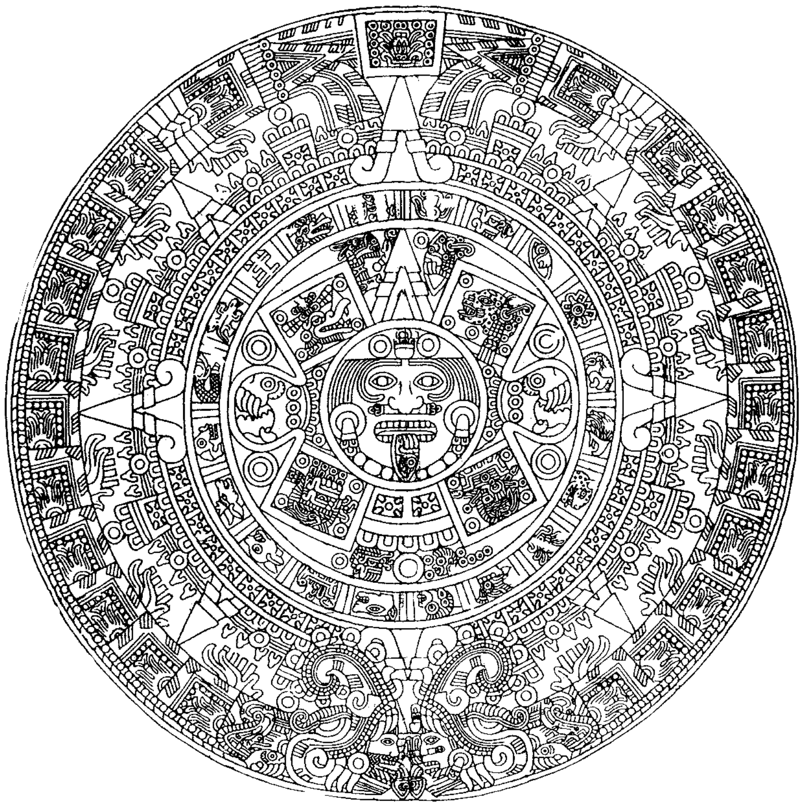
Procesos de Poisson
(Borradores, Curso 23)

Sebastian Grynberg

22 de abril de 2013



ollin tonatiuh

el tiempo sólo es tardanza
de lo que está por venir

(Martín Fierro)

Índice

1. Proceso puntual de Poisson

1.1. Procesos puntuales

Informalmente, un proceso puntual aleatorio es un conjunto enumerable de puntos aleatorios ubicados sobre la recta real. En la mayoría de las aplicaciones un *punto* de un proceso puntual es el instante en que ocurre algún evento, motivo por el cual los puntos también se llaman *eventos* o *arribos*. Por ejemplo, los tiempos de arribo de clientes a la caja de un supermercado o de los trabajos al procesador central de una computadora son procesos puntuales. En teoría fiabilidad, un evento podría ser el instante en que ocurre una falla. El ejemplo básico de este tipo de procesos es el *proceso de Poisson*.

Definición 1.1 (Proceso puntual aleatorio). *Un* proceso puntual aleatorio *sobre la semirecta positiva es una sucesión* $\{S_n : n \geq 0\}$ *de variables aleatorias no negativas tales que, casi seguramente,*

(a) $S_0 \equiv 0$,

(b) $0 < S_1 < S_2 < \cdots$,

(c) $\lim_{n\to\infty} S_n = +\infty$.

La condición (b) significa que no hay arribos simultáneos. La condición (c) significa que no hay *explosiones*, esto es, no hay una acumulación de arribos en tiempos finitos.

La sucesión de variables aleatorias $\{T_n : n \geq 1\}$ definida por

$$T_n := S_n - S_{n-1} \tag{1}$$

se llama la *sucesión de tiempos de espera entre arribos*.

Introducimos una familia de nuevas variables aleatorias $N(t)$, $t \geq 0$, de la siguiente manera: para cada $t \geq 0$ definimos $N(t)$ como la cantidad de arribos ocurridos durante el intervalo de tiempo $(0, t]$,

$$\begin{aligned} N(t) &:= \sum_{n\geq 1} \mathbf{1}\{S_n \leq t\} && (2) \\ &= \max\{n \geq 0 : S_n \leq t\}. && (3) \end{aligned}$$

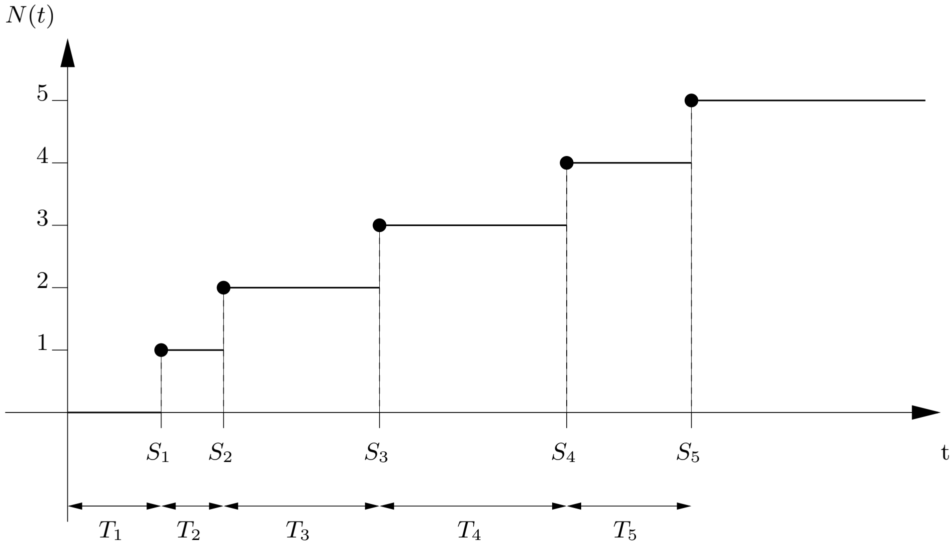


Figura 1: Realización típica de un proceso puntual aleatorio sobre la semi-recta positiva.

Observación 1.2. *Notar que $N(t)$ es una función de t y de las variables aleatorias $T_1, T_2, \dots$ a valores enteros no negativos. Indicaremos esa relación de la siguiente manera*

$$N(t) = \Psi(t; T_1, T_2, \dots), \tag{4}$$

donde Ψ es la relación definida en (2)*.*

La cantidad de arribos ocurridos durante el intervalo de tiempo $(s, t] \subset \mathbb{R}^+$, $N(s, t]$, es el incremento $N(t) - N(s)$

$$N(s, t] := N(t) - N(s) = \sum_{n \geq 1} \mathbf{1}\{s < S_n \leq t\}. \tag{5}$$

De (3) se obtiene la relación básica que conecta a las variables $N(t)$ con las S_n:

$$N(t) \geq n \iff S_n \leq t. \tag{6}$$

De allí se desprende que

$$N(t) = n \iff S_n \leq t < S_{n+1}. \tag{7}$$

Proceso de conteo. La familia de variables aleatorias $\{N(t) : t \geq 0\}$ es un proceso estocástico denominado el *proceso de conteo* de la sucesión de arribos $\{S_n : n \geq 0\}$. Debido a que la sucesión de arribos se puede reconstruir a partir de N, N también recibe la denominación "*proceso puntual*".

Propiedades. Por definición, el proceso de conteo satisface las siguientes propiedades:

(i) Para cada $t \geq 0$, la variable aleatoria $N(t)$ tiene valores enteros no negativos.

(ii) $N(0) = 0$ y $\lim_{t \to \infty} N(t) = \infty$.

(iii) Si $s < t$, entonces $N(s) \leq N(t)$.

(iv) Como el intervalo $(0, t]$ es cerrado a la derecha, la función (aleatoria) $N : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{N}_0$ es continua a derecha. Además, en los puntos de discontinuidad tiene saltos de longitud 1.

En otras palabras, el gráfico de la función aleatoria $N : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{N}_0$ es una escalera no decreciente, continua a derecha y con saltos de longitud 1 en cada uno de los arribos del proceso puntual.

Programa. En lo que sigue estudiaremos la distribución conjunta de las $N(t)$ bajo ciertas condiciones sobre los tiempos de espera entre arribos T_n y vice versa.

1.2. Procesos de Poisson

Existen varias definiciones equivalentes de procesos de Poisson. Adoptamos la que nos parece más sencilla y generalizable. [1]

Definición 1.3 (Proceso de Poisson)**.** *Un proceso puntual* $\{S_n : n \geq 0\}$ *sobre la semi-recta positiva es un proceso de Poisson de intensidad* $\lambda > 0$ *si satisface las siguientes condiciones*

(i) El proceso tiene *incrementos independientes*: para cada colección finita de tiempos $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n$, los incrementos $N(t_{i-1}, t_i] = N(t_i) - N(t_{i-1})$, $i = 1, \ldots, n$ son independientes.

(ii) Los *incrementos individuales* $N(s, t] = N(t) - N(s)$ tienen la distribución Poisson:

$$\mathbb{P}(N(s,t] = n) = e^{-\lambda(t-s)} \frac{(\lambda(t-s))^n}{n!}, \qquad n = 0, 1, \ldots, \ 0 \leq s < t. \tag{8}$$

Nota Bene. La condición (ii) de la Definición 1.3 se puede descomponer en dos partes. (a) *Los incrementos son temporalmente homogéneos* (i.e., la distribución de los incrementos depende solamente de la longitud del intervalo de tiempo pero no de su posición) y (b) *la distribución de cada incremento individual es Poisson de media proporcional a la cantidad de tiempo considerado.*

Que un proceso puntual sea *temporalmente homogéneo* y que tenga *incrementos independientes* significa que si se lo reinicia desde cualquier instante de tiempo t, el proceso así obtenido es independiente de todo lo que ocurrió previamente (por tener incrementos independientes) y que tiene la misma distribución que el proceso original (por ser temporalmente homogéneo). En otras palabras, el proceso no tiene memoria.

Es de suponer que, bajo esas condiciones, los tiempos de espera entre arribos tienen que ser variables aleatorias independientes, cada una con distribución exponencial del mismo parámetro. Ésto último es consistente con la condición sobre la distribución que tienen los incrementos individuales (8).

[1] Elegimos la Definición 1.3 porque tiene la virtud de que se puede extender a $\mathbb{R}^d$ sin ninguna dificultad: un subconjunto aleatorio (numerable) Π de $\mathbb{R}^d$ se llama un *proceso de Poisson de intensidad* λ si, para todo $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, las variables aleatorias $N(A) = |\Pi \cap A|$ satisfacen (a) $N(A)$ tiene la distribución Poisson de parámetro $\lambda|A|$, y (b) Si $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ son conjuntos disjuntos, entonces $N(A_1), N(A_2), \ldots N(A_n)$ son variables aleatorias independientes.

En efecto, de la relación básica (6) se deduce que si $\{S_n : n \geq 0\}$ es un proceso de Poisson de intensidad λ, entonces las variables S_n tienen distribución $\Gamma(n, \lambda)$:

$$\mathbb{P}(S_n > t) = \mathbb{P}(N(t) < n) = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}(N(t) = k) = \sum_{k=0}^{n-1} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!}.$$

□

1.3. Construcción

En lo que sigue mostraremos una forma de construir un proceso puntual de Poisson $\{S_n : n \geq 0\}$ de intensidad λ. Los arribos, S_n, se construyen utilizando una sucesión de variables aleatorias a valores positivos $\{T_n : n \geq 1\}$:

$$S_0 := 0, \qquad S_n := \sum_{i=1}^{n} T_i, \qquad n = 1, 2, \dots. \tag{9}$$

Teorema 1.4. *Sea $\{T_n : n \geq 1\}$ una sucesión de variables aleatorias independientes, cada una con distribución exponencial de intensidad λ. El proceso de arribos $\{S_n : n \geq 0\}$ definido en* (9) *es un proceso puntual de Poisson de intensidad λ.* (Ver la Definición 1.3).

Demostración.

1. Proceso Puntual. Para cada $n \geq 1$, $\mathbb{P}(T_n > 0) = 1$ y por la ley fuerte de los grandes números $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} T_i \to \frac{1}{\lambda}$ casi seguramente. Por lo tanto, $\{S_n : n \geq 0\}$ es un proceso puntual.

2. Distribuciones Poisson. Para cada $n \geq 1$, $S_n = T_1 + \cdots + T_n$ tiene distribución $\Gamma(n, \lambda)$:

$$F_{S_n}(t) = \mathbb{P}(S_n \leq t) = \left(1 - e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^k}{k!}\right) \mathbf{1}\{t \geq 0\} = \left(e^{-\lambda t} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!}\right) \mathbf{1}\{t \geq 0\}.$$

Observando que $\{N(t) = n\} = \{N(t) < n+1\} \setminus \{N(t) < n\}$ y usando la relación básica, $N(t) < n \iff S_n > t$, se deduce que

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(N(t) = n) &= \mathbb{P}(N(t) < n+1) - \mathbb{P}(N(t) < n) = \mathbb{P}(S_{n+1} > t) - \mathbb{P}(S_n > t) \\
&= e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{n} \frac{(\lambda t)^k}{k!} - e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^k}{k!} = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}, \qquad n = 0, 1, \dots.
\end{aligned} \tag{10}$$

Por lo tanto, para cada $t > 0$ fijo, el incremento $N(t)$ tiene una distribución Poisson de media λt:

$$N(t) \sim Poisson(\lambda t).$$

3. Pérdida de memoria. Fijamos $t > 0$ y consideramos los arribos posteriores al instante t. Por (3) tenemos que $S_{N(t)} \leq t < S_{N(t)+1}$. El tiempo de espera desde t hasta el primer arribo posterior a t es $S_{N(t)+1} - t$; el tiempo de espera entre el primer y el segundo arribo posteriores a t es $T_{N(t)+2}$; y así siguiendo. De este modo

$$T_1^{(t)} := S_{N(t)+1} - t, \qquad T_2^{(t)} := T_{N(t)+2}, \qquad T_3^{(t)} := T_{N(t)+3}, \dots \tag{11}$$

definen los tiempos de espera entre arribos posteriores a t.

Debido a la independencia de las T_k y la propiedad de pérdida de memoria de la distribución exponencial, parece intuitivamente claro que condicionando al evento $\{N(t) = n\}$ las variables aleatorias (11) son independientes y con distribución exponencial.

En lo que sigue mostraremos que $N(t), T_1^{(t)}, T_2^{(t)}, \dots$ son variables aleatorias independientes y que

$$(T_1^{(t)}, T_2^{(t)}, \dots) \sim (T_1, T_2, \dots). \tag{12}$$

Basta mostrar que para todo $n \geq 0$ y para toda elección de números positivos $t_1, \dots, t_m$, $m \in \mathbb{N}$, vale que

$$\mathbb{P}(N(t) = n, T_1^{(t)} > t_1, \dots, T_m^{(t)} > t_m) = \mathbb{P}(N(t) = n)e^{-\lambda t_1} \cdots e^{-\lambda t_m}. \tag{13}$$

Para probarlo condicionaremos sobre la variable S_n,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(N(t) = n, T_1^{(t)} > t_1) &= \mathbb{P}(S_n \leq t < S_{n+1}, S_{n+1} - t > t_1) \\
&= \mathbb{P}(S_n \leq t, T_{n+1} > t_1 + t - S_n) \\
&= \int_0^t \mathbb{P}(T_{n+1} > t_1 + t - s) f_{S_n}(s) ds \\
&= e^{-\lambda t_1} \int_0^t \mathbb{P}(T_{n+1} > t - s) f_{S_n}(s) ds \\
&= e^{-\lambda t_1} \mathbb{P}(S_n \leq t, T_{n+1} > t - S_n) \\
&= \mathbb{P}(N(t) = n) e^{-\lambda t_1}.
\end{aligned}$$

Para obtener la segunda igualdad hay que observar que $\{S_{n+1} > t\} \cap \{S_{n+1} - t > t_1\} = \{S_{n+1} > t_1 + t\}$ y escribir $S_{n+1} = S_n + T_{n+1}$; la tercera se obtiene condicionando sobre S_n; la cuarta se obtiene usando la propiedad de pérdida de memoria de la exponencial ($\mathbb{P}(T_{n+1} > t_1 + t - s) = \mathbb{P}(T_{n+1} > t_1)\mathbb{P}(T_{n+1} > t - s) = e^{-\lambda t_1}\mathbb{P}(T_{n+1} > t - s)$).

Por la independencia de las variables T_n,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(N(t) = n, T_1^{(t)} > t_1, \dots, T_m^{(t)} > t_m) \\
= \;& \mathbb{P}(S_n \leq t < S_{n+1}, S_{n+1} - t > t_1, T_{n+2} > t_2, T_{n+m} > t_m) \\
= \;& \mathbb{P}(S_n \leq t < S_{n+1}, S_{n+1} - t > t_1) e^{-\lambda t_2} \cdots e^{-\lambda t_m} \\
= \;& \mathbb{P}(N(t) = n) e^{-\lambda t_1} \cdots e^{-\lambda t_m}.
\end{aligned}$$

4. Incrementos estacionarios e independientes. Por (6), $N(t+s) - N(t) \geq m$, o $N(t+s) \geq N(t) + m$, si y solo si $S_{N(t)+m} \leq t + s$, que es la misma cosa que $T_1^{(t)} + \dots + T_m^{(t)} \leq s$. Así

$$N(t+s) - N(t) = \text{máx}\{m : T_1^{(t)} + \dots + T_m^{(t)} \leq s\}. \tag{14}$$

Comparando (14) y (3) se puede ver que para t fijo las variables aleatorias $N(t+s) - N(t)$ para $s \geq 0$ se definen en términos de la sucesión (11) exactamente de la misma manera en que las $N(s)$ se definen en términos de la sucesión original de tiempos de espera. En otras palabras,

$$N(t+s) - N(t) = \Psi(s; T_1^{(t)}, T_2^{(t)}, \dots), \tag{15}$$

donde Ψ es la función definida en la Observación 4. De acuerdo con (12)

$$\{N(t+s) - N(t) : s \geq 0\} \sim \{N(s) : s \geq 0\}. \tag{16}$$

De (15) y lo visto en **3.** se deduce que $N(t)$ y $\{N(t+s)-N(t) : s \geq 0\}$ son independientes.

Sean $n \geq 2$ y $0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n$. Como $(N(t_2) - N(t_1), \ldots, N(t_n) - N(t_{n-1}))$ es una función de $\{N(t_1 + s) - N(t_1) : s \geq 0\}$, tenemos que

$$N(t_1) \text{ y } (N(t_2) - N(t_1), \ldots, N(t_n) - N(t_{n-1}))$$

son independientes. Esto es,

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(N(t_1) = m_1, N(t_2) - N(t_1) = m_2, \ldots, N(t_n) - N(t_{n-1}) = m_n) \\ = \; & \mathbb{P}(N(t_1) = m_1)\mathbb{P}(N(t_2) - N(t_1) = m_2, \ldots, N(t_n) - N(t_{n-1}) = m_n) \end{aligned}$$

En particular, se obtiene la la independencia de los incrementos para el caso en que $n = 2$:

$$\mathbb{P}(N(t_1) = m_1, N(t_2) - N(t_1) = m_2) = \mathbb{P}(N(t_1) = m_1)\mathbb{P}(N(t_2) - N(t_1) = m_2).$$

Usando (16) se concluye que

$$\begin{aligned} & (N(t_2) - N(t_1), N(t_3) - N(t_2), \ldots, N(t_n) - N(t_{n-1})) \\ \sim \; & (N(t_2 - t_1), N(t_3 - t_1) - N(t_2 - t_1), \ldots, N(t_n - t_1) - N(t_{n-1} - t_1)). \end{aligned} \tag{17}$$

El caso general se obtiene por iteración del mismo argumento, aplicado al lado derecho de (17):

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(N(t_2) - N(t_1) = m_2, N(t_k) - N(t_{k-1}) = m_k, 3 \leq k \leq n) \\ = \; & \mathbb{P}(N(t_2 - t_1) = m_2, N(t_k - t_1) - N(t_{k-1} - t_1) = m_k, 3 \leq k \leq n) \\ = \; & \mathbb{P}(N(t_2 - t_1) = m_2)\mathbb{P}(N(t_k - t_1) - N(t_{k-1} - t_1) = m_k, 3 \leq k \leq n) \\ = \; & \mathbb{P}(N(t_2) - N(t_1) = m_2)\mathbb{P}(N(t_k) - N(t_{k-1}) = m_k, 3 \leq k \leq n) \\ = \; & \cdots \\ = \; & \prod_{k=2}^{n} \mathbb{P}(N(t_k) - N(t_{k-1}) = m_k). \end{aligned}$$

Por lo tanto, si $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n$, entonces

$$\mathbb{P}(N(t_k) - N(t_{k-1}) = m_k, 1 \leq k \leq n) = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}(N(t_k - t_{k-1}) = m_k). \tag{18}$$

De (18) y (10) se obtienen las dos condiciones que definen a un proceso de Poisson. $\square$

En lo que sigue mostraremos que vale la recíproca. Esto es, los tiempos de espera entre arribos de un proceso de Poisson de intensidad λ son variables aleatorias independientes cada una con distribución exponencial de intensidad λ.

Teorema 1.5. *Sea $\{S_n : n \geq 0\}$ un proceso puntual de Poisson de intensidad λ sobre la semirecta positiva. Los tiempos de espera entre arribos T_n, $n \geq 1$, definidos en* (1)*, constituyen una sucesión de variables aleatorias independientes cada una con distribución exponencial de intensidad λ.*

Demostración. La densidad conjunta de $\mathbf{T} = (T_1, T_2 \ldots, T_n)$ se obtendrá a partir de la densidad conjunta de las variables $\mathbf{S} = (S_1, S_2, \ldots, S_n)$ usando el método del Jacobiano. Por definición,

$$(T_1, T_2, \ldots, T_n) = g(S_1, S_2, \ldots, S_n),$$

donde $g : G_0 \to G$ es la transformación lineal biyectiva entre los conjuntos abiertos $G_0 = \{(s_1, \ldots, s_n) \in \mathbb{R}^n : 0 < s_1 < s_2 < \cdots < s_n\}$ y $G = \{(t_1, \ldots, t_n) : t_1 > 0, \ldots, t_n > 0\}$ definida por

$$g(s_1, s_2, \ldots, s_n) = (s_1, s_2 - s_1, \ldots, s_n - s_{n-1}).$$

La función inversa $h = g^{-1}$ es de la forma

$$h(t_1, \ldots, t_n) = (t_1, t_1 + t_2, \ldots, t_1 + \cdots + t_n)$$

y sus derivadas parciales

$$\frac{\partial s_i}{\partial t_j} = \frac{\partial \sum_{k=1}^{i} t_k}{\partial t_j} = \mathbf{1}\{j \leq i\}, \qquad 1 \leq i, j \leq n$$

son continuas en G. El jacobiano es

$$J(\mathbf{s}, \mathbf{t}) = \left| \left(\frac{\partial s_i}{\partial t_j} \right) \right| = 1$$

debido a que se trata de una matriz triangular inferior con 1's en la diagonal. Bajo esas condiciones tenemos que

$$f_{\mathbf{T}}(\mathbf{t}) = f_{\mathbf{S}}(h(\mathbf{t}))\mathbf{1}\{\mathbf{t} \in G\}.$$

La densidad conjunta de las variables $(S_1, \ldots, S_2)$ queda unívocamente determinada por la relación

$$\mathbb{P}(\mathbf{S} \in A) = \int_A f_{\mathbf{S}}(\mathbf{s}) d\mathbf{s}, \qquad A = (a_1, b_1] \times \cdots (a_n, b_n] \subset G_0.$$

Supongamos que $0 = b_0 \leq a_1 < b_1 < a_2 < b_2 < \cdots < a_n < b_n$ y calculemos la probabilidad del evento $\bigcap_{i=1}^n \{a_i < S_i \leq b_i\}$. Para ello observamos que $\bigcap_{i=1}^n \{a_i < S_i \leq b_i\} = \bigcap_{i=1}^{n-1} \{N(a_i) - N(b_{i-1}) = 0,\, N(b_i) - N(a_i) = 1\} \cap \{N(a_n) - N(b_{n-1}) = 0, N(b_n) - N(a_n) \geq 1\}$ y usamos las propiedades de independencia y homogeneidad temporal que caracterizan a los incrementos de un proceso de Poisson de intensidad λ:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^n \{a_i < S_i \leq b_i\} \right) \\
&= \left(\prod_{i=1}^{n-1} e^{-\lambda(a_i - b_{i-1})} \lambda(b_i - a_i) e^{-\lambda(b_i - a_i)} \right) e^{-\lambda(a_n - b_{n-1})} (1 - e^{-\lambda(b_n - a_n)}) \\
&= \left(\prod_{i=1}^{n-1} \lambda(b_i - a_i) \right) e^{-\lambda a_n} (1 - e^{-\lambda(b_n - a_n)}) \\
&= \left(\prod_{i=1}^{n-1} \lambda(b_i - a_i) \right) (e^{-\lambda a_n} - e^{-\lambda b_n}) \\
&= \int_{a_1}^{b_1} \lambda ds_1 \cdots \int_{a_{n-1}}^{b_{n-1}} \lambda ds_{n-1} \int_{a_n}^{b_n} \lambda e^{-\lambda s_n} ds_n \\
&= \int_{a_1}^{b_1} \cdots \int_{a_{n-1}}^{b_{n-1}} \int_{a_n}^{b_n} \lambda^n e^{-\lambda s_n} ds_1 \cdots ds_{n-1} ds_n \qquad (19)
\end{aligned}$$

De (19) se deduce que la densidad conjunta de $(S_1, \dots, S_n)$ es

$$f_{(S_1,\dots,S_n)}(s_1, \dots, s_n) = \lambda^n e^{-\lambda s_n} \mathbf{1}\{0 < s_1 < \cdots < s_n\}.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} f_{(T_1,\dots,T_n)}(t_1, \dots, t_n) &= \lambda^n e^{-\lambda \sum_{i=1}^n t_i} \mathbf{1}\{t_1 > 0, \dots, t_n > 0\} \\ &= \prod_{i=1}^n \lambda e^{-\lambda t_i} \mathbf{1}\{t_i > 0\}. \end{aligned} \tag{20}$$

La identidad (20) significa que los tiempos de espera entre arribos son independientes cada uno con distribución exponencial de intensidad λ. $\square$

Ejemplo 1.6. Suponga que el flujo de inmigración de personas hacia un territorio es un proceso de Poisson de tasa $\lambda = 1$ por día.

(a) ¿Cuál es el tiempo esperado hasta que se produce el arribo del décimo inmigrante?

(b) ¿Cuál es la probabilidad de que el tiempo de espera entre el décimo y el undécimo arribo supere los dos días?

Solución:

(a) $\mathbb{E}[S_{10}] = \frac{10}{\lambda} = 10$ días.

(b) $\mathbb{P}(T_{11} > 2) = e^{-2\lambda} = e^{-2} \approx 0.133$.

$\square$

Ejercicios adicionales

1. En un sistema electrónico se producen fallas de acuerdo con un proceso de Poisson de tasa 2.5 por mes. Por motivos de seguridad se ha decidido cambiarlo cuando ocurran 196 fallas. Hallar la media y la varianza del tiempo de uso del sistema.

2. Sean T una variable aleatoria con distribución exponencial de media 2 y $\{N(t),\, t \geq 0\}$ un proceso de Poisson de tasa 10 (independiente de T). Hallar $\operatorname{Cov}(T, N(T))$.

3. Sea $A(t) = t - S_{N(t)}$ el tiempo reverso al evento más reciente en un proceso de Poisson y sea $B(t) = S_{N(t)+1} - t$ el tiempo directo hasta el próximo evento. Mostrar que

(**a**) $A(t)$ y $B(t)$ son independientes,

(**b**) $B(t)$ se distribuye como T_1 (exponencial de intensidad λ) ,

(**c**) $A(t)$ se distribuye como $\min(T_1, t)$:

$$\mathbb{P}(A(t) \leq x) = (1 - e^{-\lambda x}) \mathbf{1}\{0 \leq x < t\} + \mathbf{1}\{x \geq t\}.$$

4. Sea $L(t) = A(t) + B(t) = S_{N(t)+1} - S_{N(t)}$ la longitud del intervalo de tiempo entre arribos que contiene a t.

(**a**) Mostrar que $L(t)$ tiene densidad

$$d_t(x) = \lambda^2 x e^{-\lambda x}\mathbf{1}\{0 < x < t\} + \lambda(1 + \lambda t)e^{-\lambda x}\mathbf{1}\{x \geq t\}.$$

(**b**) Mostrar que $\mathbb{E}[L(t)]$ converge a $2\mathbb{E}[T_1]$ cuando $t \to \infty$. Esto parece una paradoja debido a que $L(t)$ es uno de los T_n. Dar una resolución intuitiva de esta paradoja.

1.4. Distribución condicional de los tiempos de llegada

Supongamos que sabemos que ocurrió exactamente un arribo de un proceso de Poisson en el intervalo $[0, t]$. Queremos determinar la distribución del tiempo en que el arribo ocurrió. Como el proceso de Poisson es temporalmente homogéneo y tiene incrementos independientes es razonable pensar que los intervalos de igual longitud contenidos en el intervalo $[0, t]$ deben tener la misma probabilidad de contener al arribo. En otras palabras, el tiempo en que ocurrió el arribo debe estar distribuido uniformemente sobre el intervalo $[0, t]$. Esto es fácil de verificar puesto que, para $s \leq t$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(T_1 < s|N(t) = 1) &= \frac{\mathbb{P}(T_1 < s,\, N(t) = 1)}{\mathbb{P}(N(t) = 1)} \\
&= \frac{\mathbb{P}(1 \text{ arribo en } (0, s],\, 0 \text{ arribos en } (s, t])}{\mathbb{P}(N(t) = 1)} \\
&= \frac{\mathbb{P}(1 \text{ arribo en } (0, s])\mathbb{P}(0 \text{ arribos en } (s, t])}{\mathbb{P}(N(t) = 1)} \\
&= \frac{\lambda s e^{-\lambda s} e^{-\lambda(t-s)}}{\lambda t e^{-\lambda t}} \\
&= \frac{s}{t}
\end{aligned}$$

Este resultado puede generalizarse

Teorema 1.7 (Propiedad condicional). *Sea Π un proceso de Poisson de intensidad λ sobre $\mathbb{R}^+$. Condicional al evento $N(t) = n$, los n arribos ocurridos en el intervalo $[0, t]$ tienen la misma distribución conjunta que la de n puntos independientes elegidos al azar sobre el intervalo $[0, t]$. En otras palabras, condicional a $N(t) = n$ los puntos en cuestión se distribuyen como n variables aleatorias independientes, cada una con distribución uniforme sobre el intervalo $[0, t]$.*

Demostración. Sea $A_1, A_2, \ldots, A_k$ una partición del intervalo $[0, t]$. Si $n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$, entonces

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(N(A_i) = n_i, 1 \leq i \leq k|N(t) = n) &= \frac{\prod_i \mathbb{P}(N(A_i) = n_i)}{\mathbb{P}(N(t) = n)} \\
&= \frac{\prod_i e^{-\lambda|A_i|}(\lambda|A_i|)^{n_i}/n_i!}{e^{-\lambda t}(\lambda t)^n/n!} \\
&= \frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}\prod_i \left(\frac{|A_i|}{t}\right)^{n_i}. \qquad (21)
\end{aligned}$$

Por una parte la distribución condicional de las posiciones de los n arribos queda completamente caracterizada por esta función de $A_1, \dots, A_k$.

Por otra parte la distribución multinomial (21) es la distribución conjunta de n puntos independientes elegidos al azar de acuerdo con la distribución uniforme sobre el intervalo $[0, t]$.

En efecto, basta observar que si $U_1, \dots, U_n$ son variables aleatorias independientes con distribución uniforme sobre un conjunto A, y $M(B) = \sum_i \mathbf{1}\{U_i \in B\}$, entonces

$$\mathbb{P}(M(B_i) = n_i, i = 1, \dots, k) = \frac{n!}{n_1! \cdots n_k!} \prod_{i=1}^{k} \left(\frac{|B_i|}{|A_i|} \right)^{n_i}.$$

Se infiere que la distribución conjunta de los puntos en $\Pi \cap [0, t]$ condicional a que hay exactamente n de ellos, es la misma que la de n puntos independientes elegidos al azar con la distribución uniforme sobre el intervalo $[0, t]$. □

Nota Bene. La propiedad condicional permite probar la existencia de procesos de Poisson mediante simulación. Sea $\lambda > 0$ y sea $A_1, A_2, \dots$ una partición de $\mathbb{R}^d$ en conjuntos borelianos de medida de Lebesgue finita. Para cada i, simulamos una variable aleatoria N_i con distribución Poisson de parámetro $\lambda|A_i|$. Luego muestreamos n puntos elegidos independientemente sobre A_i, cada uno con distribución uniforme sobre A_i. La unión sobre i de tales conjuntos de puntos es un proceso de Poisson de intensidad λ. (Para más detalles ver el Chap 7 de Ferrari, Galves (2001)) □

Ejemplo 1.8 (Insectos en un asado)**.** Todo tipo de insectos aterrizan en la mesa de un asado a la manera de un proceso de Poisson de tasa 3 por minuto. Si entre las 13:30 y las 13:35 aterrizaron 8 insectos, cuál es la probabilidad de que exactamente 3 de ellos hayan aterrizado durante el primer minuto?

Solución: Dado que aterrizaron 8 insectos durante 5 minutos, la distribución de cada aterrizaje se distribuye, independientemente de los demás, como una variable uniforme sobre el intervalo $[0, 5]$. En consecuencia, la probabilidad de que cada insecto hubiese aterrizado durante el primer minuto es $1/5$. Por lo tanto, la probabilidad de que exactamente 3 insectos hayan aterrizado durante el primer minuto es

$$\binom{8}{3} \left(\frac{1}{5} \right)^3 \left(\frac{4}{5} \right)^5 = 56 \frac{4^5}{5^8} = 0.1468\dots$$

□

1.5. Coloración y adelgazamiento de procesos de Poisson

Teorema 1.9 (Coloración)**.** *Sea Π un proceso de Poisson de intensidad λ sobre $\mathbb{R}^+$. Coloreamos los puntos de Π de la siguiente manera. Cada punto de Π se pinta de rojo con probabilidad p o de negro con probabilidad $1 - p$. Los puntos se pintan independientemente unos de otros. Sean Π_1 y Π_2 los conjuntos de puntos pintado de rojo y de negro, respectivamente. Entonces Π_1 y Π_2 son procesos de Poisson independientes de intensidades $p\lambda$ y $(1 - p)\lambda$, respectivamente.*

Demostración. Sea $t > 0$ fijo. Por la propiedad condicional, si $N(t) = n$, esos puntos tienen la misma distribución que n puntos independientes elegidos al azar sobre el intervalo $[0, t]$ de acuerdo con la distribución uniforme. Por tanto, podemos considerar n puntos elegidos al azar de esa manera. Por la independencia de los puntos, sus colores son independientes unos de los otros. Como la probabilidad de que un punto dado sea pintado de rojo es p y la probabilidad de sea pintado de negro es $1-p$ se deduce que, condicional a $N(t) = n$, las cantidades $N_1(t)$ y $N_2(t)$ de puntos rojos y negros en $[0, t]$ tienen, conjuntamente, la distribución binomial

$$\mathbb{P}(N_1(t) = n_1, N_2(t) = n_2 | N(t) = n) = \frac{n!}{n_1! n_2!} p^{n_1}(1-p)^{n_2}, \text{ donde } n_1 + n_2 = n.$$

Por lo tanto, la probabilidad incondicional es

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(N_1(t) = n_1, N_2(t) = n_2) &= \left(\frac{(n_1+n_2)!}{n_1! n_2!} p^{n_1}(1-p)^{n_2}\right)\left(e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{n_1+n_2}}{(n_1+n_2)!}\right) \\
&= \left(e^{-p\lambda t}\frac{(p\lambda t)^{n_1}}{n_1!}\right)\left(\frac{e^{-(1-p)\lambda t}((1-p)\lambda t)^{n_2}}{n_2!}\right).
\end{aligned}$$

Vale decir, las cantidades $N_1(t)$ y $N_2(t)$ de puntos rojos y negros en el intervalo $[0, t]$ son independientes y tienen distribuciones Poisson de intensidades $p\lambda t$ y $(1-p)\lambda t$, respectivamente.

La independencia de las contadoras de puntos en intervalos disjuntas sigue trivialmente del hecho de que Π tiene esa propiedad. □

Otra prueba. Sean $N_1(t)$ y $N_2(t)$ la cantidad de arribos de tipo I y de tipo II que ocurren en $[0, t]$, respectivamente. Es claro que $N(t) = N_1(t) + N_2(t)$.

Los arribos de tipo I (II) son un proceso puntual aleatorio debido a que son una subsucesión (aleatoria) infinita de los arribos del proceso original y heredan su propiedad de independencia para intervalos disjuntos.

La prueba de que $\{N_1(t),\, t \geq 0\}$ y que $\{N_2(t),\, t \geq 0\}$ son procesos de Poisson independientes de intensidades $p\lambda$ y $(1-p)\lambda$, respectivamente, se completa observando que

$$\mathbb{P}(N_1(t) = n,\, N_2(t) = m) = \mathbb{P}(N_1(t) = n)\mathbb{P}(N_2(t) = m).$$

Condicionando a los valores de $N(t)$ y usando probabilidades totales se obtiene

$$\mathbb{P}(N_1(t) = n,\, N_2(t) = m) = \sum_{i=0}^{\infty} \mathbb{P}(N_1(t) = n,\, N_2(t) = m \,|\, N(t) = i)\mathbb{P}(N(t) = i)$$

Puesto que $\mathbb{P}(N_1(t) = n,\, N_2(t) = m \,|\, N(t) = i) = 0$ cuando $i \neq n + m$, la ecuación anterior se reduce a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(N_1(t) = n,\, N_2(t) = m) &= \mathbb{P}(N_1(t) = n,\, N_2(t) = m \,|\, N(t) = n + m)\mathbb{P}(N(t) = n + m) \\
&= \mathbb{P}(N_1(t) = n,\, N_2(t) = m \,|\, N(t) = n + m)e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{n+m}}{(n+m)!}.
\end{aligned}$$

Dado que ocurrieron $n + m$ arribos, la probabilidad de que n sean de tipo I (y m sean de tipo

II) es la probabilidad binomial de que ocurran n éxitos en $n+m$ ensayos. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(N_1(t)=n,\, N_2(t)=m) &= \binom{n+m}{n} p^n(1-p)^m e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{n+m}}{(n+m)!} \\
&= \frac{(n+m)!}{n!\,m!} p^n(1-p)^m e^{-\lambda p t} e^{-\lambda(1-p)t}\frac{(\lambda t)^n(\lambda t)^m}{(n+m)!} \\
&= \left(e^{-\lambda p t}\frac{(\lambda p t)^n}{n!}\right)\left(e^{-\lambda(1-p)t}\frac{(\lambda(1-p)t)^m}{m!}\right).
\end{aligned}$$

Lo que completa la demostración. □

Ejemplo 1.10 (Insectos en un asado)**.** Todo tipo de insectos aterrizan en la mesa de un asado a la manera de un proceso de Poisson de tasa 3 por minuto y cada insecto puede ser una mosca con probabilidad 2/3, independientemente de la naturaleza de los demás insectos. Si a las 13:30 se sirven los chorizos, cuál es la probabilidad de que la tercer mosca tarde más de 2 minutos en aterrizar en la mesa?

Solución: Las moscas aterrizan en la mesa a la manera de un proceso de Poisson de tasa $\frac{2}{3}3 = 2$ por minuto. En consecuencia, los aterrizajes de moscas ocurren cada tiempos exponenciales independientes de intensidad 2. De aquí se deduce que el tiempo que tarda en aterrizar la tercer mosca, S_3 tiene distribución $\Gamma(3, 2)$. Por lo tanto, la probabilidad de que la tercer mosca tarde más de 2 minutos en aterrizar en la mesa es

$$\mathbb{P}(S_3 > 2) = e^{-2\cdot 2}\sum_{i=0}^{3-1}\frac{(2\cdot 2)^i}{i!} = e^{-4}\left(1+4+8\right) = 0.2381\ldots$$

Ejercicios adicionales

5. A un banco llegan clientes de acuerdo con un proceso de Poisson de intensidad 20 por hora. En forma independiente de los demás, cada cliente realiza un depósito con probabilidad 1/4 o una extracción con probabilidad 3/4.

(**a**) Si el banco abre sus puertas a las 10:00, cuál es la probabilidad de que el segundo depósito se efectué pasadas las 10:30?

(**b**) Cada depósito (en pesos) se distribuye como una variable $\mathcal{U}[100, 900]$ y cada extracción como una variable $\mathcal{U}[100, 500]$. Si un cliente realiza una operación bancaria de 200 pesos, cuál es la probabilidad de que se trate de un depósito?

1.6. Superposición de Procesos de Poisson: competencia

El siguiente teorema de superposición puede verse como complementario del teorema de coloración.

Teorema 1.11 (Superposición)**.** *Sean Π_1 y Π_2 dos procesos de Poisson independientes de intensidades λ_1 y λ_2, respectivamente, sobre $\mathbb{R}^+$. El conjunto $\Pi = \Pi_1 \cup \Pi_2$ es un proceso de Poisson de intensidad $\lambda_1 + \lambda_2$.* □

Demostración. Sean $N_1(t) = |\Pi_1 \cap [0,t]|$ y $N_2(t) = |\Pi_2 \cap [0,t]|$. Entonces $N_1(t)$ y $N_2(t)$ son variables aleatorias independientes con distribución Poisson de parámetros $\lambda_1 t$ y $\lambda_2 t$. Se infiere que la suma $N(t) = N_1(t) + N_2(t)$ tiene la distribución de Poisson de parámetro $\lambda_1 t + \lambda_2 t = (\lambda_1 + \lambda_2)t$. Más aún, si $A_1, A_2, \dots,$ son intervalos disjuntos las variables aleatorias $N(A_1), N(A_2), \dots$ son independientes. Falta mostrar que, casi seguramente, $N(t) = |\Pi \cap [0,t]|$ para todo $t > 0$, que es lo mismo que decir que Π_1 y $\mathbb{P}1_2$ no tienen puntos en común. Este es un paso técnico (ver el Lema 1.12) y la prueba puede omitirse en una primera lectura.

Lema 1.12. *Dos procesos de Poisson* $\Pi_1 = \{S_n^1 : n \geq 0\}$ *y* $\Pi_2 = \{S_n^2 : n \geq 0\}$ *independientes y de tasas* λ_1 *y* λ_2*, respectivamente, no tienen puntos en común.*

Demostración. Basta probar que $\mathbb{P}(D(t)) = 0$ para todo t, donde $D(t)$ es el evento definido por

$$D(t) := \{\text{existen puntos en común en el intervalo } (0,t]\}$$

Para simplificar la notación lo demostraremos para $D = D(1)$.

Sean $\{N_1(t),\, t \geq 0\}$ y $\{N_2(t),\, t \geq 0\}$ los procesos de conteo de los procesos de Poisson $\{S_n^1 : n \geq 0\}$ y $\{S_n^2 : n \geq 0\}$. El evento

$$D_n := \left\{ N_1\left(\frac{i}{2^n}, \frac{i+1}{2^n}\right] + N_2\left(\frac{i}{2^n}, \frac{i+1}{2^n}\right] \geq 2 \text{ para algún } i \in [0, 2^n - 1] \right\}$$

decrece a D cuando n tiende a infinito, y por lo tanto, por la continuidad de la probabilidad para sucesiones monótonas de eventos,

$$\mathbb{P}(D) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(D_n) = 1 - \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(D_n^c).$$

Pero

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(D_n^c) &= \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{2^n-1} \left\{ N_1\left(\frac{i}{2^n}, \frac{i+1}{2^n}\right] + N_2\left(\frac{i}{2^n}, \frac{i+1}{2^n}\right] \leq 1 \right\} \right) \\ &= \prod_{i=1}^{2^n-1} \mathbb{P}\left(N_1\left(\frac{i}{2^n}, \frac{i+1}{2^n}\right] + N_2\left(\frac{i}{2^n}, \frac{i+1}{2^n}\right] \leq 1 \right). \end{aligned}$$

Debido a que los procesos son temporalmente homogéneos, para cada i vale que

$$\mathbb{P}\left(N_1\left(\frac{i}{2^n}, \frac{i+1}{2^n}\right] + N_2\left(\frac{i}{2^n}, \frac{i+1}{2^n}\right] \leq 1 \right) = \mathbb{P}\left(N_1\left(2^{-n}\right) + N_2\left(2^{-n}\right) \leq 1 \right)$$

Y el problema se reduce a calcular $\mathbb{P}\left(N_1\left(2^{-n}\right) + N_2\left(2^{-n}\right) \leq 1 \right)$. La última probabilidad puede expresarse como la suma de los siguientes términos

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(N_1\left(2^{-n}\right) = 0,\, N_2\left(2^{-n}\right) = 0 \right) &= e^{-\lambda_1 2^{-n}} e^{-\lambda_2 2^{-n}}, \\ \mathbb{P}\left(N_1\left(2^{-n}\right) = 0,\, N_2\left(2^{-n}\right) = 1 \right) &= e^{-\lambda_1 2^{-n}} e^{-\lambda_2 2^{-n}} \lambda_2 2^{-n}, \\ \mathbb{P}\left(N_1\left(2^{-n}\right) = 1,\, N_2\left(2^{-n}\right) = 0 \right) &= e^{-\lambda_1 2^{-n}} \lambda_1 2^{-n} e^{-\lambda_2 2^{-n}}. \end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\mathbb{P}\left(N_1\left(2^{-n}\right) + N_2\left(2^{-n}\right) \leq 1 \right) = e^{-(\lambda_1+\lambda_2)2^{-n}} \left(1 + (\lambda_1 + \lambda_2) 2^{-n} \right). \tag{22}$$

Por lo tanto,

$$\mathbb{P}(D_n^c) \;=\; e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}\left(1+(\lambda_1+\lambda_2)2^{-n}\right)^{2^n}. \tag{23}$$

La última cantidad tiende a 1 cuando $n \to \infty$, y se concluye que $\mathbb{P}(D) = 0$. □

Teorema 1.13 (Competencia)**.** *En la situación del Teorema 1.11, sea T el primer arribo del proceso $N = N_1 + N_2$ y J el índice del proceso de Poisson responsable por dicho arribo; en particular T es el primer arribo de N_J. Entonces*

$$\mathbb{P}(J = j, T \geq t) = \mathbb{P}(J = j)\mathbb{P}(T \geq t) = \frac{\lambda_j}{\lambda_1+\lambda_2}e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}.$$

En particular, J y T son independientes, $\mathbb{P}(J = j) = \frac{\lambda_j}{\lambda_1+\lambda_2}$ y T tiene distribución exponencial de intensidad $\lambda_1 + \lambda_2$.

Demostración. Ver la demostración del Teorema que caracteriza la distribución del mínimo de dos exponenciales independientes. □

Ejemplo 1.14 (Insectos en un asado)**.** Moscas y abejas aterrizan en la mesa de un asado a la manera de dos procesos de Poisson independientes de tasas 2 y 1 por minuto, respectivamente. Cuál es la probabilidad de que el primer insecto en aterrizar en la mesa sea una mosca? Rta. 2/3. □

1.7. Procesos de Poisson compuestos

Un proceso estocástico se dice un proceso de Poisson compuesto si puede representarse como

$$X(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i$$

donde $\{N(t),\, t \geq 0\}$ es un proceso de Poisson, y las variables $\{Y_i, i \geq 1\}$ son iid e independientes de N.

Lema 1.15. Sea $X(t)$ un proceso de Poisson compuesto. Si $\{N(t),\, t \geq 0\}$ tiene intensidad λ y las variables Y tienen esperanza finita, entonces

$$\mathbb{E}[X(t)] = \lambda t \mathbb{E}[Y_1].$$

Más aún, si las variables Y tienen varianza finita, entonces,

$$\mathbb{V}(X(t)) = \lambda t \mathbb{E}[Y_1^2].$$

Demostración. Para calcular la esperanza de $X(t)$ condicionamos sobre $N(t)$:

$$\mathbb{E}\left[X(t)\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[X(t)\,|N(t)\right]\right]$$

Ahora bien,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[X(t)\,|\,N(t)=n\right] &= \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{N(t)} Y_i\,|\,N(t)=n\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n} Y_i\,|\,N(t)=n\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n} Y_i\right] \qquad \text{por la independencia de } Y_i \text{ y } N(t) \\
&= n\mathbb{E}[Y_1].
\end{aligned}$$

Esto implica que

$$\mathbb{E}\left[X(t)\,|\,N(t)\right] = N(t)\mathbb{E}[Y_1]$$

y por lo tanto,

$$\mathbb{E}\left[X(t)\right] = \mathbb{E}\left[N(t)\mathbb{E}[Y_1]\right] = \mathbb{E}[N(t)]\mathbb{E}[Y_1] = \lambda t\mathbb{E}[Y_1].$$

Aunque podemos obtener $E[X(t)^2]$ condicionando sobre $N(t)$, usaremos la fórmula de la varianza condicional

$$\mathbb{V}(X(t)) = \mathbb{E}[\mathbb{V}(X(t)|N(t))] + \mathbb{V}(\mathbb{E}[X(t)|N(t)]).$$

Ahora bien,

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}\left[X(t)\,|\,N(t)=n\right] &= \mathbb{V}\left(\sum_{i=1}^{N(t)} Y_i\,|\,N(t)=n\right) \\
&= \mathbb{V}\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i\,|\,N(t)=n\right) \\
&= \mathbb{V}\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i\right) \qquad \text{por la independencia de } Y_i \text{ y } N(t) \\
&= n\mathbb{V}[Y_1].
\end{aligned}$$

Esto implica que

$$\mathbb{V}\left(X(t)\,|\,N(t)\right) = N(t)\mathbb{V}(Y_1)$$

y por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}\left(X(t)\right) &= \mathbb{E}\left[N(t)\mathbb{V}(Y_1)\right] + \mathbb{V}(N(t)\mathbb{E}[Y_1]) \\
&= \mathbb{V}(Y_1)\mathbb{E}[N(t)] + \mathbb{E}[Y_1]^2\mathbb{V}(N(t)) \\
&= \mathbb{V}(Y_1)\lambda t + \mathbb{E}[Y_1]^2\lambda t \\
&= \lambda t\mathbb{E}[Y_1^2].
\end{aligned}$$

□

Ejemplo 1.16. Supongamos que la cantidad de accidentes en una fábrica industrial se rige por un proceso de Poisson de intensidad 4 por mes y que la cantidad de trabajadores damnificados en cada accidente son variables aleatorias independientes con distribución uniforme sobre $\{1, 2, 3\}$. Supongamos también que la cantidad de trabajadores damnificados en cada accidente es independiente de la cantidad de accidentes ocurridos. Se quiere hallar la media y la varianza de la cantidad anual de trabajadores damnificados en dicha fábrica.

Solución: Sean $N(t)$ la cantidad de accidentes en t meses e Y_i el número de trabajadores damnificados en el i-ésimo accidente, $i = 1, 2, \ldots$. El número total de trabajadores damnificados en un año puede expresarse en la forma $X(12) = \sum_{i=1}^{N(12)} Y_i$.

Utilizando los resultados del Lema 1.15 tenemos que

$$\mathbb{E}[X(12)] = (4 \cdot 12)\mathbb{E}[Y_1] = 48\mathbb{E}[Y_1] = 48 \cdot 2 = 96$$
$$\mathbb{V}(X(12)) = (4 \cdot 12)\mathbb{E}[Y_1^2] = 48 \cdot \frac{14}{3} = 224.$$

□

Ejercicios adicionales

6. Una partícula suspendida en agua es bombardeada por moléculas en movimiento térmico de acuerdo con un proceso de Poisson de intensidad 10 impactos por segundo. Cuando recibe un impacto la partícula se mueve un milímetro hacia la derecha con probabilidad 3/4 o un milímetro hacia la izquierda con probabilidad 1/4. Transcurrido un minuto, cuál es la posición media de la partícula?

7. Un servidor recibe clientes de acuerdo con un proceso de Poisson de intensidad 4 clientes por hora. El tiempo de trabajo (en minutos) consumido en cada servicio es una variable aleatoria $\mathcal{U}[1, 9]$. Al cabo de 8 horas, cuál es el tiempo medio de trabajo consumido por todos los servicios?

---

2. Bibliografía consultada

Para redactar estas notas se consultaron los siguientes libros:

1. Brémaud, P.: Markov Chains: Gibbs Fields, Monte Carlo Simulation, and Queues. Springer, New York. (1999)

2. Feller, W.: An introduction to Probability Theory and Its Applications. Vol. 2. John Wiley & Sons, New York. (1971)

3. Ferrari, P. A., Galves, A.: Construction of Stochastic Procecesses, Coupling and Regeneration. (2001)

4. Grimmett, G. R., Stirzaker, D. R.: Probability and Random Processes. Oxford University Press, New York. (2001)

5. Kingman, J. F. K.: Poisson Processes. Oxford University Press. New York. (2002)
6. Meester, R.: A Natural Introduction to Probability Theory. Birkhauser, Berlin. (2008)
7. Ross, S.: Introduction to Probability Models. Academic Press, San Diego. (2007)