Analisis III Primer recuperatorio - 17 de junio de 2014

1. Analizar convergencia y calcular la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{sin(x)}{(9x + x^3)}\, dx$$

2. Resolver la ecuación del calor en estado estacionario en el recinto $(x, t) \in \mathbb{R}^2 : [0, \pi] \times [0, 1]$ con las condiciones de contorno del pizarrón.

$$\phi(0, t) = 0$$
$$\phi(\pi, t) = 0$$
$$\phi(x, 1) = sin(2x)$$
$$\phi(x, 0) = 0$$

3. (a) Hallar el desarrollo de Laurent en potencias de $(z + 2)$:

$$\sum_{-\infty}^{\infty} C_n(z + 2)^n$$

de la función

$$f(z) = \frac{1}{1 - z} - sinh\frac{\pi}{z + 2}$$

, de manera que la serie$\sum_{-\infty}^{\infty} |C_n|$ converja y calcular su suma. Dar el dominio de convergencia de dicho desarrollo.

(b) ¿Qué tipo de singularidad tiene la función $f(z)$ en $z = -2$ y cuánto vale su residuo?

4. Hallar el desarrollo de Fourier de

$$f(z) = \begin{cases} 0 & \text{si } -\pi < t < 0 \\ t^2 & \text{si } 0 \leq t < \pi \end{cases}$$

Analizar la convergencia puntual $\forall t$ y calcular la suma

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2}$$

5. (a) Es posible que la función

$$h(x) = e^{x^2 - y^2} sin(2xy) - \frac{y}{x^2 - y^2}$$

sea la parte real de una función analítica $\psi(z) = \zeta(z) + \phi(z)$? Justificar adecuadamente.

(b) Calcular

$$\oint_{|z-i|=2} \frac{\psi(z)}{(z^2 + 4)} dz$$