Parcial Análisis III

Santiago Piccinini

Noviembre 2006

Índice

1. Ejercicio 1

1.1. Enunciado

Calcular la siguiente integral:

$$\oint_{|z|=1} \frac{dz}{\tan(\frac{1}{z})}$$

Calcular la siguiente serie de Riemann

$$\mathcal{Z}(2) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$$

1.2. Resolución

$$\oint_{|z|=1} \frac{dz}{\tan(\frac{1}{z})} \overset{w=\frac{1}{z}}{=\!=\!=} \oint_{|w|=1} \frac{dw}{\tan(w)(w^2)}$$ [1]

1.2.1. Singularidades

La función $f(w) = \dfrac{1}{\tan(w)(w^2)} = \dfrac{\cos(w)}{\sin(w)(w^2)}$ es Holomorfa siempre y cuando su denominador no se anule (**Teorema 1**).

$$\sin(w)w^2 = 0 \Longleftrightarrow w = k\pi \ , k \in \mathcal{Z}$$

- $k = 0 \Longrightarrow w = 0$ Para analizar la singularidad en este punto observamos la primera serie de Laurent allí centrada:

  $$f(w) = w^{-3} - \frac{1}{3}w^{-1} - \frac{1}{45}w - \frac{2}{945}w^3 - \cdots \qquad \text{ROC: } 0 < |w| < \pi$$

  Como indica la **definición de polo**, $w = 0$ es un polo de orden 3 ya que la potencia más negativa que aparece en el desarrollo de la serie de Laurent es -3, y $-3 < 0$.

- $k \neq 0$ En este caso, por el **Lema 1** , $w = k\pi$ es un polo simple, debido a que los ceros de $sen(w)$ son de primer orden por **Lema 2**.[3]

1.2.2. Cálculo por Residuos

Aplicando el **Teorema 2**, el valor del residuo en $w = 0$ es $-\frac{1}{3}$ que corresponde al coeficiente que acompaña a la potencia -1 de w en su primer desarrollo alrededor de ese punto. Por lo tanto como indica la definición de residuo:

$$\oint_{|z|=1} \frac{dz}{\tan(\frac{1}{z})} \overset{w=\frac{1}{z}}{=\!=\!=} \oint_{|w|=1} \frac{dw}{\tan(w)(w^2)} = 2\pi i \ \mathcal{R}es[f, w = 0] = -\frac{2\pi i}{3}$$

[1]siempre que se use el símbolo $\oint$ se refiere a la circulación antihoraria.

[3]$\sin(w) = z - \frac{z^3}{6} + \frac{z^5}{120} - \cdots$ el primer orden es 1.

1.2.3. Serie de Riemann para $n = 2$

Primero voy a demostrar, valiendome del Teorema de la acotación, que

$$\oint_{|w|=R} \frac{dw}{\tan(w)(w^2)} \xrightarrow{R\to+\infty} 0$$

$$w = Re^{i\phi}\ ,\ \ dw = iRe^{i\phi}d\phi$$

$$\left|\oint_0^{2\pi} \frac{iRe^{i\phi}d\phi}{\tan(Re^{i\phi})(Re^{i\phi})^2}\right| \leq 2\pi \text{cotasup}\left(\left|\frac{e^{iRe^{i\phi}} + e^{-iRe^{i\phi}}}{e^{iRe^{i\phi}} - e^{-iRe^{i\phi}}} \frac{iRe^{i\phi}}{(Re^{i\phi})^2}\right|\right) \leq \frac{2\pi}{R} \frac{\left|e^{iRe^{i\phi}}\right| + \left|e^{iRe^{i\phi}}\right|}{\left|\left|e^{iRe^{i\phi}}\right| - \left|e^{iRe^{i\phi}}\right|\right|}$$

$$\leq \frac{2\pi}{R} \frac{e^{-R\sin\phi} + e^{R\sin\phi}}{|e^{-R\sin\phi} - e^{R\sin\phi}|}$$

$$\underset{R\to+\infty}{\xrightarrow{\sin\phi > 0}} 0 \quad , \quad \underset{R\to+\infty}{\xrightarrow{\sin\phi < 0}} 0$$

Recopilado todos los datos que tenemos:

$$\lim_{R\to+\infty} \oint_{|w|=R} \frac{dw}{\tan(w)(w^2)} = \lim_{k\to\infty} \sum_{-k}^{k} \mathcal{R}es[f, w = k\pi] = 0$$

- Residuo en $w = 0$: Calculado anteriormente $\mathcal{R}es[f, w = 0] = -\frac{1}{3}$
- Residuo en $w = k\pi\ \ k \neq 0$: Por el **Lema 3**

  $$\mathcal{R}es[f, w = k\pi] = \left.\frac{\cos(w)}{w^2} \frac{1}{\mathcal{D}(\sin(w))}\right|_{w=k\pi} = \frac{1}{k^2\pi^2}$$

  por lo tanto, como $\mathcal{R}es[f, w = k] = \frac{1}{k^2\pi^2} = \mathcal{R}es[f, w = -k]$, entonces

  $$\lim_{k\to\infty} \sum_{-k}^{k} \mathcal{R}es[f, w = k\pi] = \mathcal{R}es[f, w = 0] + \frac{2}{\pi^2} \lim_{k\to\infty} \sum_{1}^{k} \frac{1}{k^2} = -\frac{1}{3} + \frac{2}{\pi^2} \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 0$$

  despejando queda

  $$\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

2. Ejercicio 2

2.1. Enunciado

Analizar la Convergencia y calcular en el Campo Complejo, por Eulerianas y por Barrow

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\cosh(ax)}$$

2.2. Resolución

2.2.1. Análisis de Convergencia

La función $\cosh(ax) \geq 1 \, \forall \, a, x$ Reales, así como tambien continua. Si $a = 0 \Rightarrow \cosh(0) = 1$
Por lo tanto $f(x) = \frac{1}{\cosh(ax)} \leq 1 \, \forall \, a, x$.
Ya tenemos condiciones mas que sufientes para la existencia de la Integral de Riemann
$\int_0^A \frac{dx}{\cosh(ax)}$ Analizo la convergencia de la integral impropia acotandola

$$\int_0^A \frac{dx}{\cosh(ax)} = \int_0^A \frac{2\,dx}{e^{ax} + e^{-ax}} \leq \int_0^A \frac{2\,dx}{e^{|a|x}} = 2\left(\frac{1}{|a|} - \frac{e^{-|a|A}}{|a|}\right) \xrightarrow{A \to +\infty} \frac{2}{|a|} < N \Leftrightarrow a \neq 0$$

Podemos asegurar la convergencia de la integral siempre y cuando a tome un valor no nulo.

2.2.2. Resolución en el Campo Complejo

Para resolver$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\cosh(ax)} = \mathcal{I}$ extiendo al plano complejo e integro a un lazo simple γ como indica la **Figura**

$$\oint_\gamma \frac{dz}{\cosh(az)}$$

$f(z) = \frac{1}{\cosh(az)} \in \mathcal{H} \, \forall z$ salvo donde se anula el denominador

$$\cosh(az) = 0 \Leftrightarrow e^{az} + e^{-az} = 0 \Leftrightarrow z = \frac{1}{a} L(\pm i) \Leftrightarrow z = \frac{i\pi}{a}\left(k + \frac{1}{2}\right) \quad k \in \mathbb{Z}$$

Como se puede ver en la **Figura** 1, $f(z)$ tiene discontinuidades unicamente en su eje imaginario. Elijo γ de tal forma de encerrar unicamente una discontinuidad como se puede apreciar en la misma figura. Por lo tanto

$$\oint_\gamma \frac{dz}{\cosh(az)} = 2\pi i \mathcal{R}es[f(z), z_0 = \frac{i\pi}{2a}]$$

Necesito saber que tipo de sigularidad tiene $f(z)$ en $z = \frac{i\pi}{2a}$ para esto, igual que en el primer ejercicio me valgo del **Lema 1** y el **Lema 2** . Los primeros terminos de la serie de Taylor centrada en $z = \frac{i\pi}{2a}$ son: $ia\left(z - \frac{i\pi}{2a}\right) + \frac{ia^3}{6}\left(z - \frac{i\pi}{2a}\right)^3$. Tiene un cero de primer orden por lo tanto $\frac{1}{\cosh(az)}$ tiene un polo de primero. Calculo el residuo con el **Lema 3**

$$\mathcal{R}es[f(z), z = \frac{i\pi}{2a}] = \frac{1}{\mathcal{D}(\frac{1}{\cosh(az)})}\Bigg|_{z=\frac{i\pi}{2a}} = -\frac{i}{a}$$

Se pude observar que el residuo es igual a el recíproco del primer coeficiente dela serie de taylor antes expuesta. Por lo tanto

$$\oint_\gamma \frac{dz}{\cosh(az)} = 2\pi i \mathcal{R}es[f(z), z_0 = \frac{i\pi}{2a}] = \frac{2\pi}{a}$$

Si dividimos a γ en cuatro caminos γ_1, γ_2 , γ_3, γ_4

$$\oint_\gamma = \int_{\gamma_1} + \int_{\gamma_2} + \int_{\gamma_3} + \int_{\gamma_4}$$

- $\int_{\gamma_1}$: $\quad z = x\ ,\ \ dz = dx$

$$\int_{\gamma_1} = \int_{-R}^{R} \frac{dx}{\cosh(ax)} \overset{\in \text{Par}}{=\!=\!=} 2\int_0^R \frac{dx}{\cosh(ax)} \xrightarrow{R\to+\infty} 2\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\cosh(ax)} = 2\mathcal{I}$$

- $\int_{\gamma_3}$: $\quad z = x + \frac{i\pi}{a}\ ,\ \ dz = dx$

$$\int_{\gamma_3} = \int_{R}^{-R} \frac{dx}{\cosh(ax+i\pi)} =^{1} -\int_{R}^{-R} \frac{dx}{\cosh(ax)} = \int_{-R}^{R} \frac{dx}{\cosh(ax)} \overset{\text{Par}}{=\!=\!=} 2\int_0^R \frac{dx}{\cosh(ax)}$$

$$\xrightarrow{R\to+\infty} 2\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\cosh(ax)} = 2\mathcal{I}$$

- $\int_{\gamma_2}$: $\quad z = R + iy\ ,\ \ dz = idy$

$$\left|\int_{\gamma_2}\right| = \left|\int_0^{\frac{\pi}{a}} \frac{idy}{\cosh(aR+aiy)}\right| \leq \frac{\pi}{a}\ \text{cotasup}\left(\left|\frac{2}{e^{aR}e^{iay}+e^{-aR}e^{-iay}}\right|\right)$$

$$\leq \frac{2\pi}{a}\left|\frac{1}{e^{aR}+e^{-aR}}\right| \leq \frac{2\pi}{a}\frac{1}{e^{|a|R}} \xrightarrow{R\to+\infty} 0 \Rightarrow \int_{\gamma_2} = 0\ \ \forall\, a\neq 0$$

- $\int_{\gamma_4}$: $\quad z = -R + iy\ ,\ \ dz = idy$

$$\left|\int_{\gamma_4}\right| = \left|\int_{\frac{\pi}{a}}^{0} \frac{idy}{\cosh(-aR+aiy)}\right| \leq \frac{\pi}{a}\ \text{cotasup}\left(\left|\frac{2}{e^{-aR}e^{iay}+e^{aR}e^{-iay}}\right|\right)$$

$$\leq \frac{2\pi}{a}\left|\frac{1}{e^{-aR}+e^{aR}}\right| \leq \frac{2\pi}{a}\frac{1}{e^{|a|R}} \xrightarrow{R\to+\infty} 0 \Rightarrow \int_{\gamma_4} = 0\ \ \forall\, a\neq 0$$

por lo tanto

$$\oint_\gamma \frac{dz}{\cosh(az)} = 2\mathcal{I} + 0 + 2\mathcal{I} + 0 = 4\mathcal{I} = \frac{2\pi}{a}$$

despejando

$$\mathcal{I} = \frac{2\pi}{4a} = \frac{\pi}{2a}$$

[1] $\cosh(ax+i\pi) = -\cosh(ax)$

2.2.3. Resolución por Barrow

$$\int_0^A \frac{dx}{\cosh(ax)} = \int_0^A \frac{2\,dx}{e^{ax}+e^{-ax}} \overset{y=e^{ax}}{=\!=} \int_1^{e^{aA}} \frac{2}{y+y^{-1}}\frac{dy}{ay} = \frac{2}{a}\int_1^{e^{aA}} \frac{1}{y^2+1} = \frac{2}{a}\arctan(y)\Big|_1^{e^{aA}}$$

tomando el limite

$$\xrightarrow{A\to\infty} \frac{2}{a}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2a}$$

2.2.4. Resolución por Eulerianas

Usando un cambio de variable similar al anterior, y que el $\cosh(x)$ es funcion par, se llega a la segunda forma de β.

$$\int_0^A \frac{dx}{\cosh(ax)} = \frac{1}{2}\int_{-A}^A \frac{dx}{\cosh(ax)} = \int_{-A}^A \frac{dx}{e^{ax}+e^{-ax}} = \int_{-A}^A \frac{e^{ax}}{e^{2ax}+1}dx \overset{t=e^{2ax}}{=\!=} \int_0^{e^{2aA}} \frac{1}{t+1}\frac{dt}{\sqrt{t}2a}$$

reacomodando y tomando el limite

$$\xrightarrow{A\to\infty} \frac{1}{2a}\int_0^\infty \frac{t^{-\frac{1}{2}}}{t+1}dt = \frac{1}{2a}\beta(\frac{1}{2},\frac{1}{2}) = \frac{1}{2a}\frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(1)} = \frac{\pi}{2a}$$ [1]

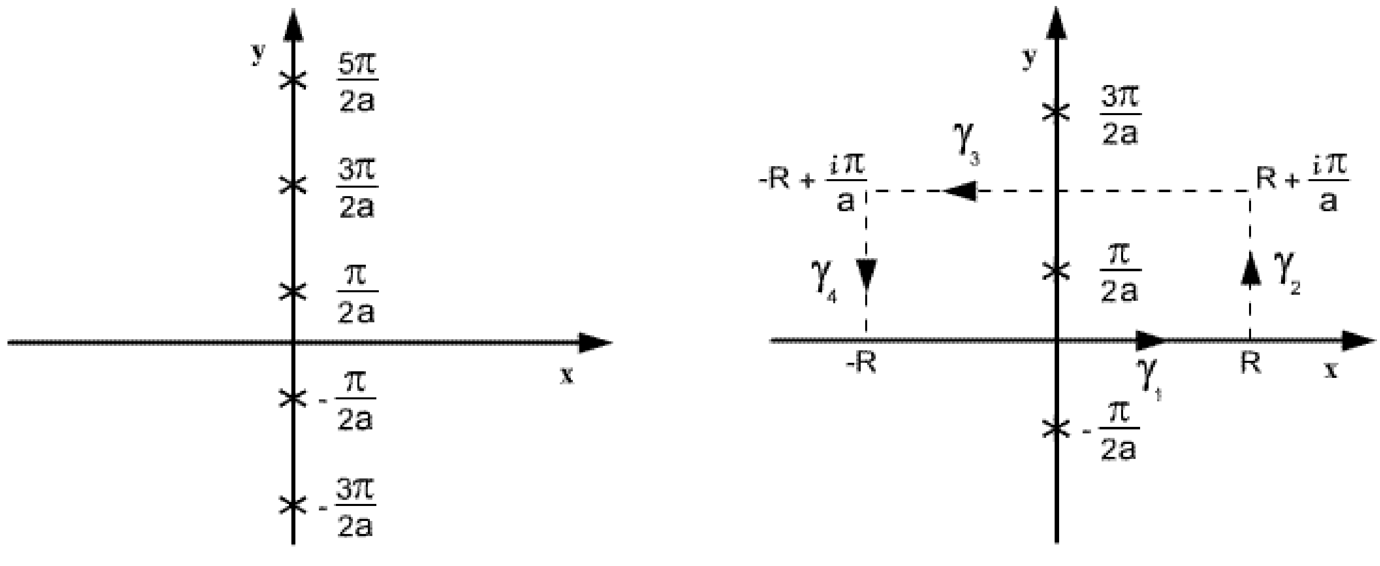

Figura 1: Singularidades y Lazo γ

[1] Tambien se puede resolver por la formula de los complementos $\beta(p,1-p) = \frac{\pi}{\sin(\pi p)}$, en este caso $p=\frac{1}{2}$.

3. Ejercicio 3

3.1. Enunciado

Hallar el potencial $\mathcal{P}(x, y)$ en el conjunto de la figura. Hallar y gráficar lineas Equipotenciales y de Campo.

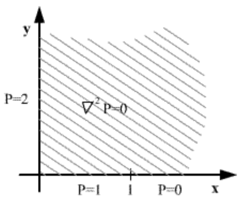

Figura 2: Conjunto D

3.2. Resolución

3.2.1. Potencial

Para hallar el Potencial $\mathcal{P}(x, y)$ por superposición, primero voy a aplicar una Transformación Conforme $f(z) = -iz^2 = 2yx + i(y^2 - x^2)$. Por el Teorema 3 me aseguro de su conformidad ya que es Holomorfa para todo z y $\mathcal{D}(= -iz^2) = -2iz = 0 \iff z = 0$, el cual no pertenece a D. La región D transformada se puede apreciar en la Figura 3.2.4

3.2.2. Potencial 1

Defino $\mathcal{P}_1$ al potencial de la figura a, y $w = \rho_1 e^{i\phi_1}$.

$$\nabla^2 P_1 = P''_{1\rho_1\rho_1} + \frac{1}{\rho_1} P'_{1\rho_1} + P''_{1\phi_1\phi_1}$$

$$P''_{1\rho_1\rho_1} = 0 \text{ y } P''_{1\phi_1\phi_1} = 0$$

resolviendo la ecuación diferencial

$$P_1(\phi_1) = A\phi_1 + B$$

Las condiciones de contorno son

- $\mathcal{P}_1(-\frac{\pi}{2}) = -A\frac{\pi}{2} + B = 0$
- $\mathcal{P}_1(\frac{\pi}{2}) = A\frac{\pi}{2} + B = 0$

Despejando $\mathcal{P}_1(\phi_1) = \frac{\phi_1}{\pi} + \frac{1}{2}$. Retomando las variables originales

$$\mathcal{P}_1(x, y) = \frac{1}{\pi} \arctan\left(\frac{y^2 - x^2}{2yx}\right) + \frac{1}{2} \text{ , } \phi_1 = \arctan\left(\frac{y^2 - x^2}{2yx}\right) \text{ y } \rho_1^2 = (2yx)^2 + (y^2 - x^2)^2$$

3.2.3. Potencial 2

Corriendo el origen una unidad imaginaria negativa nos encontramos con exactamente el mismo problema de antes. Por lo tanto $\mathcal{P}_2(x,y) = \frac{1}{\pi}\arctan\left(\frac{y^2-x^2+1}{2yx}\right)$

3.2.4. Superposición

Se puede ver en la Figura 3.2.4 las regiones a superponer.
$\mathcal{P}(x,y) = \mathcal{P}_1(x,y) + \mathcal{P}_2(x,y) = \frac{1}{\pi}\arctan\left(\frac{y^2-x^2}{2yx}\right) + \frac{1}{\pi}\arctan\left(\frac{y^2-x^2+1}{2yx}\right) + 1$

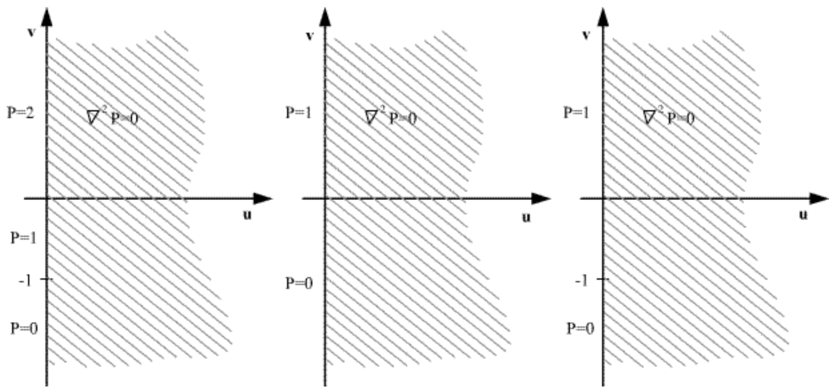

Figura 3: Región $\bar{a}$ transformada, y regiones de superposición

3.2.5. Líneas Equipotenciales y de Campo

Las líneas equipotenciales $\mathcal{P}(x,y) = k$ las hallamos teneiendo en cuenta que

$$\mathcal{P}(x,y) = \mathcal{P}_1(x,y) + \mathcal{P}_2(x,y) = k$$

$\mathcal{P}_1(x,y)$ tiene Líneas equipotenciales a ϕ_1 constante, por lo tanto

$$\mathcal{P}_1(x,y) = k_1 \Longleftrightarrow \frac{y^2-x^2}{2yx} = k_1'$$

y que $\mathcal{P}_2(x,y)$ tiene Líneas equipotenciales a ϕ_2 constante, por lo tanto

$$\mathcal{P}_2(x,y) = k_2 \Longleftrightarrow \frac{y^2-x^2+1}{2yx} = k_2'$$

entonces si $k' = k_1' + k_2'$

$$\mathcal{P}(x,y) = k' = \frac{y^2-x^2}{2yx} + \frac{y^2-x^2+1}{2yx} = \frac{2y^2-2x^2+1}{2yx}$$

Las líneas de Campo teniendo en cuenta que P_1 tiene LC a $\rho_1 = n_1$ y $P_2 = n_2$ entonces teniendo en cuenta el criterio utilizado anteriormente las líneas de campo de P

$$(2yx)^2 + (y^2-x^2)^2 + (2yx)^2 + (y^2-x^2+1)^2 = n$$

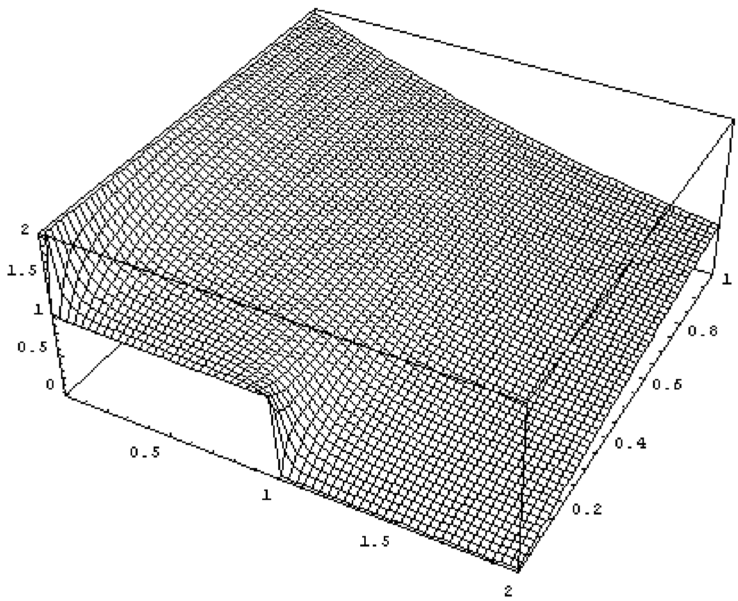

Figura 4: Función Potencial

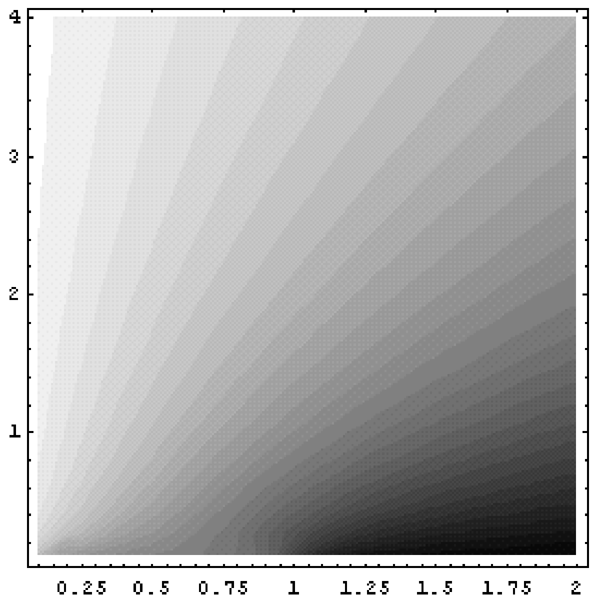

Figura 5: Regiones equipotenciales

4. Ejercicio 4

4.1. Enunciado

Dada la relación $\frac{L(z+1)}{\sqrt{z-1}}$ uniformizarla y desarrollar la serie de Laurent en $\mathcal{V}(0)$.

4.2. Resolución

4.2.1. Puntos de Ramificación

Si z_0 es un punto de ramificación de una función multivaluada (una relación) $f(z) \Longrightarrow \lim_{z\to z_0} \frac{1}{\mathcal{D}(f(z))} = 0$
En este caso

$$\frac{1}{\mathcal{D}\left(\frac{\log(z+1)}{\sqrt{z-1}}\right)} = \frac{1}{\frac{\frac{\sqrt{z-1}}{z+1} - \frac{\log(z+1)}{2(z-1)^{-\frac{1}{2}}}}{(\sqrt{z-1})^2}} = \frac{2(z+1)(z-1)^{\frac{3}{2}}}{2z-2-log(z+1)(z+1)}$$

Analizo los casos en los que el denominador pueda tender a infinito, esto es en $z=-1$ ya que $\log(0)$ no está definido

$$\lim_{z\to-1} 2z-2-log(z+1)(z+1) = -4 + \lim_{z\to-1} -log(z+1)(z+1) \overset{\mathcal{L}'\mathcal{H}}{=\!=} -4 + \frac{(-1+1)^2}{-1+1} = -4$$

Los casos en ls que se anula el numerador son: $z=-1$ y $z=1$.

- $z = \ 1$ $\quad \lim_{z\to1} \frac{2(z+1)(z-1)^{\frac{3}{2}}}{2z-2-log(z+1)(z+1)} = 0$ Entonces es un posible punto de ramificación (PPR).
- $z=-1$ $\quad \lim_{z\to-1} \frac{2(z+1)(z-1)^{\frac{3}{2}}}{2z-2-log(z+1)(z+1)} = \frac{0}{-4} = 0$ Entonces es un PPR.

Teniendo los PPR resta probarlos para determinar si son o no PR. Para esto, si circulamos alrededor de ellos debemos obtener diferentes valores de la relación (pasar de una rama a otra de la relación). Para simplificar elijo dos curvas simples, circunferencias de módulo 1 centradas en los PPR, pero podrían ser curvas simples cerradas cualesquiera que encierren unicamente un PPR.

- Para $z=1$ Definimos:

$$\log(z+1) = \log(\rho_0) + i(\phi_0 + 2k_0\pi)$$

$$\text{con } k_0 \in \mathcal{Z} \text{ , } \rho_0 = |z+1| = 1 \text{ y } \phi_0 = \mathcal{A}rg(z+1)$$

$$\frac{1}{\sqrt{z-1}} = (\rho_1)^{-\frac{1}{2}}(e^{-i(\frac{\phi_1}{2}+k_1\pi)})$$

$$\text{con } k_1 \in \mathcal{Z} \text{ , } \rho_1 = |z-1| \text{ y } \phi_1 = \mathcal{A}rg(z-1)$$

partiendo de $z = 2e^{i0}$

$$\rho_0 = 1 \text{ , } \rho_1 = 3 \text{ , } \phi_0 = 0 \text{ , } \phi_1 = 0$$

remplazando en la relación y simplificando:

$$\left.\frac{\log(z+1)}{\sqrt{z-1}}\right|_{z=2e^{i0}} = \frac{i(2\pi)}{\sqrt{3}}k_0(-1)^{k_1}$$

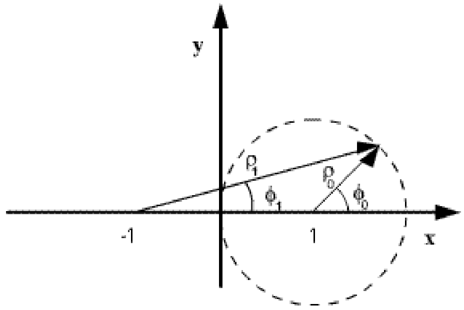

Figura 6: Circulación

dando un giro completo antihorariamente $z = 2e^{i2\pi}$

$$\rho_0 = 1\ ,\ \rho_1 = 3\ ,\ \phi_0 = 2\pi\ ,\ \phi_1 = 0$$

remplazando

$$\left.\frac{\log(z+1)}{\sqrt{z-1}}\right|_{z=2e^{i2\pi}} = \frac{i(2\pi)}{\sqrt{3}}(1+k_0)(-1)^{k_1}$$

y como

$$\frac{i(2\pi)}{\sqrt{3}}k_0(-1)^{k_1} \neq \frac{i(2\pi)}{\sqrt{3}}(1+k_0)(-1)^{k_1} \text{ cualesquiera sean } k_0 \text{ y } k_1.$$

Podemos asegurar que $z = 1$ es un punto de ramificación.

- Para $z = -1$, siguiendo el mismo procedimiento anterior pero centrando la curva de circulación en $z = -1$ obtenemos:
  partiendo de $z = 0$

  $$\rho_0 = 1\ ,\ \rho_1 = 1\ ,\ \phi_0 = \pi\ ,\ \phi_1 = 0$$

  remplazando

  $$\left.\frac{\log(z+1)}{\sqrt{z-1}}\right|_{z=0} = i\pi(1+2k_0)(-1)^{k_1}$$

  y luego de un giro antihorario

  $$\rho_0 = 1\ ,\ \rho_1 = 1\ ,\ \phi_0 = \pi\ ,\ \phi_1 = 2\pi$$

  queda

  $$\left.\frac{\log(z+1)}{\sqrt{z-1}}\right|_{z=\dot{0}} = \pi(1+2k_0)(-1)^{k_1+1}$$

  y por lo tanto $z = -1$ tambien es un punto de ramificación ya que

  $$i\pi(1+2k_0)(-1)^{k_1} \neq \pi(1+2k_0)(-1)^{k_1+1}$$

4.2.2. Uniformización

Uniformizo la relación tomando $k_0 = k_1 = 0$ y cortando de la siguiente forma:

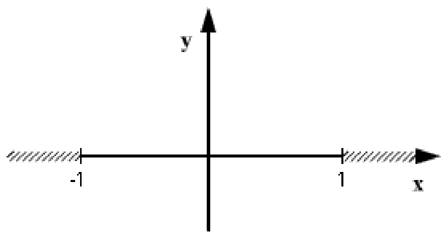

Figura 7: Cortes

4.2.3. Desarrolo de la Serie de Laurent en $\mathcal{V}(0)$

$$f(z) = \frac{L(z+1)}{\sqrt{z-1}}$$

Defino

$$g(z) = L(z+1)$$
$$h(z) = \frac{1}{\sqrt{z-1}}$$

entonces

$$f(z) = g(z)h(z)$$

Como se puede ver en el Teorema 4 el desarrollo en serie de Laurent de una función centrada en z_0 tal que es analítica en algún entorno $U(z_0)$ es un desarrollo de Taylor. Para el desarrollo de Taylor $g(z)$ me valgo del Teorema de Abel para las series de potencias, el cual asegura que las mismas convergen uniformemente a la función dentro del radio de convergencia (ROC). Por lo tanto integrar término a término la serie de la función es igual a integrar la función misma.

$$g(z) = L(z+1) = \int \frac{1}{z+1} = \int \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n \stackrel{\mathcal{TA}}{=\!=} \sum_{n=0}^{\infty} \int (-1)^n z^n =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{n+1}}{n+1} + C$$

Despejo la constante evaluando en $z = 0$

$$L(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 0^{n+1}}{n+1} + C = C = 0$$

Por lo tanto

$$L(z+1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{n+1}}{n+1} \text{ con ROC: } |z| < 1$$[2]

Ahora la serie de $h(z)$

$$h(z) = \frac{1}{\sqrt{z-1}} = \frac{-i}{\sqrt{1-z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} \frac{-i}{2^{2n}} z^n \text{ con ROC: } |z| < 1$$

[2] Ver**Teorema** 4

$g(z)\backslash h(z)$	$-1\frac{i}{2^0}\binom{0}{0}$	$-z\frac{i}{2^2}\binom{2}{1}$	$-z^2\frac{i}{2^4}\binom{4}{2}$	$-z^3\frac{i}{2^6}\binom{6}{3}$	$-z^4\frac{i}{2^8}\binom{8}{4}$	$\cdots$
z	$-z\frac{i}{2^0}\binom{0}{0}$	$-z^2\frac{i}{2^2}\binom{2}{1}$	$-z^3\frac{i}{2^4}\binom{4}{2}$	$-z^4\frac{i}{2^6}\binom{6}{3}$	$-z^5\frac{i}{2^8}\binom{8}{4}$	$\cdots$
$-\frac{z^2}{2}$	$z^2\frac{i}{2^0 2}\binom{0}{0}$	$z^3\frac{i}{2^2 2}\binom{2}{1}$	$z^4\frac{i}{2^4 2}\binom{4}{2}$	$z^5\frac{i}{2^6 2}\binom{6}{3}$	$z^6\frac{i}{2^8 2}\binom{8}{4}$	$\cdots$
$\frac{z^3}{3}$	$-z^3\frac{i}{2^0 3}\binom{0}{0}$	$-z^4\frac{i}{2^2 3}\binom{2}{1}$	$-z^5\frac{i}{2^4 3}\binom{4}{2}$	$-z^6\frac{i}{2^6 3}\binom{6}{3}$	$-z^7\frac{i}{2^8 3}\binom{8}{4}$	$\cdots$
$-\frac{z^4}{4}$	$z^4\frac{i}{2^0 4}\binom{0}{0}$	$z^5\frac{i}{2^2 4}\binom{2}{1}$	$z^6\frac{i}{2^4 4}\binom{4}{2}$	$z^7\frac{i}{2^6 4}\binom{6}{3}$	$z^8\frac{i}{2^8 4}\binom{8}{4}$	$\cdots$
$\frac{z^4}{4}$	$-z^5\frac{i}{2^0 5}\binom{0}{0}$	$-z^6\frac{i}{2^2 5}\binom{2}{1}$	$-z^7\frac{i}{2^4 5}\binom{4}{2}$	$-z^8\frac{i}{2^6 5}\binom{6}{3}$	$-z^9\frac{i}{2^8 5}\binom{8}{4}$	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

Cuadro 1: Multiplicación de $g(z)$ y $h(z)$

entonces agrupando los terminos del mismo orden

$$f(z) = z\left(-\frac{i}{2^0}\binom{0}{0}\right) + z^2\left(-\frac{i}{2^2}\binom{2}{1} + \frac{i}{2^0 2}\binom{0}{0}\right) + z^3\left(-\frac{i}{2^4}\binom{4}{2} + \frac{i}{2^2 2}\binom{2}{1} - \frac{i}{2^0 3}\binom{0}{0}\right)$$

$$+z^4\left(-\frac{i}{2^6}\binom{6}{3} + \frac{i}{2^4 2}\binom{4}{2} - \frac{i}{2^2 3}\binom{2}{1} + z^4\frac{i}{2^0 4}\binom{0}{0}\right) + z^5\left(-\frac{i}{2^8}\binom{8}{4} + \frac{i}{2^6 2}\binom{6}{3} - \frac{i}{2^4 3}\binom{4}{2}\right.$$

$$\left. + \frac{i}{2^2 4}\binom{2}{1} - \frac{i}{2^0 5}\binom{0}{0}\right)$$

acomodando se obtienen los coeficientes de la serie $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{A}_n z^n$[3]

$$A_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{2k}{k} \frac{i(-1)^{n+k}}{2^{2k}(n+1-k)}$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\left[z^{n+1}\sum_{k=0}^{n} \binom{2k}{k} \frac{i(-1)^{n+k}}{2^{2k}(n+1-k)}\right] \text{ ROC: } |z| < 1$$[4]

[3] El coeficiente $A_0 = 0$.

[4] Como indica el Teorema 1 el producto de funciones analíticas en D es analítica en D, como las series de $g(z)$ y $h(z)$ convergen en $|z| < 1$ también lo hace su multiplicación

5. Ejercicio 5

5.1. Enunciado

Analizar el valor de la siguiente proposición

$$f \in \mathcal{H} /\ z = \infty \implies \mathcal{R}(\infty) = 0$$

Demostrar el Teorema de la Derivada Logarítmica

5.2. Resolución

5.2.1. Análisis de la Proposición

Demuestro la falsedad de la proposición mediante un contraejemplo. Defino $f(z) = \frac{1}{z}$. $f(z)$ es holomorfa en todo el plano complejo menos en $z = 0$. Si defino $g(z) = \frac{1}{f(z)} = z$, holomorfa en todo el plano complejo incluyendo $z = 0$ entonces $f(z)$ es holomorfa en $z = \infty$. Solo resta mostrar que el residuo de $f(z)$ no es nulo en $z = \infty$. Como $f(z)$ tiene finitas singularidades entonces vale que

$$\sum_{i=1}^{n} \mathcal{R}es[f(z), z_i] + \mathcal{R}es[f(z), z = \infty] = 0$$

en este caso

$$\sum \mathcal{R}es[f(z), z = 0] + \mathcal{R}es[f(z), z = \infty] = 0$$

como el desarrollo de la serie de Laurent en $\mathcal{V}(0)$ de $f(z) = \frac{1}{z}$ y su coeficiente $a_{n-1} = 1$ entonces $\mathcal{R}es[f(z), z = 0] = 1$ y por lo tanto

$$\mathcal{R}es[f(z), z = \infty] = -1 \neq 0$$

5.2.2. Demostración

Sea Γ un lazo simple y $f(z)$ una función holomorfa tanto en Γ como en su interior, con la excepción de un número finito de puntos interiores $p_1, p_2, \ldots, p_j$, en los cuales $f(z)$ posee polos de orden $n_1, n_2, \ldots, n_j$ respectivamente. Si $f(z)$ no se anula en Γ, y si en el interior de Γ los puntos $c_1, c_2, \ldots, c_i$ son ceros de f(z) de orden $m_1, m_2, \ldots, m_i$ respectivamente, entonces

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{\mathcal{D}[f(\xi)]}{f(\xi)} d\xi = C - P$$

Donde C (**P**) es la cantidad de ceros **(polos)** contados tantas veces como su orden lo indica. Para la demostración me valgo de los desarrollos en serie de Laurent de $f(z)$
Si $z \in \mathcal{V}(c_i)$

$$f(z) = (z - c_i)^{m_i} \left(a_{m_i} + a_{m_i+1}(z - c_i) + \ldots\right) = (z - c_i)^{m_i} g(z) \text{ con } g(z) \in \mathcal{H} \text{ en } \mathcal{U}(c_i) \text{ y } g(z) \neq 0$$

Si $z \in \mathcal{V}(p_j)$

$$f(z) = (z - p_j)^{-n_j} \left(a_{n_j} + a_{n_j+1}(z - p_j) + \ldots\right) = (z - p_j)^{n_j} h(z) \text{ con } h(z) \in \mathcal{H} \text{ en } \mathcal{U}(p_j) \text{ y } g(z) \neq 0$$

Si tomo logarítmo y derivo en $z \in \mathcal{V}(c_i)$

$$\mathcal{D}(L(f(z))) = \frac{\mathcal{D}(f(z))}{f(z)} = \mathcal{D}\left(L\left((z - c_i)^{m_i} g(z)\right)\right) = \mathcal{D}\left(m_i L(z - c_i) + L(g(z))\right) = \frac{m_i}{(z - c_i)} + \frac{\mathcal{D}(g(z))}{g(z)}$$

y $\frac{\mathcal{D}(g(z))}{g(z)} \in \mathcal{H}$ en $\mathcal{U}(c_i)$.
Lo mismo para $z \in \mathcal{V}(p_j)$

$$\mathcal{D}(L(f(z))) = \frac{\mathcal{D}(f(z))}{f(z)} = \frac{-n_j}{(z-p_j)} + \frac{\mathcal{D}(h(z))}{h(z)} \text{ y } \frac{\mathcal{D}(h(z))}{h(z)} \in \mathcal{H} \text{ en } \mathcal{U}(p_j)$$

.
Si integro sobre un lazo γ_{c_i} el cual no encierra ningun polo ni ningun otro cero mas que c_i de $f(z)$

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_{c_i}} \frac{\mathcal{D}(f(\xi))}{f(\xi)} d\xi = \oint_{\gamma_{c_i}} \frac{m_i}{(z-c_i)} + \frac{\mathcal{D}(g(z))}{g(z)} = \mathcal{R}es\left(\frac{\mathcal{D}(f(z))}{f(z)},\ z = c_i\right) = m_i$$

haciendo lo mismo pero con γ_{p_j} encerrando unicamente el polo p_j y ningun cero

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_{p_j}} \frac{\mathcal{D}(f(\xi))}{f(\xi)} d\xi = \oint_{\gamma_{p_j}} \frac{-n_j}{(z-p_j)} + \frac{\mathcal{D}(h(z))}{h(z)} = \mathcal{R}es\left(\frac{\mathcal{D}(f(z))}{f(z)},\ z = p_j\right) = -n_j$$

por lo tanto separando la integral a Γ

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma} = \frac{1}{2\pi i}\left(\oint_{\gamma_{p_1}} + \ldots + \oint_{\gamma_{p_j}} + \oint_{\gamma_{c_1}} + \ldots + \oint_{\gamma_{c_i}}\right)$$

$$= \sum_{j=1}^{J} \mathcal{R}es\left(\frac{\mathcal{D}(f(z))}{f(z)},\ z = p_j\right) + \sum_{i=1}^{I} \mathcal{R}es\left(\frac{\mathcal{D}(f(z))}{f(z)},\ z = c_i\right) = \sum_{i=1}^{I} m_i + \sum_{j=1}^{J} n_j = C - P$$

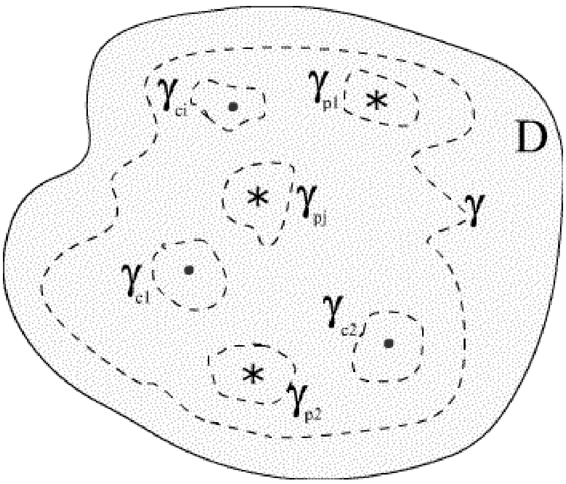

Figura 8: Esquema

6. Teoremas, Definiciones y Reglas

Teorema 1 *Si dos funciones son analíticas en un dominio, la suma, la diferencia y el producto de estas funciones son tambien analíticas en ese dominio. El cociente de estas funciones es analítico en el dominio, excepto en los puntos en los que el denominador se anula. Una función analítica de una función analítica es analítica.*

Definición 1 *Sea z_0 un punto singular aislado de $f(z)$. Si existe el $\lim_{z_0 \to k\pi}(z - z_0)^n f(z)$ y si dicho límite no es cero ni infinito, entonces f(z) tiene un polo de orden n en z_0.*

Lema 1 *Si $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$, donde $g(z)$ y $h(z)$ son analíticas en z_0 y si $h(z_0) = 0$ y $g(z_0) \neq 0$, entonces el orden el polo de $f(z)$ en z_0 es igual al orden del cero de $h(z)$ en dicho punto.*

Lema 2 *Si $f(z_0) = 0$ el orden de este cero es igual al orden del primer coeficiente del desarrollo de la serie de Taylor centrada en z_0.*

Definición 2 *Sea $f(z)$ una función analítica sobre un contorno simple cerrado γ y en todo punto de su interior salvo z_0. Entonces el residuo de $f(z)$ en z_0 está definido por*

$$\mathcal{R}es[f(z), z_0] = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma f(z)\, dz$$

Teorema 2 *El residuo de la función $f(z)$ en el punto singular aislado z_0 es igual al coeficiente de $(z - z_0)^{-1}$ en la serie de Laurent que representa a $f(z)$ en la región anular dada por $0 < |z - z_0| < R$.*

Lema 3 *El residuo de $f(z) = g(z)/h(z)$ en un polo simple, donde $g(z_0) \neq 0$, $h(z_0) = 0$, está dada por*

$$\mathcal{R}es[f(z), z_0] = \frac{g(z_0)}{\mathcal{D}(h(z_0))}$$

Teorema 3 *Sea $f(z)$ una función Holomorfa en un dominio D. Entonces $f(z)$ es conforme en todo punto de D tal que $\mathcal{D}(f(z)) \neq 0$.*

Teorema 4 *Sea $f(z)$ analítica en z_0, sea C el mayor círculo centrado en z_0 dentro del cual $f(z)$ es analítica, y sea $a > 0$ el radio de C (ROC). Entonces existe una serie de potencias $\sum_0^\infty C_n(z - z_0)^n$ que converge a f(z) en C. Este desarrollo es único y el mayor ROC es $|z - z_0| < a$, siendo a la distancia entre z_0 y la singularidad de $f(z)$ más cercana.*