POR FAVOR, LEA ATENTAMENTE ESTAS INSTRUCCIONES: A) NO OLVIDE ESCRIBIR SU NOMBRE Y NÚMERO DE PADRÓN EN CADA HOJA UTILIZADA, Y EL NOMBRE DEL PROFESOR ENCARGADO DE LA CLASE TEÓRICA. B) NO SE CONTESTARÁN PREGUNTAS DE NINGÚN TIPO, NI SIQUIERA SOBRE LOS ENUNCIADOS, DADO QUE LA INTERPRETACIÓN DE LOS MISMOS FORMA PARTE DEL EXAMEN. C)TODAS LAS RESPUESTAS DEBEN ESTAR DEBIDAMENTE JUSTIFICADAS.

Nombre y apellido: ______________________

Número de padrón: ______________ Cuatrimestre. de cursada: ______________

e-mail: ______________ Curso: ______________

...... 1. a) Enuncie el o los teoremas necesarios para calcular el valor principal de $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ utilizando métodos de variable compleja, siendo $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ un cociente de polinomios sin raíces reales en el denominador. Indique los circuitos de integración y paso al límite.

b) Hallar los valores de α y $\beta \in \mathbf{R}$ tales que $\int_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{dx}{|x-1|^{\alpha}(x^2+1)^{\beta}}$ con $\alpha > 0$, $\beta > 0$ sea C.V.

c) ¿Si $\alpha = \beta = 1$, puede hallar el valor de la integral con los métodos de variable compleja?. En caso afirmativo, calcúlelo.

...... 2. a) Estableciendo las hipótesis necesarias, demuestre la propiedad que permite calcular la transformada de Laplace de la derivada segunda de una función $f(t)$, conociendo la transformada de Laplace de $f(t)$.

b)Utilice la transformada de Laplace de para resolver $y'' - 4y' - 5y = x(t)H(t)$ siendo

$$x(t) = \begin{cases} 1 & si \quad 0 < t < 1 \\ 2t-1 & si \quad t > 1 \end{cases} \quad \text{con } y(0) = y'(0) = 0$$

...... 3. a) En el espacio vectorial $G_{[-T,T]}$ de las funciones generalmente contínuas (o seccionalmente contínuas) donde se ha definido un producto interno, (espacio euclídeo) defina:

i) sistema ortonormal ii) serie de Fourier de un elemento $f \in G_{[-T,T]}$ iii) Convergencia puntual, uniforme y en media cuadrática de la serie de Fourier de f

b) Considere las siguientes funciones definidas en $[-\pi, \pi]$:

$$x^2, \quad x^{1/3}, \quad |x|^{1/2}, \quad \frac{1}{\sqrt{|x|}}$$

Con el producto interno definido como: $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\,dx$, el sistema: $\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}; \cos nx, \sin nx\right\}_{n=1}^{\infty}$ es ortonormal en el intervalo $[-\pi, \pi]$.

i) Justifique cual o cuales de las funciones del dadas admite (o no admite) D.S.T.F.

ii) En qué casos puede afirmar la C.V. puntual, uniforme, y en media cuadrática de dichos desarrollos y explique a que función converge cada desarrollo en $[-\pi, \pi]$

... 4. a) En un bloque sólido que ocupa la región $A = \{(x,y,z)/x > 0,\ 0 \le y \le a\}$ fluye el calor en régimen permanente en dirección paralela al plano $z = 0$. La temperatura en la pared $x = 0$ es $0°C$, la cara superior tiene temperatura $g(x)$ mientras que la cara inferior está aislada. Halle la temperatura $u(x,y,z)$ en cada punto del sólido en función de $g(x)$.

b) Indique cual o cuales de las siguientes funciones $g(x)$ permiten solucionar el problema:

i) $g(x) = \begin{cases} e^{-x} \; con \; x \in [0,3] \\ g(x) = g(x+3) \end{cases}$ ii) $g(x) = e^{-5x}$ iii) $g(x) = 3$

c) Elija una de las funciones $g(x)$ y halle la solución (puede dejar indicada la solución como una integral)

.. 5. a) Demuestre que una función armónica en un conjunto A abierto de $\mathbf{R}^2$ tiene conjugada armónica.

b) Si A es un conjuno abierto de $\mathbf{R}^2$ simplemente conexo y la función $h : A \to \mathbf{R}$ es armónica en A demuestre que $\dfrac{\partial^{(5)} h}{\partial x^4 \partial y}$ también es armónica en A