

Ejercicio 1

Indique si la función $u(x, y) = 3y - 2x + 1 + xy - 2e^{-2xy} \operatorname{sen}(x^2 - y^2)$ puede ser la función de corriente de un campo de velocidades. En caso afirmativo, encuentre la función potencial y escriba la ecuación de las líneas equipotenciales, las líneas de corriente, la expresión del potencial complejo y el campo vectorial correspondiente. Indique la región del plano complejo considerada. Justificar.

Ejercicio 2

a) Sea $f(z) = \frac{1}{2z^2 - 5z + 2} + \operatorname{sen}\left(\frac{1}{z^2}\right)$. ¿Es posible hallar un desarrollo de Laurent $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$,

de modo que $\sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n a_n$ sea absolutamente convergente? En caso afirmativo encuentre dicha expresión.

b) Indique a qué función converge la serie de Laurent $\sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n z^n$ cuyos coeficientes son:

$$(i) \quad b_n = (-1)^n a_n$$

$$(ii) \quad b_n = (-1)^n a_{-n}$$

Justifique.

Ejercicio 3

a) Clasifique las singularidades de $f(z) = \frac{\cos(\pi z)(4 - z^2)}{\operatorname{sen}(\pi z)}$ en $\mathbb{C}^*$ e informe acerca de $\operatorname{Res}(f, 0)$ y $\operatorname{Res}(f, \infty)$

b) Calcular $\int_{\Gamma} \log(z-1)f(z) dz$ siendo Γ la circunferencia $\{z: |z|=0.5\}$ orientada en sentido antihorario, y si se considera la determinación de $\log(z)$ holomorfa en $\mathbb{C} - \{z=it, t \leq 0\}$ cuyo valor en 1 es 0.

Ejercicio 4

a) Estudiar la convergencia simple y absoluta de la integral $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(\pi x)}{|x|^p(x^2+4)} dx$, $p \geq 0$

b) Calcular la integral para $p=0$. Justifique indicando los resultados utilizados.

Ejercicios 5

a) Si z_0 es una singularidad esencial de la función compleja $f(z)$, ¿Qué tipo de singularidad presenta la función $\frac{1}{f(z)}$? Justifique su respuesta.

b) Si D es un abierto y conexo no vacío en $\mathbb{C}$, ¿Cuáles son las funciones analíticas $f(z)$ cuya derivada de segundo orden $f''(z)$ tiene módulo constante? Justifique su respuesta.