

1. Final del 13/12/2012

Ejercicio 1 Suponiendo conocida la Transformada de Fourier de $f(t) = \frac{1}{t^2+4}$ calcule en función de ella la Transformada de Fourier de $\frac{2t+3}{t^2-2t+5}$.

Ejercicio 2 a) Hallar el Desarrollo en Serie de Fourier Exponencial de:

$$f(x) = \begin{cases} \pi - x & \text{si } 0 < x < \pi \\ 0 & \text{si } \pi < x < 2\pi \end{cases}$$

b) A partir del desarrollo obtenido en a) obtenga el Desarrollo en serie de Fourier trigonométrico válido en dicho intervalo.

c) Escriba la identidad de Parseval en ambos casos.

d) Usar los puntos anteriores para mostrar que:

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$
$$2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^4} = \frac{13}{384} \pi^4$$

Ejercicio 3 a) Defina producto de convolución de dos funciones $x(t)$ e $y(t)$ definidas en $(-\infty; +\infty)$. Escriba la expresión de dicho producto si $x(t) = y(t) = 0 \forall t < 0$ (funciones causales). Justifique.

b) Demuestre que si las funciones $x(t)$ y $y(t)$ son continuas por partes de orden exponencial, el producto convoluci ambas también lo es.

c) Estableciendo hipótesis necesarias, demuestre la propiedad que permite obtener la transformada de Laplace del producto de convolución de dos funciones causales en función de las transformadas de Laplace de cada una de dichas funciones.

Ejercicio 4 a) Explique cómo resolvería el siguiente problema de valores iniciales no homogéneo:

$$f(x) = \begin{cases} u_t(x, t) = u_{xx}(x, t) + g(x) & \text{si } 0 < x < \pi \\ u(0, t) = A; u(\pi, t) = B; u(x, 0) = f(x) \end{cases}$$

Explique qué es el régimen permanente y el transitorio e identifíquelos en el problema anterior.

b) Particularice para $g(x) = x^2; A = 1; B = 2$. No calcule coeficientes de Fourier pero deje indicadas las fórmulas correspondientes para obtenerlas.

Ejercicio 5 Puede ser $m(x, y) = e^{3y}(\frac{x}{x^2+y^2} \cos(3y) + \frac{y}{x^2+y^2} \sin(3y))$ la parte real del potencial complejo de un cierto campo vectorial? En caso afirmativo: a) Halle dicho potencial complejo.

b) Indique la ecuación de las líneas de flujo y las equipotenciales.

c) Explique porque dichas curvas son ortogonales.

d) Si Γ es una curva cerrada simple, calcule todos los valores posibles que puede tomar la circulación de flujo de dicho campo vectorial sobre Γ .