6i\omega - \omega^2}$$

Vemos que son iguales.

f, secc. continua $[0, p] \rightarrow [0, \infty)$ Tmb
 $E_0, p] \rightarrow [0, \infty)$ Tmb

f de orden exponencial

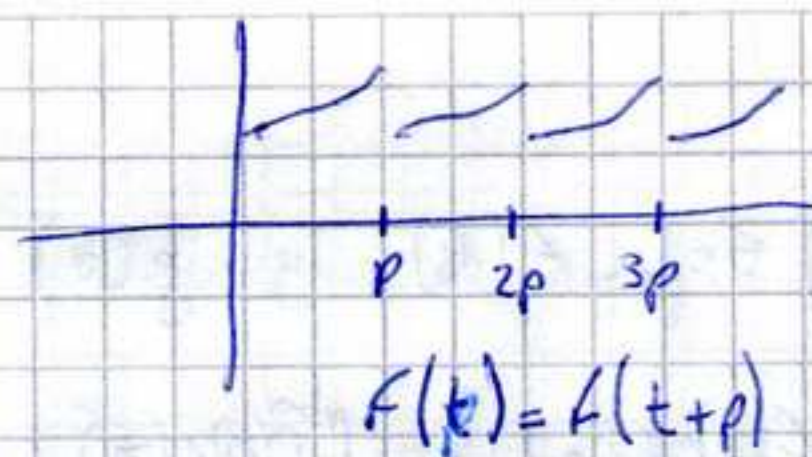
$$(2) L(f_p(t))_{(s)} = \int_0^{\infty} f_p(t) \cdot e^{-st} dt$$

$$L(f_p(t))_{(s)} = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{n \cdot p}^{(n+1)p} f_p(t) \cdot e^{-st} dt$$

$$L(f_p(t))_{(s)} = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^p f(x+np) \cdot e^{-s(x+np)} dx \quad | \quad x=t-np$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-snp} \cdot \int_0^p f(x) \cdot e^{-sx} dx = \frac{1}{1-e^{-sp}} \cdot \int_0^p f(x) \cdot e^{-sx} dx$$

$\underbrace{e^{-sp} + e^{-2sp} + e^{-3sp} + \dots}_{\frac{1}{1-e^{-sp}}}$



(2) $\frac{1}{s(1-e^{-s})}$ Si el periodo = 1 $\Rightarrow \int_0^1 f(x) \cdot e^{-sx} dx = \int_0^1 U(x) \cdot e^{-sx} dx = \frac{1}{s}$
 y $f(x) = U(x)$ Tal que $\Rightarrow \int_0^1 f(x) \cdot e^{-sx} dx = \frac{1}{s}$
 Vimos que puede serlo. $Re(s) > 0$

(3) $\Rightarrow$ La función es $f(x) = U(x)$

3) Puede tratarse de la ecuación del calor en una varilla entre 0 y π con una temperatura inicial dada por $\sin x$.

$$U_x'(x, t) = U_{xx}''(x, t) \quad 0 \leq x \leq \pi \quad t > 0$$

$$U_x(0, t) = 0 \quad t > 0$$

$$U(\pi, t) = 0 \quad t > 0$$

$$U(x, 0) = \sin x \quad 0 \leq x \leq \pi$$

Propongo una solución $U(x, t) = T(t) \cdot X(x)$ Tal que $U_{xx}(x, t) = T(t)X''(x)$

$$T'(t) \cdot X(x) = T(t) \cdot X''(x)$$

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = \alpha$$

$$\frac{T'(t)}{T(t)} - \alpha T(t) = 0$$

$$Ae^{\alpha t} + Be^{-\alpha t}$$

$$X''(x) - \alpha X(x) = 0$$

$$X'(0) = 0$$

$$U_x = T(t) X'(x)$$

$$U_{xx}(x, t) = T(t) X''(x)$$

$$U_t(x, t) = T'(t) X(x)$$

Como el miembro izq depende solo de t y el derecho solo de x y son iguales deben ser iguales a una constante. Resuelva por variables separables.

propongo que la solución sea de la forma

$$U(x,t) = V(x,t) + p(x)$$

$$\text{con } p'(x) = 0$$

$$p'(0) = 0$$

$$p(\pi) = 10$$

$$U_x(0,t) = V_x(0,t) + p'(0) = 0$$

$$\boxed{V_x(0,t) = 0}$$

$$U(\pi,t) = V(\pi,t) + p(\pi) = 10$$

$$\boxed{V(\pi,t) = 0}$$

$$U_{xx}(x,t) = V_{xx}(x,t) + p''(x) = V_{xx}(x,t) = U_t(x,t) = V_t(x,t)$$

$$U(x,0) = V(x,0) + p(x) = \sin x$$

$$\boxed{V(x,0) = \sin x - p(x)}$$

veamos que es $p(x)$

$$p''(x) = 0$$

$$p(x) = Ax + B$$

$$p'(x) = A$$

$$p'(0) = 0 \Rightarrow A = 0$$

$$p(\pi) = 10$$

$$\boxed{p(x) = 10}$$

$$\boxed{V(x,0) = \sin x - 10}$$

Resuelvo para variables Separables

$$V_{xx}(x,t) = V_t(x,t)$$

$$V_x(0,t) = 0$$

$$V(\pi,t) = 0$$

$$V(x,0) = \sin x - 10$$

propongo que

$$V(x,t) = X(x) \cdot T(t)$$

$$V_{xx}(x,t) = X''(x) \cdot T(t)$$

$$V_t(x,t) = X(x) \cdot T'(t)$$

$$X''(x) \cdot T(t) = X(x) \cdot T'(t)$$

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{T(t)} = \alpha$$

Divido en 2 ecuaciones

$$X''(x) - \alpha X(x) = 0 \quad \alpha = \lambda^2$$

$$X(\pi) = 0 \quad X'(0) = 0$$

$$X(x) = A \cdot \sin(\lambda x) + B \cos(\lambda x)$$

$$X'(x) = A \cdot \lambda \cos(\lambda x) + B \lambda \sin(\lambda x)$$

$$X'(0) = A \lambda = 0 \Rightarrow A = 0$$

$$X(\pi) = B \cos(\lambda \pi) = 0 \quad \lambda \pi = \pi + k\pi = \pi(k+1)$$

igual a una constante pues el numerador depende solo de x , y el denominador solo de t deben ser igual a una constante para ser igual

$$T'(t) - \alpha T(t) = 0$$

$$T(t) = C \cdot e^{\alpha t}$$

$$T(t) = C \cdot e^{\pi^2 \left(\frac{k+1}{2}\right)^2 t}$$

$$V(x,t) = B \cos\left(\frac{k+1}{2}x\right) \cdot e^{\pi^2 \left(\frac{k+1}{2}\right)^2 t}$$

$$u(x,t) = D_k \cdot \cos\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)x\right) \cdot e^{\left(k+\frac{1}{2}\right)^2 t}$$

$$u(x,0) = D_k \cdot \cos\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)x\right) = \sin x - 10$$

$$D_k = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi (\sin x - 10) \cdot \cos\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)x\right) dx$$

$$u(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} D_k \cdot \cos\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)x\right) \cdot e^{\left(k+\frac{1}{2}\right)^2 t} + 10$$

1P/2/09

a) Singularidades aisladas de $f(z)$ en $\mathbb{C}$: $p_1(0, -3)$, $p_2(0, 3)$, $p_3(-1, 0)$

$$\oint_{C_1} f(z) dz = 2 \quad \text{②} \quad \oint_{C_3} f(z) dz = 3$$

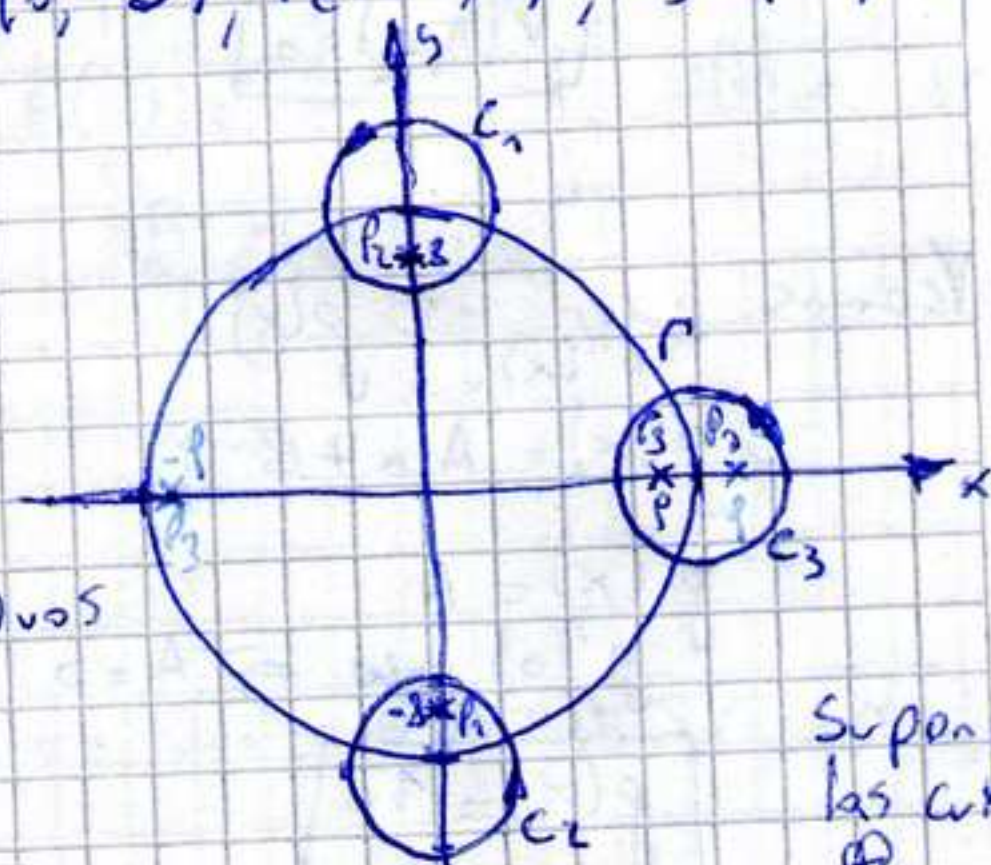
$$\oint_{C_2} f(z) dz = 3$$

De ① $2\pi i \operatorname{Res}(f, 3i) = 2$
 $\operatorname{Res}(f, 3i) = \frac{1}{\pi i} = -\frac{1}{\pi} i$

De ② $2\pi i \operatorname{Res}(f, -3i) = 3$
 $\operatorname{Res}(f, -3i) = \frac{-3i}{2\pi}$

De ③ $2\pi i \operatorname{Res}(f, -1) = 3$
 $\operatorname{Res}(f, -1) = \frac{-3i}{2\pi}$

Por T. Residuos

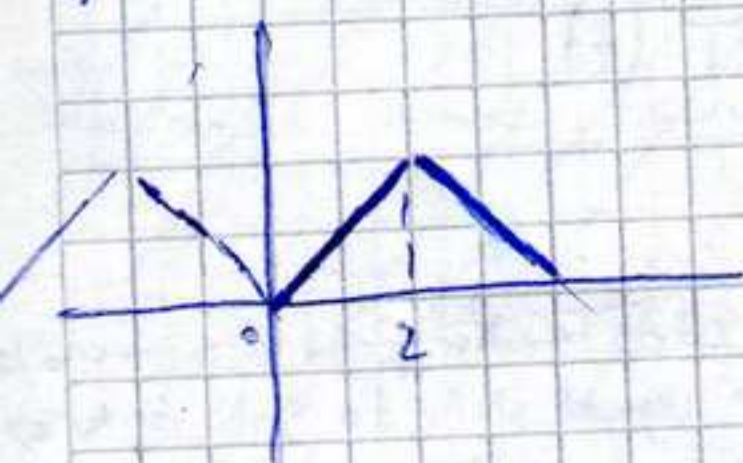


Supongo Todos las curvas orientadas

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \operatorname{Res}(f, 3i) + \operatorname{Res}(f, -3i) + \operatorname{Res}(f, -1) = -\frac{1i}{\pi} - \frac{3i}{2\pi} - \frac{3i}{2\pi}$$

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \frac{-2i + 3i - 3i}{2\pi} = \frac{-8i}{2\pi} = -\frac{4i}{\pi}$$

b) $f(x) = x$



$$\tilde{f}(x) = \frac{1}{2} \int_0^2 f(x) dx$$

$$a_n = \frac{1}{2} \int_0^2 x \cdot \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right) dx$$

$$a_n = \frac{x \cdot \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right)}{\frac{n\pi}{2}} \Big|_0^2 - \int_0^2 \frac{\sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right)}{\frac{n\pi}{2}} dx$$

$$a_n = \frac{2 \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)}{(n\pi)^2} \Big|_0^2 = \frac{2}{(n\pi)^2} (1 - 1) = 0$$

$$a_n = \frac{2 \cdot ((-1)^n - 1)}{(n\pi)^2}$$

Por ser f continua en $[0, 2]$ converge ~~uniformemente~~ $a_0 = 0$

$\Rightarrow$ En $[0, 2]$ la serie converge puntualmente en todo punto y también hay

Convergencia en norma Cuadrática

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot ((-1)^n - 1)}{(n\pi)^2} \cdot \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)$$