61.09 Probabilidad y estadística B

Quevedo Federico

Índice

1. Guia 1

1.1. 1)

$P(CO) = 0{,}7$
$P(OM) = 0{,}6$
$P(CO \cup OM) = 0{,}74$

$a) P(CO \cup OM) = P(CO) + P(OM) - P(CO \cap OM) \Rightarrow P(CO \cap OM) = 0{,}7 + 0{,}6 - 0{,}74 = 0{,}56$

$b) P(CO) = P(CO \cap OM) + P(CO \cap \overline{OM}) \Rightarrow P(CO \cap \overline{OM}) = 0{,}7 - 0{,}56 = 0{,}14$

$c) P(OM) = P(OM \cap CO) + P(OM \cap \overline{CO}) \Rightarrow P(OM \cap \overline{CO}) = 0{,}6 - 0{,}56 = 0{,}04$

$d) P(\overline{CO}) = 1 - P(CO)$
$P(\overline{CO}) = P(\overline{CO} \cap OM) + P(\overline{CO} \cap \overline{OM}) \Rightarrow P(\overline{CO} \cap \overline{OM}) = 1 - 0{,}7 - 0{,}04 = 0{,}26$

1.2. 2)

$P(V) = 0{,}312$
$P(C) = 0{,}470$
$P(G) = 0{,}525$
$P(V \cap G) = 0{,}042$
$P(G \cap C) = 0{,}147$
$P(V \cap C) = 0{,}086$
$P(V \cap C \cap U) = 0{,}025$

$P(G) = P(G \cap V) + P(G \cap \overline{V}) \Rightarrow P(G \cap \overline{V}) = 0{,}483$
$P(\overline{V}) = P(\overline{V} \cap G) + P(\overline{V} \cap \overline{G}) \Rightarrow P(\overline{V} \cap \overline{G}) = 0{,}205$
$P(C \cap G) = P(C \cap G \cap V) + P(C \cap G \cap \overline{V}) \Rightarrow P(C \cap G \cap \overline{V}) = 0{,}122$
$P(C) = P(C \cap V) + P(C \cap \overline{V}) \Rightarrow P(C \cap \overline{V}) = 0{,}384$
$P(C \cap \overline{V}) = P(C \cap \overline{V} \cap G) + P(C \cap \overline{V} \cap \overline{G}) \Rightarrow P(C \cap \overline{V} \cap \overline{G}) = 0{,}262$
$P(\overline{V} \cap \overline{G}) = P(\overline{V} \cap \overline{G} \cap C) + P(\overline{V} \cap \overline{G} \cap \overline{C}) \Rightarrow P(\overline{V} \cap \overline{G} \cap \overline{C}) = -0{,}057$

1.3. 3)

$P(A) = 0{,}22$
$P(B) = 0{,}25$
$P(C) = 0{,}28$
$P(A \cap B) = 0{,}11$
$P(A \cap C) = 0{,}05$
$P(B \cap C) = 0{,}07$
$P(A \cap B \cap C) = 0{,}01$

$a)P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}36$

$b)P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap \overline{A}) \Rightarrow P(B \cap \overline{A}) = 0{,}14$
$P(\overline{A}) = P(\overline{A} \cap B) + P(\overline{A} \cap \overline{B}) \Rightarrow P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0{,}64$

$c)P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C) = 0{,}56$

$d)P(A \cap C) = P(A \cap C \cap B) + P(A \cap C \cap \overline{B}) \Rightarrow P(A \cap C \cap \overline{B}) = 0{,}04$
$P(C) = P(C \cap B) + P(C \cap \overline{B}) \Rightarrow P(C \cap \overline{B}) = 0{,}21$
$P(\overline{B} \cap C) = P(\overline{B} \cap C \cap A) + P(\overline{B} \cap C \cap \overline{A}) \Rightarrow P(\overline{B} \cap C \cap \overline{A}) = 0{,}17$

$e)P((\overline{A} \cap \overline{B}) \cup C) = P(\overline{A} \cap \overline{B}) + P(C) - P(\overline{B} \cap \overline{A} \cap C) = 0{,}75$

1.4. 4)

a) Roja: 5 champagne y 6 vino.
Blanca: 3 champagne y 4 vino.
$P(C_R) = \frac{5}{5+6} = 0{,}4545$
$P(C_B) = \frac{3}{3+4} = 0{,}4285$

Es más probable agarrar champagne en la roja.

b) Roja: 6 champagne y 3 vino.
Blanca: 9 champagne y 5 vino.
$P(C_R) = \frac{6}{6+3} = 0{,}6667$
$P(C_B) = \frac{9}{9+5} = 0{,}6429$

Es más probable agarrar champagne en la roja.

c) Roja: 11 champagne y 9 vino.
Blanca: 12 champagne y 9 vino.
$P(C_R) = \frac{11}{11+9} = 0{,}55$
$P(C_B) = \frac{12}{12+9} = 0{,}5714$

Es más probable agarrar champagne en la blanca.

1.5. 5)

a) $P(A) = p_1 + p_5 = 0{,}45$

b) Para que A este incluido en B, B tiene que tener, por lo menos, a los elementos 1 y 5. Proponemos $B = \{1, 2, 5\} \rightarrow P(B) = p_1 + p_2 + p_5 = 0{,}65$ Cumple la condición.

c) Para que la interseccion sea 0 se necesita que C no tenga al elemento 1 ni 5. Proponemos $C = \{3\} \rightarrow P(C) = p_3 = 0{,}3$. Se ve que con los elementos p_2 y p_4 no se podria llegar a cumplir esta condición.

d) Para que la interseccion sea 0 se necesita que D no tenga ni el 1 ni el 5. Como $P(A \cup D) = P(A) + P(D)$ y $P(A) = 0{,}45$ Se necesita que $P(D) \geq 0{,}15$. Se cumple cuando $D = \{2\}$, $D = \{2, 3\}$, $D = \{2, 3, 4\}$, $D = \{3, 4\}$, $D = \{3\}$, $D = \{2, 4\}$

1.6. 6)

En este ejercicio hay que recordar que cuando dos sucesos son independientes: $P(A \cup B) = P(A) \cdot P(B)$
Usaremos como notacion R_a para las bolas rojas sacadas de la urna a siendo $\overline{P_a}$ para las blancas de la urna a, equivalente para la urna b solo cambiando el subindice.
$P(R_a) = \frac{3}{5}$
$P(R_b) = \frac{2}{7}$
$a) P(\overline{R_a} \cap \overline{R_b}) = P(\overline{R_a}) \cdot P(\overline{R_b}) = \frac{2}{7}$

$b) P((\overline{R_a} \cap \overline{R_b}) \cup (R_a \cap R_b)) = P(\overline{R_a} \cap \overline{R_b}) + P(R_a \cap R_b) = P(\overline{R_a}) \cdot P(\overline{R_b}) + P(R_a) \cdot P(R_b) = \frac{16}{35}$

$c) P((\overline{R_a} \cap R_b) \cup (R_a \cap \overline{R_b})) = P(\overline{R_a}) \cdot P(R_b) + P(R_a) \cdot P(\overline{R_b}) = \frac{19}{35}$

$d) P(\overline{R_a}) = 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$

1.7. 7)

Las probabilidades de salir un 6 tirando 4 dados son: $P(6en4tiros) = \binom{4}{4}\left(\frac{1}{6}\right)^4 + \binom{4}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right) + \binom{4}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^2 + \binom{4}{1}\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)^3 = 0{,}5177$
Es más probable que salga algun 6, entonces el esposo lavara los platos más seguido.

1.8. 8)

a) 1/6 Ya que seria la probabilidad de que el segundo dado salga igual que el primero. Se puede calcular buscando los casos que cumplen la condicion, que serian $\{1, 1; 2, 2; 3, 3; 4, 4; 5, 5; 6, 6\}$, la probabilidad de cada uno es $\left(\frac{1}{6}\right)^2$ por lo tanto la probabilidad total seria $6 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{1}{6}$

b) Se cumple con las combinaciones $\{1, 2; 1, 3; 1, 4; 1, 5; 1, 6; 2, 3; 2, 4; 2, 5; 2, 6; 3, 4; 3, 5; 3, 6; 4, 5\}$ y todas estos mismos casos pero invertidos, es decir $1, 2 \rightarrow 2, 1$. La probabilidad de cada caso es $\left(\frac{1}{6}\right)^2$, al ser los casos 13 la probabilidad total seria $2 \cdot 13 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{13}{18}$

c) Posibles combinaciones $\{4, 6; 5, 5; 6, 4\}$, esta vez ya estamos contemplando todos los casos, la probabilidad es $3 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{1}{12}$

d) El primer numero puede ser 1,2,3 y el segundo 1,3,5: $\frac{3}{6} \cdot \frac{3}{5} = \frac{9}{36}$

e) Los posibles casos son $\{1, 2; 2, 3; 3, 4; 4, 5; 5, 6\}$ y estos invertidos. Son 10 casos en total: $10 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{10}{36}$

1.9. 9)

a) Area del triangulo $\frac{1 \cdot 1}{2} = \frac{1}{2}$

b) Queda el area dentro de un archo de circunferencia. $\pi \cdot 1^2 \cdot \frac{1}{4}$ Lo multiplico por $frac14$ ya que es un cuarto de la circunferencia.

c) Es un triangulo de lado $\frac{1}{2} + \frac{1}{k}$, por lo tanto su area es $\frac{(\frac{1}{2}+\frac{1}{k})^2}{2}$. La interseccion para todos los k es el triangulo de area $\frac{1}{2^2 \cdot 2} = \frac{1}{8}$ ya que se ve que con $k \to \infty$ se encuentra el area que es común para todos los k.

d) La formula es la de un circulo centrado en el cuadrado, el area es $\frac{\pi}{k^2}$, con $k \to \infty$ se llega a una circunferencia de radio tendiendo a 0, es decir que $P(D) = 0$.

1.10. 10)

1.11. 11)

a) La probabilidad de cada digito es $\frac{1}{10}$ por lo tanto la probabilidad de que los primeros tres digitos sean esos valores es $\left(\frac{1}{10}\right)^3 = 0{,}001$.

b) $\left(\frac{9}{10}\right)^5 = 0{,}59049$

c) $\left(\frac{9}{10}\right)^\infty = 0$

1.12. 12)

a)

1) $\left(\frac{10}{40}\right)^3 = \frac{1}{64} = 0{,}015625$

2) $4 \cdot \left(\frac{10}{40}\right)^3 = \frac{1}{16} = 0{,}0625$

3) $40 \cdot \left(\frac{1}{40}\right)^3 = \frac{1}{1600} = 0{,}000625$

4) $\frac{4!}{1!} \cdot \left(\frac{10}{40}\right)^3 = \frac{3}{8} = 0{,}375$

b)
1) $\frac{10}{40} \cdot \frac{9}{39} \cdot \frac{8}{38} = \frac{3}{247} = 0{,}0121$
2) $4 \cdot \frac{10}{40} \cdot \frac{9}{39} \cdot \frac{8}{38} = \frac{12}{247} = 0{,}0486$
3) 0
4) $\frac{4!}{1!} \frac{10^3}{40 \cdot 39 \cdot 38} = \frac{100}{247} = 0{,}405$

1.13. 13)

a) $\left(\frac{39}{40}\right)^{14} = 0{,}7016$
b) $\frac{\frac{40!}{25!}}{40^{15}} = 0{,}0489$

1.14. 14)

Para que una partida pase la inspeccion debe darse el caso de que no se agarre ninguna pieza defectuosa, o a lo sumo una. La probabilidad de no agarrar ningun elemento es: $\frac{100-k}{100} \cdot \frac{99-k}{99} \cdot \frac{98-k}{98} \cdot \frac{97-k}{97} \cdot \frac{96-k}{96} \cdot \frac{95-k}{95} \cdot \frac{94-k}{94} \cdot \frac{93-k}{93} \cdot \frac{92-k}{92} \cdot \frac{91-k}{91} = \frac{\frac{(100-k)!}{(100-k-10)!}}{\frac{100!}{90!}}$ ya que estos valores son muy grandes para meterlos en la calculadora asi se puede expresar con variaciones o combinatorias. $\frac{V_{100-k,10}}{V_{100,10}}$ o como combinatorias que quedan más lindo $\frac{\binom{100-k}{10}}{\binom{100}{10}}$ Se ve que como el numero de abajo es igual en ambas combinatorias este se cancela y queda como una variacion. Para la situacion en que se agarra una pieza defectuosa es lo mismo solo que hay 10 formas posibles de agarrarla, la probabilidad se calcularia como $10 \cdot \frac{k}{100} \cdot \frac{100-k}{99} \cdot \frac{99-k}{98} \cdot \frac{98-k}{97} \cdot \frac{97-k}{96} \cdot \frac{96-k}{95} \cdot \frac{95-k}{94} \cdot \frac{94-k}{93} \cdot \frac{93-k}{92} \cdot \frac{92-k}{91}$ No hace falta multiplicar en distintos ordenes porque la multiplicacion es conmutativa y queda lo mismo, con combinatorias esto queda $k \cdot \frac{\binom{100-k}{9}}{\binom{100}{10}}$ Acordarse que el 10 aparece porque la parte de abajo de la combinatoria de arriba es 9 y la de abajo es 10, eso termina dejando $\frac{\frac{1}{9!}}{\frac{1}{10!}} = 10$. Entonces la probabilidad total es la suma de ambas probabilidades

b) $P(k) = \frac{\binom{100-k}{10}}{\binom{100}{10}} + k \cdot \frac{\binom{100-k}{9}}{\binom{100}{10}}$

a) $P(8) = 0{,}818$
c) $P(21) = 0{,}3329$

1.15. 15)

n: cantidad de urnas.
k: cantidad de bolas.

$|\Omega|$: Cantidad de casos.

a) $\Omega = \{(x_1, x_2, ..., x_k), x_i \in \{1, 2, ..., n\}\}$
$|\Omega| = n^k$

Casos posibles: 20^{17}

$P(17 \text{ en } U_1) = \frac{1}{20^{17}}$

$P(U_1 = 10 \cap U_2 = 7) = \frac{\binom{17}{7}}{20^{17}}$

$P(U_1 = 5 \cap U_2 = 3 \cap U_3 = 9) = \frac{\binom{17}{5\ 3\ 9}}{20^{17}}$

$P(\text{ no en las últimas 3 }) = \frac{17^{17}}{20^{17}}$

b) $\Omega = \{(x_1, x_2, ..., x_k), x_i \in \{0, 1\} / \sum x_i = n - 1\}$
$|\Omega| = \binom{k+n-1}{k}$

Casos posibles: $\binom{17+20-1}{17} = \binom{36}{17}$

$P(17 \text{ en } U_1) = \frac{1}{\binom{36}{17}}$

$P(U_1 = 10 \cap U_2 = 7) = \frac{1}{\binom{36}{17}}$

$P(U_1 = 5 \cap U_2 = 3 \cap U_3 = 9) = \frac{1}{\binom{36}{17}}$

$P(\text{ no en las últimas 3 }) = \frac{\binom{33}{17}}{\binom{36}{17}}$

c) $\Omega = \{(x_1, x_2, ..., x_n), x_i \in \{0, 1\} / \sum x_i = k\}$
$|\Omega| = \binom{n}{k}$

Casos posibles: $\binom{20}{17}$

$P(17 \text{ en } U_1) = \frac{1}{\binom{20}{17}}$

$P(U_1 = 10 \cap U_2 = 7) = \frac{1}{\binom{36}{17}}$

$P(U_1 = 5 \cap U_2 = 3 \cap U_3 = 9) = \frac{1}{\binom{36}{17}}$

$P(\text{ no en las últimas 3 }) = \frac{\binom{17}{17}}{\binom{36}{17}}$

1.16. 16)

1.17. 17)

1.18. 18)

a) Solo se cumple si sale 6. La probabilidad vale $\frac{1}{6}$

b) Si el primer tiro sale 4 cualquier sea el segundo valor no se va a cumplir, ahi tenemos 6 posibilidades. Si el primero sale 5 solo se cumple con el 6, es decir, 5 posibilidades de que no se cumpla y una de que si, y lo mismo si sale 6 en la primera. Es decir, tenemos 18 casos totales, 3 de los cuales cumplen la condicion: $\frac{3}{18}$

c) No se cumple en ningun caso. La probabilidad es 0.

d) La suma es mayor a 9 en las combinaciones $\{5,5;6,6;5,6;6,5\}$ y es mayor a 10 en solo 2 de ellas. La probabilidad es $\frac{2}{4}$

e) El modulo es uno en las combinaciones $\{1,2;1,3;1,4;1,5;1,6;2,3;2,4;2,5;2,6;3,4;3,5;3,6;4,5;4,6$ $5,6\}$. De estas combinaciones solo se cumple la suma mayor a 10 en $\{5,6\}$. La probabilidad es $\frac{1}{15}$

1.19. 19)

a) $P(\overline{A}\big|_B) = \frac{P(\overline{A}\cap B)}{P(B)} = \frac{0{,}14}{0{,}25} = 0{,}56$

b) $P(A\big|_C) = \frac{P(C\cap A)}{P(C)} = \frac{0{,}05}{0{,}28} = \frac{5}{28} = 0{,}1786$

c) $P(B\cap C) = P(B\cap C\cap A) + P(B\cap C\cap \overline{A}) \Rightarrow P(B\cap C\cap \overline{A}) = 0{,}06$
$P(\overline{A}\cap B) = P(\overline{A}\cap B\cap C) + P(\overline{A}\cap B\cap \overline{C}) \Rightarrow P(\overline{A}\cap B\cap \overline{C}) = 0{,}08$
$P(A) = P(A\cap C) + P(A\cap \overline{C}) \Rightarrow P(A\cap \overline{C}) = 0{,}17$
$P(\overline{C}) = P(\overline{C}\cap A) + P(\overline{C}\cap \overline{A}) \Rightarrow P(\overline{C}\cap \overline{A}) = 0{,}55$
$P(B\big|_{\overline{A}\cap\overline{C}}) = \frac{P(B\cap\overline{A}\cap\overline{C})}{P(\overline{A}\cap\overline{C})} = \frac{0{,}08}{0{,}55} = \frac{8}{55} = 0{,}145$

d) $P(\overline{A}\cap\overline{B}\cap C\big|_C) = \frac{P(\overline{A}\cap\overline{B}\cap C)}{P(C)} = \frac{0{,}17}{0{,}28} = \frac{17}{28} = 0{,}607$

e) $P(A) = P(A\cap B) + P(A\cap\overline{B}) \Rightarrow P(A\cap\overline{B}) = 0{,}11$
$P(A\cap\overline{B}) = P(A\cap\overline{B}\cap C) + P(A\cap\overline{B}\cap\overline{C}) \Rightarrow P(A\cap\overline{B}\cap\overline{C}) = 0{,}07$
$P(A\big|_{(A\cap\overline{B}\cap\overline{C})\cup(\overline{A}\cap B\cap\overline{C})\cup(\overline{A}\cap\overline{B}\cap C)}) = \frac{P(A\cap((A\cap\overline{B}\cap\overline{C})\cup(\overline{A}\cap B\cap\overline{C})\cup(\overline{A}\cap\overline{B}\cap C)))}{P((A\cap\overline{B}\cap\overline{C})\cup(\overline{A}\cap B\cap\overline{C})\cup(\overline{A}\cap\overline{B}\cap C))} = \frac{P(A\cap\overline{B}\cap\overline{C})}{P(A\cap\overline{B}\cap\overline{C})+P(\overline{A}\cap B\cap\overline{C})+P(\overline{A}\cap\overline{B}\cap C)} =$
$\frac{0{,}07}{0{,}07+0{,}08+0{,}17} = 0{,}21875$

f) $P(A\cap B) = P(A\cap B\cap C) + P(A\cap B\cap\overline{C}) \Rightarrow P(A\cap B\cap\overline{C}) = 0{,}10$
$P((A\cap C)\big|_{(A\cap B\cap\overline{C})\cup(A\cap\overline{B}\cap C)\cup(\overline{A}\cap B\cap C)}) = \frac{P((A\cap C)\cap((A\cap B\cap\overline{C})\cup(A\cap\overline{B}\cap C)\cup(\overline{A}\cap B\cap C)))}{P((A\cap B\cap\overline{C})\cup(A\cap\overline{B}\cap C)\cup(\overline{A}\cap B\cap C))} =$

$= \frac{P(A\cap C\cap\overline{B})}{P(A\cap B\cap\overline{C})+P(A\cap\overline{B}\cap C)+P(\overline{A}\cap B\cap C))} = \frac{0{,}04}{0{,}1+0{,}04+0{,}06} = \frac{1}{5} = 0{,}2$

1.20. 20)

a) Los posibles caminos para llegar al kiosko Q son: I,I,I,I,A; I,I,I,A,I; I,I,A,I,I; I,A,I,I,I; A,I,I,I,I siendo I:Izquierda y A:abajo, la cantidad de caminos se puede calcular con combinatorias como $\binom{5}{1}$ o, lo que es lo mismo $\binom{5}{4}$, de la misma forma se calculan la cantidad de caminos posibles desde Q hasta P: $\binom{9}{3}$. La cantidad de caminos total es $\binom{14}{4}$. Por cada camino para llegar desde H a Q tenemos $\binom{9}{3}$ desde Q hasta P.

a) La probabilidad de pasar por Q es $\frac{\binom{5}{4}\binom{9}{3}}{\binom{14}{4}} = 0{,}41958$

b) La cantidad de caminos desde Q hasta C es $\binom{5}{3}$, y desde H hasta C es $\binom{10}{3}$ asi que la probabilidad de haber pasado por Q es $\frac{\binom{5}{1}\binom{5}{3}}{\binom{10}{3}} = \frac{5}{12} = 0{,}4166$

1.21. 21)

a) La cantidad de formas que puedo recibir 3 cartas de un mismo palo, sin importar su orden, son $\binom{10}{3}$, y la cantidad de formas que puedo recibir 3 cartas de un mazo son $\binom{40}{3}$. La probabilidad es $4\cdot\frac{\binom{10}{3}}{\binom{40}{3}} = \frac{12}{247} = 0{,}0486$

c) Lo mismo que Rodriguez.

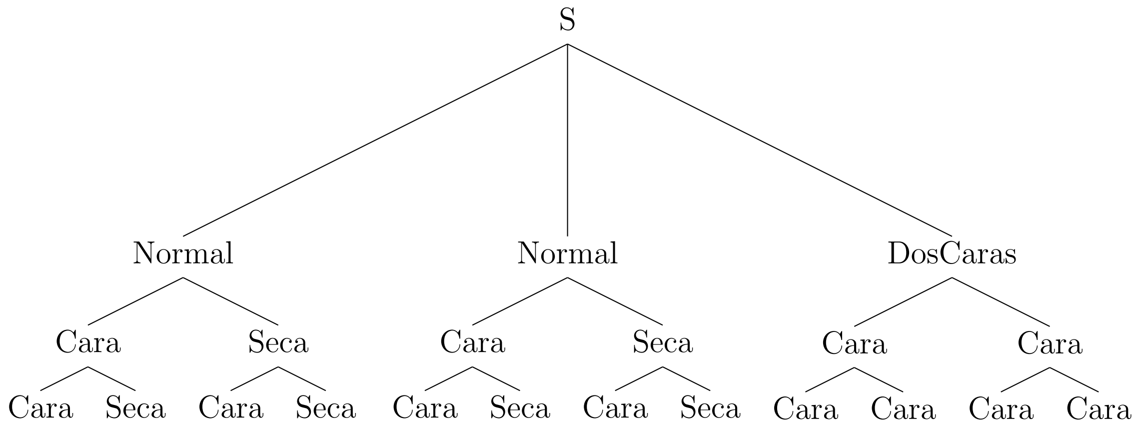
d) $P(R_{oF}\big|_{R_{iF}}) = \frac{3\cdot\binom{10}{3}+\binom{7}{3}}{\binom{37}{3}} = \frac{79}{1554} = 0{,}05083$
$P(R_{oF}\cap R_{iF}) = P(R_{oF}\big|_{R_{iF}})\cdot P(R_{iF}) = \frac{79}{1554}\cdot\frac{12}{247} = 0{,}00247$
e) $P(R_{oF}\big|_{R_{iF}}) > P(R_{oF})$

1.22. 22)

a) Para que la urna contenga 2 verdes y 3 rojas va a haber que sacar una verde y una roja. Tenemos como situacion inicial $P(R) = \frac{2}{3}$ y $P(\overline{R}) = \frac{1}{3}$ siendo $\overline{R}$ la bola verde. Si sacamos la verde pasamos a tener $P(R_{\overline{R}}) = \frac{1}{2}$ y $P(\overline{R_{\overline{R}}}) = \frac{1}{2}$ y si sacamos una roja tendriamos $P(R_R) = \frac{3}{4}$ y $P(\overline{R_R}) = \frac{1}{4}$. Entonces la probabilidad total es $P(\overline{R}) \cdot P(R_{\overline{R}}) + P(R) \cdot P(\overline{R_R}) = \frac{1}{3}$

b) $P(3Verdes2Rojas\big|_R) = \frac{P(3Verdes2Rojas)}{P(R)} = \frac{1/3}{2/3} = \frac{1}{2}$

1.23. 23)



a) Se pueden contar los casos y se ve que si la primer tirada salio cara la probabilidad de que en la segunda salga cara es $\frac{6}{8} = \frac{3}{4}$

b) La probabilidad de que salga cara en la primera tirada es $P(C_1) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$. La probabilidad de que se elija una moneda normal y salga cara es $P(N \cap C_1) = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$ ya que $P(N) = \frac{1}{3}$. Por lo tanto $P(N\big|_{C_1}) = \frac{P(N \cap C_1)}{P(C_1)} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{2}$

c) La probabilidad de que salga cara en la primera y segunda tirada es $P(C_1 \cap C_2) = P(C_2\big|_{C_1}) \cdot P(C_1) = \frac{6}{8} \cdot \frac{4}{6} = \frac{1}{2}$ Siendo $P(C_2\big|_{C_1})$ la probabilidad de que haya salido cara en la segunda tirada siempre y cuando salio en la primera, se calcula contando la cantidad de caras en la segunda tirada, sin contar las ramas en donde salio seca de la primer tirada, y luego dividiendo por el total de casos de la segunda tirada (solo de las ramas de cara de la primer tirada).
$P(N \cap (C_1 \cap C_2)) = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$
$P(N\big|_{C_1 \cap C_2}) = \frac{P(N \cap (C_1 \cap C_2))}{P(C_1 \cap C_2)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$

d) $P(C_1 \cap C_2 \cap C_3) = P(C_3\big|_{C_1 \cap C_2}) \cdot P(C_2\big|_{C1}) \cdot P(C_1) = \frac{10}{12} \cdot \frac{6}{8} \cdot \frac{4}{6} = \frac{5}{12}$
$P(N \cap (C_1 \cap C_2 \cap C_3)) = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{12}$
$P(N\big|_{C_1 \cap C_2 \cap C_3}) = \frac{P(N \cap (C_1 \cap C_2 \cap C_3))}{P(C_1 \cap C_2 \cap C_3)} = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{5}{12}} = \frac{1}{5}$

1.24. 24)

$P(E1) = 0{,}4 \Rightarrow P(E0) = 1 - P(E1) = 0{,}6$
$P(R0\big|_{E0}) = 0{,}9 \Rightarrow P(R1\big|_{E0}) = 1 - P(R0\big|_{E0}) = 0{,}1$
$P(R1\big|_{E1}) = 0{,}95 \Rightarrow P(R0\big|_{E1}) = 1 - P(R1\big|_{E1}) = 0{,}05$

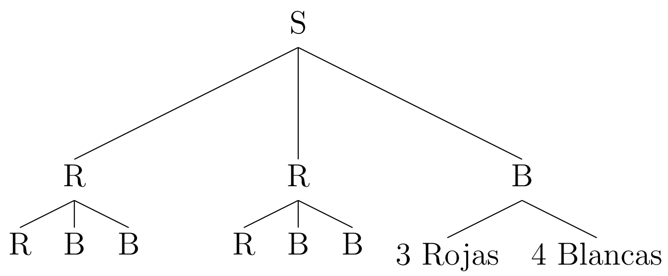
a) Para que se reciba un 1 puede haberse emitido un 1 y recibido un 1 o emitido un 0 y recibido un 1. La probabilidad entonces es $P(R1) = P(E1) \cdot P(R1\big|_{E1}) + P(E0) \cdot P(R1\big|_{E0}) = \frac{11}{25} = 0{,}44$
b) Lo calculamos con Bayes: $P(E1\big|_{R1}) = \frac{P(R1|_{E1}) \cdot P(E1)}{P(R1)} = \frac{0{,}95 \cdot 0{,}4}{0{,}44} = \frac{19}{22} = 0{,}8636$

1.25. 25)

$P(E0) = 0{,}01 \Rightarrow P(E1) = 0{,}99$
$P(R0\big|_{E0}) = 0{,}91$
$P(E0\big|_{R0}) = 0{,}99$

$P(R0\big|_{E0}) = \frac{P(E0|_{R0}) \cdot P(R0)}{P(E0)} \Rightarrow P(R0) = \frac{91}{9900}$
$P(R0) = P(E0) \cdot P(R0\big|_{E0}) + P(E1) \cdot P(R0\big|_{E1}) \Rightarrow P(R0\big|_{E1}) = \frac{91}{980100}$
$P(R1\big|_{E1}) = 1 - P(R0\big|_{E1}) \Rightarrow P(R0\big|_{E1}) = 0{,}9999$

1.26. 26)



a) En la urna a hay 2 bolas rojas y 1 bola blanca, por lo tanto tenemos que $P(B_1) = \frac{1}{3}$

b) $P(B_2) = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{7} = \frac{40}{63} = 0{,}6349$

c) $P(B_1\big|_{R_2}) = \frac{P(R_2|_{B_1}) \cdot P(B_1)}{P(R_2)} = \frac{13}{35}$

d) $P(R) = P(R_1) + P(R_2\big|_{B_1}) \cdot P(B_1) = \frac{17}{21}$

1.27. 27)

a) $P(CH) = \frac{12}{24}$
$P(QP) = \frac{12}{24}$
$P(CH \cap QP) = \frac{6}{24} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

b) $P(CH) = \frac{6}{24}$
$P(QP) = \frac{6}{24}$
$P(CH \cap QP) = \frac{2}{24} \neq \frac{6}{24} \cdot \frac{6}{24}$

1.28. 28)

a) $P(1_1) = 0{,}1$
$P(2_2) = 0{,}1$
$P(1_1 \cap 2_2) = 0{,}01 = 0{,}1 \cdot 0{,}1$

b) $P(1_1) = 0{,}1$
$P(\overline{2_2}) = 0{,}9$
$P(1_1 \cap \overline{2_2}) = 0{,}09 = 0{,}1 \cdot 0{,}9$

2. Guia 2

2.1. 1)

a)

$$F_x(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{1}{16} & 0 \leq x < 1 \\ \frac{5}{16} & 1 \leq x < 2 \\ \frac{11}{16} & 2 \leq x < 3 \\ \frac{15}{16} & 3 \leq x < 4 \\ 1 & 4 \leq x \end{cases}$$

$P(0{,}25 < x \leq 0{,}5) = F(0{,}5) - F(0{,}25)$

$P(2 < x \leq 4) = F(4) - F(2)$

$P(2 \leq x \leq 4) = F(4) - F(1) = F(4) - F(2) + P(X = 2) = P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4)$

b)

$$F_x(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x^3 & 0 \leq x < 1 \\ 1 & 1 \leq x \end{cases}$$

$P(0{,}25 < x \leq 0{,}5) = F(0{,}5) - F(0{,}25)$
$P(0{,}25 \leq x \leq 0{,}5) = F(0{,}5) - F(0{,}25) + P(X = 0{,}25)$

c)

$$F_x(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ x^3 & 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} \leq x \end{cases}$$

$P(0{,}25 < x \leq 0{,}5) = F(0{,}5) - F(0{,}25)$
$P(0{,}25 \leq x \leq 0{,}5) = F(0{,}5) - F(0{,}25) + P(X = 0{,}25)$

2.2. 2)

a) Concentra masa positiva en $X = -2$ y $X = 2$, donde $P(X = -2) = P(X = 2) = \frac{1}{3}$
b) $P(-2 < X \leq 2) = F(2) - F(-2) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$
$P(-2 \leq X \leq 2) = F(2) - F(-2) + P(X = -2) = 1$ Ya que son todos los valores
$P(-2 \leq X < 2) = F(X = 1) - F(X = -2) + P(X = -2) = \frac{2}{3}$
$P(-2 < X < 2) = F(X = 1) - F(X = -2) = \frac{1}{3}$

c) $P(X \in (-2, -1)) = P(-2 < X < -1) = 0$
$P(|X| \leq 1) = P(-1 \leq X \leq 1) = F(X = 1) - F(X = -1) = \frac{1}{3}$
$P(X \in (1, 2)) = 0$

d) $P(X \leq 1{,}5|X < 2) = \frac{P(X \leq 1{,}5)}{P(X<2)} = \frac{2/3}{2/3} = 1$
$P(X \leq 1{,}5|X \leq 2) = \frac{P(X \leq 1{,}5)}{P(X \leq 2)} = \frac{2/3}{1} = \frac{2}{3}$

e) $P(X = -2||X| = 2) = \frac{P(X=-2)}{P(X=-2 \cup X=2)} = \frac{1/3}{1/3+1/3} = \frac{1}{2}$

2.3. 3)

$$F_x(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \frac{x}{8} & 0 \leq x < 2 \\ \frac{x^2}{16} & 2 \leq x < 4 \\ 1 & 4 \leq x \end{cases}$$

a) $F(a) = 0 \forall a \leq 0$

b) $\frac{x}{8} = 0{,}1 \Rightarrow x = 0{,}8 \Rightarrow F(0{,}8) = 0{,}1$
$\frac{x^2}{16} = 0{,}1 \Rightarrow x = \pm 1{,}26$ No cumple ya que ese valor de x no corresponde al tramo donde es valida la función.

c) $\frac{x}{8} = 0{,}25 \Rightarrow x = 2$ No cumple ya que esa funcion solo es valida para $0 \leq x < 2$
$\frac{x^2}{16} = 0{,}25 \Rightarrow x = \pm 2 \Rightarrow F(2) = 0{,}25$

d) $\frac{x}{8} = 0{,}5 \Rightarrow x = 4$ No cumple.
$\frac{x^2}{16} = 0{,}5 \Rightarrow x = \pm 2\sqrt{2} \Rightarrow F(2\sqrt{2}) = 0{,}5$

e) $\frac{x}{8} = 1 \Rightarrow x = 8$ No cumple.
$\frac{x^2}{16} = 1 \Rightarrow x = \pm 4 \Rightarrow F(4) = 1$

2.4. 4)

2.5. 5)

$$f_x(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{1}{3}(4x+1) & 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & 1 < x \end{cases}$$

a) $\int \frac{1}{3}(4x+1)dx = \frac{1}{3}(2x^2 + x)$

$$F_x(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{2x^2+x}{3} & 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & 1 < x \end{cases}$$

b) $P(\frac{1}{3} < X \leq \frac{2}{3}) = F(X = \frac{2}{3}) - F(X = \frac{1}{3}) = \frac{14}{27} - \frac{5}{27} = \frac{9}{27} = \frac{1}{3}$
$P(\frac{1}{3} < X \leq \frac{2}{3} | X < \frac{1}{2}) = \frac{P(\frac{1}{3} < X \leq \frac{1}{2})}{P(X < \frac{1}{2})} = \frac{\frac{1}{3} - \frac{5}{27}}{\frac{1}{3}} = \frac{4}{9}$

c) $\frac{2x^2+x}{3} = 0{,}04 \Rightarrow x = \frac{1}{10}$

2.6. 6)

2.7. 7)

2.8. 8)

a)
X = Cant de blancas en 5 extracciones con reposicion.
$R_x = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

$P(X = 0) = P(N_1 \cap N_2 \cap ... \cap N_5) = P(N)^5 = \left(\frac{4}{7}\right)^5$
$P(X = 1) = 5 \cdot P(B) \cdot P(N)^4 = 5 \cdot \frac{3}{7} \cdot \left(\frac{4}{7}\right)^4$
$P(X = 2) = \binom{5}{2} \cdot \left(\frac{3}{7}\right)^2 \cdot \left(\frac{4}{7}\right)^3$
$P(X = 3) = \binom{5}{3} \cdot \left(\frac{3}{7}\right)^3 \cdot \left(\frac{4}{7}\right)^2$
$P(X = 4) = \binom{5}{4} \cdot \left(\frac{3}{7}\right)^4 \cdot \frac{4}{7}$
$P(X = 5) = \left(\frac{3}{7}\right)^5$

x	P(X=x)
0	0.0609
1	0.2285
2	0.3427
3	0.2570
4	0.0964
5	0.0145

b) Y = Cant de blancas en 5 extracciones sin reposicion.
$R_Y = \{1, 2, 3\}$

$P(Y = 1) = \frac{\binom{3}{1}\binom{4}{4}}{\binom{7}{5}} = \frac{1}{7}$ Siendo el numerador la cantidad de formas posibles de sacar una blanca por la cantidad de formas posibles de sacar las 4 negras y el denominador la cantidad de formas posibles de sacar 5 bolas de 7.

$P(Y = 2) = \frac{\binom{3}{2}\binom{4}{3}}{\binom{7}{5}} = \frac{4}{7}$
$P(Y = 3) = \frac{\binom{3}{3}\binom{4}{2}}{\binom{7}{5}} = \frac{2}{7}$

y	P(Y=y)
1	1/7
2	4/7
3	2/7

2.9. 9)

a) $P(N=n) = \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \cdot \frac{3}{4}$ Es fácil de ver construyendo un arbol.

b) $P(Nimpar) = P(N_1 \cap N_3 \cap N_5 \cap ... \cap N_n \cap ...) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^{2(n-1)} \cdot \frac{3}{4} = \frac{4}{5}$

2.10. 10)

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{2\theta x+1}{2} & -1 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{En otro caso} \end{cases}$$

a) La densidad esta bien definida si $f_X(x)$ esta entre 0 y 1.

$0 < \frac{2\theta x+1}{2} < 1$ Reemplazo primero con $x = -1$

$0 < \frac{-2\theta+1}{2} < 1$
$-\frac{1}{2} < \theta < \frac{1}{2}$

Reemplazo ahora con $x = 1$

$0 < \frac{2\theta+1}{2} < 1$
$-\frac{1}{2} < \theta < \frac{1}{2}$

La intersección de las condiciones es la misma asi que la funcion esta bien definida para: $-\frac{1}{2} < \theta < \frac{1}{2}$

b) La mediana es el valor de x para el cual la funcion de distribución acumulo 0,5 de probabilidad. Calculamos la funcion de distribución:

$\int_{-1}^{x_\alpha} \frac{2\theta x+1}{2} dx = \left[\frac{\theta x^2+x}{2}\right]\Big|_{-1}^{x_\alpha} = \frac{\theta x_\alpha^2+x_\alpha}{2} - \frac{\theta-1}{2}$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < -1 \\ \frac{\theta x^2+x}{2} - \frac{\theta-1}{2} & -1 \leq x \leq 1 \\ 1 & 1 < x \end{cases}$$

Si te preguntas porque integre con los limites, acordate que la función de distribución es la acumulación de probabilidad, esta función vale distinto de 0 desde -1 asi que por eso puse ese limite inferior. Con los ejercicios anteriores no hacia falta ya que la función valia distinto de 0 desde 0, y en ese punto la integral tambien resultaba valer 0, por lo que el segundo término de Barrow se terminaba yendo.
Calculamos lo que pide:

$\theta = -1/2$

$\frac{-\frac{x^2}{2}+x}{2} + \frac{3}{4} = 0{,}5$
$-\frac{x^2}{2} + x + \frac{1}{2} = 0$
$x_1 = 2,4142$
$x_2 = -0{,}4142$ Esta solucion es la valida ya que se encuentra dentro del rango en que vale la función

$\theta = 0$

$\frac{x}{2} + \frac{1}{2} = 0{,}5 \Rightarrow x = 0$

$\theta = 1/4$

$\frac{\frac{x^2}{4}+x}{2} + \frac{3}{8} = 0{,}5$
$\frac{x^2}{4} + x - \frac{1}{4} = 0$
$x_1 = 0{,}236$ Esta es la solución valida
$x_2 = -4{,}236$

c)
$\frac{\theta x^2+x}{2} - \frac{\theta-1}{2} = 0{,}5$
$\frac{\theta x^2}{2} + \frac{x}{2} - \frac{\theta}{2} = 0$
$\theta x^2 + x - \theta = 0 \Rightarrow x = \frac{-1\pm\sqrt{1+4\theta^2}}{2\theta}$

d) $P(X < 1) = F(X = 1) = \frac{\theta+1}{2} - \frac{\theta-1}{2} = 1$

$P(0 < X \leq 1) = F(X = 1) - F(X = 0) = 1 + \frac{\theta-1}{2} = \frac{\theta+1}{2}$

$P(X < 0| - 1/2 < X < 1/2) = \frac{P(-1/2<X<0)}{P(-1/2<X<1/2)} = \frac{F(X=0)-F(X=-1/2)}{F(X=1/2)-F(X=-1/2)} = \frac{-\frac{\theta-1}{2} - \frac{-3\theta+2}{8}}{\frac{-3\theta+6}{8} - \frac{-3\theta+2}{8}} = \frac{\frac{-\theta+2}{8}}{\frac{1}{2}} = -\frac{\theta}{4} + \frac{1}{2}$

2.11. 11)

$X \sim \mho(2,10)$

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 2 \\ 1/8 & 2 < x < 10 \\ 0 & 10 \leq x \end{cases}$$

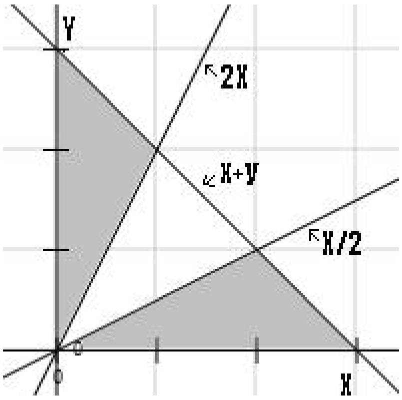
Calculo las raices del polinomio $X^2 - 12X + 35$

$X = \frac{12 \pm \sqrt{12^2 - 4 \cdot 1 \cdot 35}}{2 \cdot 1} \Rightarrow \begin{array}{l} X_1 = 7 \\ X_2 = 5 \end{array}$

$P(X^2 - 12X + 35) = P(X < 5 \cup X > 7) = P(X < 5) + P(X > 7) = \frac{3}{8} + \frac{3}{8} = \frac{3}{4}$

2.12. 12)

Al partir la vara vamos a terminar con dos partes que deben sumar el tamaño total, lo podemos escribir como $X + Y = W$, con $W \sim U(0, L)$, se cumple lo que pide el enunciado cuando $2X < Y$ y, $2Y < X$, si graficamos todo llegamos a:



A simple vista se ve que el area a calcular es $\frac{2}{3}$

2.13. 13)

$$f_X(x) = \begin{cases} cx(20 - x) & 0 < x < 20 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

a) $f_{x|3<X<17}(x) = \frac{f_X(x)}{P(3<X<17)} = \frac{cx(20-x)}{\int_3^{17} cx(20-x)dx} = \frac{3x(20-x)}{3514}$ Para $3 < x < 17$, 0 en otro caso.

b) $f_{x|X<3\cup X>17}(x) = \frac{f_X(x)}{P(X<3\cup X>17)} = \frac{cx(20-x)}{\int_0^3 cx(20-x)dx + \int_{17}^{20} cx(20-x)dx} = \frac{x(20-x)}{162}$ Para $x < 3 \cup x > 17$, 0 en otro caso.

2.14. 14)

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{2}{7} & 0 \leq x < 2 \\ \frac{10-2x}{21} & 2 \leq x < 5 \\ 0 & \text{En otro caso} \end{cases}$$

a) $f_{x|X<3}(x) = \frac{f_X(x)}{P(X<3)} = \frac{f_X(x)}{\int_0^2 \frac{2}{7}dx + \int_2^5 \frac{10-2x}{21}dx} = \frac{f_X(x)}{\frac{17}{21}} \Rightarrow f_{x|X<3} = \begin{cases} \frac{2}{7} \cdot \frac{21}{17} & 0 \leq x < 2 \\ \frac{10-2x}{17} & 2 \leq x < 3 \\ 0 & \text{En otro caso} \end{cases}$

b) $f_{x|X>3}(x) = \frac{f_X(x)}{P(X>3)} = \frac{\frac{10-2x}{21}}{\int_3^5 \frac{10-2x}{21}dx} = \frac{10-2x}{4}$ Para $3 < x < 5$, 0 en otro caso.

2.15. 15)

2.16. 16)

$X = \{0, 1, 2, 3\}$
$Y = \{0, 1, 2\}$

$P(X = 1, Y = 0) = \frac{\binom{3}{1}\binom{2}{0}\binom{3}{3}}{\binom{8}{4}} = \frac{3}{70} = 0{,}04286$
$P(X = 2, Y = 0) = \frac{\binom{3}{2}\binom{2}{0}\binom{3}{2}}{\binom{8}{4}} = \frac{9}{70} = 0{,}1286$
$P(X = 3, Y = 0) = \frac{\binom{3}{3}\binom{2}{0}\binom{3}{1}}{\binom{8}{4}} = \frac{3}{70} = 0{,}04286$
$P(X = 1, Y = 1) = \frac{\binom{3}{1}\binom{2}{1}\binom{3}{2}}{\binom{8}{4}} = \frac{9}{35} = 0{,}2571$
$P(X = 2, Y = 1) = \frac{\binom{3}{2}\binom{2}{1}\binom{3}{1}}{\binom{8}{4}} = \frac{9}{35} = 0{,}2571$
$P(X = 3, Y = 1) = \frac{\binom{3}{3}\binom{2}{1}\binom{3}{0}}{\binom{8}{4}} = \frac{1}{35} = 0{,}02857$
$P(X = 1, Y = 2) = \frac{\binom{3}{1}\binom{2}{2}\binom{3}{1}}{\binom{8}{4}} = \frac{9}{70} = 0{,}1286$
$P(X = 2, Y = 2) = \frac{\binom{3}{2}\binom{2}{2}\binom{3}{0}}{\binom{8}{4}} = \frac{3}{70} = 0{,}04286$
$P(X = 0, Y = 1) = \frac{\binom{3}{0}\binom{2}{1}\binom{3}{3}}{\binom{8}{4}} = \frac{1}{35} = 0{,}02857$
$P(X = 0, Y = 2) = \frac{\binom{3}{0}\binom{2}{2}\binom{3}{2}}{\binom{8}{4}} = \frac{3}{70} = 0{,}04286$

$P(X + Y \leq 2) = P(X = 1, Y = 0) + P(X = 0, Y = 1) + P(X = 1, Y = 1) + P(X = 2, Y = 0) + P(X = 0, Y = 2) = \frac{3}{70} + \frac{1}{35} + \frac{9}{35} + \frac{9}{70} + \frac{3}{70} = \frac{1}{2}$

$P(X = 0) = P(X = 0, Y = 1) + P(X = 0, Y = 2) = \frac{1}{14} = 0{,}07143$

$P(X=1)=P(X=1,Y=0)+P(X=1,Y=1)+P(X=1,Y=2)=\frac{3}{7}=0{,}4286$
$P(X=2)=P(X=2,Y=0)+P(X=2,Y=1)+P(X=2,Y=2)=\frac{3}{7}=0{,}4286$
$P(X=3)=P(X=3,Y=0)+P(X=3,Y=1)=\frac{1}{14}=0{,}07143$

Idem para $P(Y=y)$

b) $P(X=0,Y=0)=\left(\frac{3}{8}\right)^4=\frac{81}{4096}=0{,}01976$
$P(X=1,Y=0)=\frac{4!}{1!\cdot 0!\cdot 3!}\cdot\left(\frac{3}{8}\right)^1\cdot\left(\frac{3}{8}\right)^3=\frac{81}{1024}=0{,}0791$
$P(X=2,Y=0)=\frac{4!}{2!\cdot 0!\cdot 2!}\cdot\left(\frac{3}{8}\right)^2\cdot\left(\frac{3}{8}\right)^2=\frac{243}{2048}=0{,}1187$
$P(X=3,Y=0)=\frac{4!}{3!\cdot 0!\cdot 1!}\cdot\left(\frac{3}{8}\right)^1\cdot\left(\frac{3}{8}\right)^3=\frac{81}{1024}=0{,}0791$
$P(X=4,Y=0)=\frac{4!}{4!\cdot 0!\cdot 0!}\cdot\left(\frac{3}{8}\right)^0\cdot\left(\frac{3}{8}\right)^4=\frac{81}{4096}=0{,}01976$
$P(X=1,Y=1)=\frac{4!}{1!\cdot 1!\cdot 2!}\cdot\left(\frac{3}{8}\right)^1\cdot\left(\frac{2}{8}\right)^1\cdot\left(\frac{3}{8}\right)^2=\frac{81}{512}=0{,}1582$
$P(X=2,Y=1)=\frac{4!}{2!\cdot 1!\cdot 1!}\cdot\left(\frac{3}{8}\right)^2\cdot\left(\frac{2}{8}\right)^1\cdot\left(\frac{3}{8}\right)^1=\frac{81}{512}=0{,}1582$
$P(X=3,Y=1)=\frac{4!}{3!\cdot 1!\cdot 0!}\cdot\left(\frac{3}{8}\right)^3\cdot\left(\frac{2}{8}\right)^1\cdot\left(\frac{3}{8}\right)^0=\frac{27}{512}=0{,}05273$
$P(X=1,Y=2)=\frac{4!}{1!\cdot 2!\cdot 1!}\cdot\left(\frac{3}{8}\right)^1\cdot\left(\frac{2}{8}\right)^2\cdot\left(\frac{3}{8}\right)^1=\frac{27}{256}=0{,}1055$
$P(X=2,Y=2)=\frac{4!}{2!\cdot 2!\cdot 0!}\cdot\left(\frac{3}{8}\right)^2\cdot\left(\frac{2}{8}\right)^2\cdot\left(\frac{3}{8}\right)^0=\frac{27}{512}=0{,}05273$
$P(X=0,Y=1)=\frac{4!}{0!\cdot 1!\cdot 3!}\cdot\left(\frac{3}{8}\right)^0\cdot\left(\frac{2}{8}\right)^1\cdot\left(\frac{3}{8}\right)^3=\frac{27}{512}=0{,}05273$
$P(X=0,Y=2)=\frac{4!}{0!\cdot 2!\cdot 2!}\cdot\left(\frac{3}{8}\right)^0\cdot\left(\frac{2}{8}\right)^2\cdot\left(\frac{3}{8}\right)^2=\frac{27}{512}=0{,}05273$

$P(X+Y\leq 2)=P(X=0,Y=0)+P(X=1,Y=0)+P(X=0,Y=1)+P(X=1,Y=1)+P(X=2,Y=0)+P(X=0,Y=2)=\frac{1971}{4096}=0{,}4812$
Las marginales se calculan como en sub-item anterior.

2.17. 17)

$\Lambda=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\leq 1, y\geq 0\}$

El area del semicirculo es $\frac{\pi\cdot 1^2}{2}=\frac{\pi}{2}$ Por lo tanto $f_{XY}(x,y)=\frac{2}{\pi}$

a) $2\cdot(\int_0^{\sqrt{2}/2}\int_0^x \frac{2}{\pi}dydx+\int_{\sqrt{2}/2}^1\int_0^{\sqrt{1-x^2}}\frac{2}{\pi}dydx)=1/2$

b) $f_y(y)=\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}\frac{2}{\pi}dx=\frac{4}{\pi}\sqrt{1-y^2}$ Para $0\leq y\leq 1$, 0 en otro caso.
$f_x(x)=\int_0^{\sqrt{1-x^2}}\frac{2}{\pi}dy=\frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2}$ Para $-1\leq x\leq 1$, 0 en otro caso.

2.18. 18)

$$f_{XY}(x,y)=\begin{cases} kxy & 0\leq x\leq y\leq 1\\ 0 & \text{en otro caso}\end{cases}$$

Primero despejamos k:

$1 = \int_0^1 \int_0^y kxy \cdot dxdy = \frac{k}{8} \Rightarrow k = 8$

a) $P(X+1 > 2Y) = P(Y < \frac{X+1}{2}) = \int_0^1 \int_x^{\frac{x+1}{2}} 8xy \cdot dydx = \frac{5}{12} = 0{,}4166$

b) $f_X(x) = \int_x^1 8xy \cdot dy = 4x - 4x^3$ Para $0 \leq y \leq 1$, 0 en otro caso.
$f_Y(y) = \int_0^y 8xy \cdot dx = 4y^3$ Para $0 \leq x \leq 1$, 0 en otro caso.

2.19. 19)

J: Hora de llegada de Juan
C: hora de llegada de Carlos

$J \sim \mho(0,15)min \Rightarrow f(j) = \frac{1}{15}$
$C \sim \mho(5,20)min \Rightarrow f(c) = \frac{1}{15}$

$f(j,c) = f(j) \cdot f(c) = \frac{1}{15} \cdot \frac{1}{15} = \frac{1}{225}$ Para $0 < j < 15$ y $5 < c < 20$

$P(encuentro) = \frac{15^2 - 5^2}{225} = \frac{8}{9}$

2.20. 20)

$A \sim U(0,1)$
$B \sim U(0,1)$
$C \sim U(0,1)$

a) Calculo las raices de $Ax^2 + Bx + (A+B) = 0$

El termino de la raiz de la ecuación de Bascara es: $B^2 - 4A(A+B) = B^2 - 4A^2 - 4AB$
Pedimos que sea mayor a 0 para que sea una raiz real y despejamos.

$$|B - 2A| \geq \sqrt{8}A = \begin{cases} B - 2A \leq -\sqrt{8}A \Rightarrow B \leq A(2 - \sqrt{8}) \\ B - 2A \geq \sqrt{8}A \Rightarrow B \geq A(\sqrt{8} + 2) \end{cases}$$

La primer ecuación no aporta nada, dice que B debe ser menor a un numero negativo, ya que B esta definido de 0 a 1 lo ignoramos. La segunda marca el area que debemos integrar, resulta ser un triangulo que corta a $B = 1$ en $1 = A(\sqrt{8} + 2) \Rightarrow A = \frac{1}{2+\sqrt{8}}$ El area resultante es $1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2+\sqrt{8}} = 0{,}1035$
$P(B^2 - 4A(A+B) \geq 0) = 0{,}1035$

b) La ecuación ahora es: $Ax^2 + 2Bx + C = 0$

El termino de la raiz de la ecuación de Bascara es: $4B^2 - 4AC < 0$
Pedimos que sea menor a 0 para que no sea una raiz real y despejamos.

$$|B| < AC = \begin{cases} B < \sqrt{AC} \\ B > -\sqrt{AC} \end{cases}$$

Aca a los que les gusta graficar para integrar se les complica, si quieren hacerlo para orientarse van a tener que hacer proyecciones, recomiendo sobre a y c ya que queda bastante comodo en este caso. Pero en resumen, se ve que B esta encerrado entre las raices $-\sqrt{AC}$y, $\sqrt{AC}$, pero como B no puede ser negativo solamente esta encerrado entre el 0 y la raiz del limite superior, A y C no tienen restricciones, integro:

$P(4B^2 - 4AC < 0) = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^{\sqrt{ac}} \cdot db \cdot da \cdot dc = \frac{4}{9}$

2.21. 20)

T: Tiempo de salida.
V: Tiempo de viaje.

$T \sim U(0,20)$
$V \sim U(20, 40)$

$f(v, t) = \frac{1}{400}$

El tiempo minimo que puede tardar en tomar el tren es $T_1 = 42$, el maximo $T_2 = 56$

a) Al hacer el dibujo vemos que queda un triangulo en la esquina superior derecha.
$P(T + V > T_2) = P(V < 56 - T) = 4 \cdot 4\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{400} = \frac{1}{50}$

b) Para este punto se recomienda ver bien el grafico para entender que areas se estan calculando.
$P(T + V < T_1 - 8 \cap 42 < T + V < 48) = P(T + V < 34) + P(42 < T + V < 48) = \frac{14^2}{2} \cdot \frac{1}{400} + (\frac{18^2}{2} - \frac{12^2}{2}) = \frac{47}{100}$

c) $P(T + V < 56 | T > 8 \cap T + V > 42) = \frac{P(T>8 \cap 42<T+V<56)}{P(T>8 \cap T+V>42)} = \frac{\frac{136}{400}}{\frac{144}{400}} = \frac{17}{18}$

d) $f_{V|T>8\cap 42<T+V<56}(v) = \frac{f(v,t)}{P(T>8\cap 42<V+T<56)} = \frac{1}{136}$

$$f_V(v) = \begin{cases} \int_{42-v}^{20} \frac{1}{136} dt = \frac{v-22}{136} & 22 \leq v < 34 \\ \int_{8}^{20} \frac{1}{136} dt = \frac{12}{136} & 34 \leq v < 36 \\ \int_{8}^{56-v} \frac{1}{136} dt = \frac{48-v}{136} & 36 \leq v < 42 \end{cases}$$

3. Guia 3

3.1. 1)

a) $E[X] = x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 = 1{,}1$

b) $E[X] = x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3$
$E[X] - x_1p_1 - x_2p_2 = x_3p_3 = 0$ Sabemos tambien que $p_1 + p_2 + p_3 = 1 \Rightarrow p_3 = 0{,}6$
Por lo tanto:
$x_3p_3 = 0 \Rightarrow x_3 = 0$

c) $E[X|X > -1] = \frac{x_2p_2+x_3p_3}{p_2+p_3} = \frac{13}{8} = 1{,}625$ Se divide por $p_2 + p_3$ ya que al quitar un elemento se necesitan truncar los otros.

d) $E[X] = x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3$
$E[X|X > -1] = \frac{x_2p_2+x_3p_3}{p_2+p_3}$ Sabemos que $P(X > -1) = p_2+p_3 = 0{,}8 \Rightarrow x_2p_2+x_3p_3 = 3{\cdot}0{,}8 = 2{,}4$
$E[X] = -0{,}2 + 2{,}4 = 2{,}2$

3.2. 2)

a) $E[X] = \int_0^1 2x \cdot x \cdot dx = \frac{2}{3}$

b) Al decir que la funcion de densidad es proporcional a $\frac{1}{(1+x)^3}$ quiere decir que $f_X(x) = k \cdot \frac{1}{(1+x)^3}$ siendo k la constante de proporcionalidad. Como sabemos que la integral de la funcion de densidad debe ser 1 podemos despejar esa constante.
$\int_0^\infty k \cdot \frac{1}{(1+x)^3} = 1 \Rightarrow k = 2$
$E[X] = \int_0^\infty \frac{2x}{(x+1)^3} dx = 1$

c) $f_{X|X>1/2}(x) = \frac{f_X(x)}{\int_{1/2}^1 2x \cdot dx} = \frac{8x}{3}$
$E[X|X > 1/2] = \int_{1/2}^1 x \cdot \frac{8x}{3} \cdot dx = \frac{7}{9}$

d) $E[X] = \int_{-\infty}^7 x f_X(x)dx + \int_7^\infty x f_X(x)dx$
$P(X < 7) = 0{,}2 \Rightarrow P(X > 7) = 0{,}8$
$f_{X|X<7}(x) = \frac{f_X(x)}{P(X<7)}$
$f_{X|X>7}(x) = \frac{f_X(x)}{P(X>7)}$
$E[X|X < 7] = \int_{-\infty}^7 x f_{X|X<7}(x)dx \Rightarrow E[X|X < 7] = \int_{-\infty}^7 x \frac{f_X(x)}{P(X<7)} dx$ De aca obtenemos:
$E[X|X < 7] \cdot P(X < 7) = \int_{-\infty}^7 x f_X(x)$
$E[X|X > 7] \cdot P(X > 7) = \int_7^\infty x f_X(x)$ Y reemplazamos en la inicial:
$E[X] = E[X|X < 7] \cdot P(X < 7) + E[X|X > 7] \cdot P(X > 7) = 7{,}2$

3.3. 3)

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & x < -1 \\ \frac{2\theta x+1}{2} & -1 \leq x \leq 1 \\ 1 & 1 < x \end{cases}$$

$E[X] = \int_{-1}^{1} x \frac{2\theta x+1}{2} dx = \frac{2\theta}{3}$

3.4. 4)

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{x^2}{3} & 0 \leq x < 1 \\ \frac{x+1}{3} & 1 \leq x < 2 \\ 1 & 2 \leq x \end{cases}$$

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{2x}{3} & 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{3} & 1 \leq x < 2 \\ 0 & \text{En otro caso} \end{cases}$$

$P(X = 1) = \frac{1}{3}$

a) $E[X] = \int_0^1 x \cdot \frac{2x}{3} \cdot dx + \int_1^2 x \cdot \frac{1}{3} \cdot dx + 1 \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{9} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{19}{18}$

b) $f_{X|X<1} = \frac{f_X(x)}{\int_0^1 \frac{2x}{3} dx} = 2x$ Valido en $0 \leq x < 1$, 0 en otra parte.
$E[X|X < 1] = \int_0^1 x \cdot 2x \cdot dx = \frac{2}{3}$

$P(X|_{X\leq 1} = 1) = \frac{P(X=1)}{P(X\leq 1)} = \frac{1/3}{2/3} = \frac{1}{2}$
$E[X|X \leq 1] = \int_0^1 x \cdot x \cdot dx + 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$

c) $f_{X|X>1} = \frac{f_X(x)}{\int_1^2 \frac{1}{3} dx} = 1$ Para $1 < x < 2$, 0 en otro caso.

3.5. 5)

a) Para que la varianza sea maxima tenemos que hacer que los puntos más alejados tengan maxima probabilidad, con la restriccion $p_1+p_2+p_3 = 1$ llegamos a que $p_1 = p_3 = 0,5 \rightarrow p_2 = 0$

b) Caso contrario al anterior, buscamos que toda la probabilida este en un solo punto. $p_2 = 1 \rightarrow p_1 = p_3 = 0$

3.6. 6)

a) $L \sim Exp(\lambda) \Rightarrow f_X(X) = \lambda e^{-\lambda x}$

$E[X] = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda x} = 60$
$E[X] = \frac{1}{\lambda} = 60 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{60}$

$E[X^2] = \int_0^\infty x^2 \frac{e^{-\frac{x}{60}}}{60} dx = 7200$

$E[A] = E[\frac{X^2}{4\pi}] = \frac{E[X^2]}{4\pi} = \frac{1800}{\pi}$

b) $A \sim Exp(\frac{1}{15})$

$E[\sqrt{X}] = \int_0^\infty \sqrt{x} \frac{e^{-\frac{x}{15}}}{15} dx = \frac{\sqrt{15\pi}}{2}$

$E[L] = E[\sqrt{X4\pi}] = E[\sqrt{X}]\sqrt{4\pi} = \pi\sqrt{15}$

3.7. 7)

$V[X] = 9$
$E[X] = 2$
$V[X] = E[X^2] - E[X]^2 \Rightarrow E[X^2] = V[X] + E[X]^2 = 13$

a) $V[2(X-1)] = E[(2X-2)^2] - E[2X-2]^2 = 4E[X^2] - 8E[X] + 4 - (2E[X]-2)^2 = 4E[X^2] - 8E[X] + 4 - 4E[X]^2 + 8E[X] - 4 = 4E[X^2] - 4E[X]^2 = 4V[X] = 36$

$E[2X-2] = 2E[X] - 2 = 2$

b) $E[2X^2+1] = 2E[X^2] + 1 = 27$

c) $E[2(X-1)(X-3)] = E[2X^2 - 8X + 6] = 2E[X^2] - 8E[X] + 6 = 16$

d) $E[(X-c)^2] = E[X^2] - 2cE[X] + c^2 = c^2 - c4 + 13$ Es una parabola con mínimo en $x = \frac{-b}{2a} = 2$

e)$V[aX+b] = E[(aX+b)^2] - E[aX+b]^2 = a^2E[X^2] + 2abE[X] + b^2 - a^2E[X]^2 - 2abE[X] - b^2 = a^2E[X^2] - a^2E[X]^2 = a^2V[X] = 9a^2$

desvio: $\sigma = \sqrt{V[X]} = \sqrt{9a^2} = \pm 3a = 1 \Rightarrow a = \pm 1/3$

$E[aX+b] = aE[X] + b = 0 \Rightarrow 2a + b = \pm\frac{2}{3} + b = 0 \Rightarrow b = \pm 2/3$

Los a, b validos son : $a = 1/3, b = -2/3$ y $a = -1/3, b = 2/3$

3.8. 8)

$$h(x,y) = \begin{cases} (x^2 - y) & x \leq 1{,}5 \\ x & x > 1{,}5 \end{cases}$$

La función de probabilidad conjunta es $f_{XY}(x,y) = 1/4$ Ya que la distribución es uniforme y forma un cuadrado de lado 2.

$E[Z] = \int_0^{1,5} \int_1^3 (x^2 - y)\frac{1}{4} \cdot dydx + \int_{1,5}^2 \int_1^3 x\frac{1}{4} \cdot dydx = -\frac{1}{2}$

3.9. 9)

$N \setminus X_i$	0	1	2	3	marginal
1	2/27	0	0	1/27	1/9
2	2/9	2/9	2/9	0	2/3
3	0	2/9	0	0	2/9
marginal	8/27	4/9	2/9	1/27	1

$X_i = 0, N = 0$ Es la probabilidad que no haya ninguna bola en X_i y en total una urna ocupada, es decir, que hayan puesto las 3 bolas en la misma urna, como son dos urnas la probabilidad es $2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{2}{27}$.
$X_i = 1, N = 0$ Es la probabilidad de que haya una bola en X_i y en total una urna ocupada, es 0 ya que si hay una bola en la urna X_i deberia haber al menos otra ocupada con las otras dos, sucede lo mismo para $X_i = 2, N = 0$.
$X_i = 3, N = 0$ Es la probabilidad de que las tres bolas esten en X_i y en total una urna ocupada, es decir, que hayan puesto las 3 bolas en la urna X_i, la probabilidad es $\cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$.

a) $E[N] = 1 \cdot \frac{1}{9} + 2 \cdot \frac{2}{3} + 3 \cdot \frac{2}{9} = \frac{19}{9}$
$E[N^2] = 1 \cdot \frac{1}{9} + 2^2 \cdot \frac{2}{3} + 3^2 \cdot \frac{2}{9} = \frac{43}{9}$
$V[N] = E[N^2] - E[N]^2 = \frac{43}{9} - \left(\frac{19}{9}\right)^2 = \frac{26}{81} = 0{,}321$

b) $P(X_i = 1, N = 1) \neq P(X = 1) \cdot P(N = 1)$
$0 \neq \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{9}$

c) $E[X_i] = 1 \cdot \frac{4}{9} + 2 \cdot \frac{2}{9} + 3 \cdot \frac{1}{27} = 1$
$E[X_i^2] = 1^2 \cdot \frac{4}{9} + 2^2 \cdot \frac{2}{9} + 3^2 \cdot \frac{1}{27} = \frac{5}{3}$

Cuando $i = j \Rightarrow cov(X_i, X_i) = V[X_i] = E[X_i^2] - E[X_i]^2 = \frac{5}{3} - 1 = \frac{2}{3}$

3.10. 10)

a) $cov(X_1, X_2) = E[X_1 \cdot X_2] - E[X_1] \cdot E[X_2] = 0 \Rightarrow E[X_1 \cdot X_2] = E[X_1] \cdot E[X_2]$ Por lo tanto son independientes.

b) $\rho = \frac{cov(X_1, X_2)}{\sigma_1 \sigma_2}$

3.11. 11)

La covarianza es positiva mientras más puntos haya en el primer y tercer cuadrante que en el segundo y cuarto.

a) La region gris oscura tiene mayor densidad que la gris y se encuentra en los cuadrantes dos y cuatro, mientras que la blanca esta en las mismas proporciones en todos los cuadrantes, por lo tanto la covarianza es negativa.

b) Se compensan las densidades ya que hay la misma cantidad en el segundo y tercer cuadrante. La covarianza es 0.

c) Los puntos que estan más cerca del $(0, 0)$ suman más que los que estan más lejos. La covarianza es negativa.

3.12. 12)

a) $E[X] = \int_0^2 \int_x^2 x \cdot \frac{1}{2} \cdot dydx = \frac{2}{3}$
$E[Y] = \int_0^2 \int_0^y y \cdot \frac{1}{2} \cdot dxdy = \frac{4}{3}$
$E[X \cdot Y] = \int_0^2 \int_0^y xy \cdot \frac{1}{2} \cdot dxdy = 1$

$cov(X, Y) = E[X \cdot Y] - E[X] \cdot E[Y] = 1 - \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} = \frac{1}{9}$

b) $E[X^2] = \int_0^2 \int_x^2 x^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot dydx = \frac{2}{3}$
$E[Y^2] = \int_0^2 \int_0^y y^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot dxdy = 2$

$var[X+Y] = E[(X+Y)^2] - E[X+Y]^2 = E[X^2] + 2E[X \cdot Y] + E[Y^2] - (E[X]^2 + 2E[X]E[Y] + E[Y]^2) = \frac{2}{3}$

c) $E[3X - Y + 2] = 3E[X] - E[Y] + 2 = \frac{8}{3}$
$E[X + Y] = E[X] + E[Y] = 2$

$E[(3X - Y + 2) \cdot (X + Y)] = \int_0^2 \int_x^2 (3X - Y + 2)(X + Y) \cdot \frac{1}{2} \cdot dydx = 6$

$cov(3X - Y + 2, X + Y) = E[(3X - Y + 2) \cdot (X + Y)] - E[3X - Y + 2]E[X + Y] = \frac{2}{3}$

3.13. 13)

a) X: Tiempo reaccion $A \sim \mho(0,1)$
Y: Tiempo reaccion $B \sim \mho(0,1)$

W: Tiempo de reaccion del ganador $\rightarrow W = min\{X,Y\}$
Z: Tiempo de reaccion del perdedor $\rightarrow W = max\{X,Y\}$
$f_{XY}(x,y) = 1$

a) $E[W] = E[min\{X,Y\}] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} min\{X,Y\}dxdy = \int_0^1\int_x^1 x\cdot dydx + \int_0^1\int_0^x y\cdot dydx = \frac{1}{3}$
$E[Z] = E[max\{X,Y\}] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} max\{X,Y\}dxdy = \int_0^1\int_x^1 y\cdot dydx + \int_0^1\int_0^x x\cdot dydx = \frac{2}{3}$

$E[W^2] = E[min\{X,Y\}] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} min\{X,Y\}^2dxdy = \int_0^1\int_x^1 x^2\cdot dydx + \int_0^1\int_0^x y^2\cdot dydx = \frac{1}{6}$
$E[Z^2] = E[max\{X,Y\}^2] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} max\{X,Y\}^2dxdy = \int_0^1\int_x^1 y^2\cdot dydx + \int_0^1\int_0^x x^2\cdot dydx = \frac{1}{2}$

$V[W] = E[W^2] - E[W]^2 = \frac{1}{18}$
$V[Z] = E[Z^2] - E[Z]^2 = \frac{1}{18}$

b) $P(Z > 0{,}5) = \begin{array}{ll} P(X > 0{,}5) = \frac{3}{4} & \text{en el rectangulo inferior} \\ P(Y > 0{,}5) = \frac{3}{4} & \text{en el rectangulo superior} \end{array}$

$E[W|Z > 0{,}5] = \frac{4}{3}\cdot\frac{7}{48} + \frac{4}{3}\cdot\frac{7}{48} = \frac{7}{18}$

c) $E[W\cdot Z] = \int_0^1\int_0^1 xy\cdot dxdy = \frac{1}{4}$
$cov(W,Z) = E[WZ] - E[W]E[Z] = \frac{1}{4} - \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3} = \frac{1}{36}$

3.14. 14)

$\mu_X = E[X] = 2$
$\sigma^2 = V[X] = 9$
$V[X] = E[X^2] - E[X]^2 \Rightarrow E[X^2] = V[X] + E[X]^2 = 13$
$S_n = \sum_{m=1}^n X_m$

a) $E[S_n] = E[X_1 + X_2 + ... + X_n] = E[X_1] + E[X_2] + ... + E[X_n] = 2n$
$V[S_n] = E[(X_1+X_2+...+X_n)^2] - E[X_1+X_2+...+X_n]^2 = E[X_1^2] - E[X_1]^2 + E[X_2^2] - E[X_2]^2 + ... + E[X_n^2] - E[X_n]^2 = 9n$

3.15. 15)

Para los resultados de jemina y los alumnos estas guias ya ni figuran, si recien arrancaste y todavia no hiciste las guias posteriores a esta mejor considera que aca termina la guia 3.
Tenemos que $X_i = 1$ con $p = \frac{1}{6}$

a) $E[\overline{X}] = \frac{1}{12}\sum_{i=1}^{12} 1 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$

b) Vemos que para que $\overline{X}$ sea mayor a $\frac{1}{10} + \frac{1}{6} = \frac{4}{15}$ necesitamos que 4 o más dados caigan como as. La probabilidad que tirando 12 dados k de ellos salgan as $P(K = k) = \binom{12}{k} \cdot (\frac{1}{6})^k \cdot (\frac{5}{6})^{12-k}$ esto se llama distribucion binomial y la vas a ver en guias posteriores. La probabilidad de que salgan 4 o más dados como as es $\sum_{i=4}^{12} P(K = k) = 0{,}1252$

4. Guia 4

4.1. 1)

a) $F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(aX+b \leq y) = P(X \leq \frac{y-b}{a}) = \int_{-1}^{\frac{y-b}{a}} f_X(x)dx = F_Y(y) = \frac{1}{27}(\frac{y-b}{a}+1)^3$
$f_Y(y) = \frac{1}{9a}(\frac{y-b}{a}+1)^2$ si $b-a < y < 2a+b$ Estos limites salen de reemplazar en $Y = aX+b$ con los valores en lo que puede andar X.

b) $F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(-X^3 \leq y) = P(X \leq -y^{\frac{1}{3}}) = \int_{-1}^{-y^{\frac{1}{3}}} f_X(x)dx = F_Y(y) = \frac{1}{27}(-y^{\frac{1}{3}}+1)^3$
$f_Y(y) = \frac{1}{27(-y)^{\frac{2}{3}}}(-y^{\frac{1}{3}}+1)$ Para $-8 < y < 1$

c) $F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(-X^2+X+2 \leq y)$
Calculo raices: $x_1 = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{9}{4}-y}$, $x_2 = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{9}{4}-y}$
$P(-X^2+X+2 \leq y) = P(X < \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{9}{4}-y} \cap x > \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{9}{4}-y})$
Integramos la parte donde la parabola tiene valor negativo:
$\int_{-1}^{x_1} f_X(x)dx + \int_{x_2}^{2} f_X(x)dx = F_Y(y) = \frac{1}{27}((\frac{3}{2} - \sqrt{\frac{9}{4}-y})^3 + 27 - (\frac{3}{2} + \sqrt{\frac{9}{4}-y})^3)$
$f_y(Y) = \frac{1}{18\sqrt{9/4-y}}((\frac{3}{2} - \sqrt{\frac{9}{4}-y})^2 - (\frac{3}{2} + \sqrt{\frac{9}{4}-y})^2)$ Para $0 < y < \frac{9}{4}$

d) $F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(X^2 \leq y) = P(X \leq \pm\sqrt{y})$
Para los limites vemos que con $-1 < y < 1$ tenemos que x esta definida como la funcion que se tiene de dato, y para $y > 1$ el limite inferior valdria -1.
Para $-1 < y < 1$:

$\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f_X(x)dx = F_X(x) = \frac{1}{27}((\sqrt{y}+1)^3 + (-\sqrt{y}+1)^3)$
$f_X(x) = \frac{1}{18\sqrt{y}}((\sqrt{y}+1)^2 + (-\sqrt{y}+1)^2)$

Para $1 < y < 4$:

$\int_{-1}^{\sqrt{y}} f_X(x)dx = F_X(x) = \frac{1}{27}((\sqrt{y}+1)^3)$
$f_X(x) = \frac{1}{18\sqrt{y}}(\sqrt{y}+1)^2$

e) Primero usamos el reemplazo para $-1 \leq X < 1$
$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(X \leq y) = \int_{-1}^{y} f_X(x)dx = \frac{(y+1)^2}{27}$

Ahora para $1 \leq X$
$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(1 \leq y) = \int_{-1}^{2} f_X(x)dx = \frac{27}{27} = 1$

4.2. 2)

$\theta \sim \mho(-\pi/2, \pi/2)$
$tg(\theta) = \frac{X}{1}$
$f_\Theta(\theta) = \frac{1}{\pi}$

$P(X \leq x) = P(tg(\theta) \leq x) = P(\theta \leq arctg(x)) = \int_{-\pi/2}^{arctg(x)} \frac{1}{\pi} \cdot d\theta = F_X(x) = \frac{arctg(x)+\pi/2}{\pi}$
Recordemos que $(arctg(x))' = \frac{1}{x^2+1}$

$f_X(x) = \frac{1}{\pi(x^2+1)}$

4.3. 3)

$\phi \sim \mho(-\pi, \pi)$
$f_\Phi(\phi) = \frac{1}{2\pi}$

a) $P(C \leq c) = P(cos\phi \leq c) = P(\phi \leq arccos(c)) = \int_{-\pi}^{arccos(c)} \frac{1}{2\pi} \cdot d\phi = \frac{arccos(c)+\pi}{2\pi} = F_C(c)$
$f_C(c) = -\frac{1}{2\pi\sqrt{1-c^2}}$

b) $\int_{-0,5}^{0,5} f_C(c)dc = -\frac{1}{6}$

4.4. 4)

$F_A(a) = 1 - e^{-\frac{a}{15}} \Rightarrow f_A(a) = -\frac{e^{-\frac{a}{15}}}{15}$
$A = \frac{L^2}{4\pi} \Rightarrow L = \pm\sqrt{4\pi A}$

$P(L \leq l) = P(\sqrt{4\pi A} \leq l) = P(A \leq \frac{l^2}{4\pi}) = \int_0^{\frac{l^2}{4\pi}} f_A(a) \cdot da = -e^{-\frac{l^2}{60\pi}} + 1 = F_L(l)$
$f_L(l) = -\frac{2l \cdot e^{-\frac{l^2}{60\pi}}}{60\pi}$ Para $l > 0$

4.5. 5)

$f_X(x) = e^{-x}$ Para $x \geq 0$

$$f_Y(y) = \begin{cases} 3 & 0 \leq y \leq 1/4 \\ 1/3 & 1/4 < y < 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

No tengo idea de como saber que cambio de variables aplicar, por lo tanto, voy a limitarme a probar que el cambio de variables que es la solucion cumple con lo pedido por el enunciado. Dicho cambio de variables es este:

$$Y = \begin{cases} \frac{1-e^{-x}}{3} & 0 < x < ln4 \\ 1 - 3e^{-x} & ln4 < x \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$P(Y \leq y) = P(\frac{1-e^{-x}}{3} \leq y) = P(x \leq -ln(1-3y))$ Si reemplazamos y con $1/4$ obtenemos $ln(4)$ como limite superior.

$F_Y(y) = \int_0^{-ln(1-3y)} f_X(x) \cdot dx = \int_0^{-ln(1-3y)} e^{-x} \cdot dx = 3y \Rightarrow f_Y(y) = 3$ Cumple con la primer parte de la función buscada. Vamos a ver si pasa lo mismo con la segunda:

$P(Y \leq y) = P(1 - 3e^{-x} \leq y) = P(x \leq -ln(\frac{y-1}{3}))$ Reemplazamos con $y = 1$ y obtenemos $ln(0) = 1$, cumple con el limite inferior de la segunda parte.

$F_Y(y) = \int_{-ln(\frac{y-1}{3})}^{\infty} e^{-x} \cdot dx = \frac{y-1}{3} \Rightarrow f_Y(y) = \frac{1}{3}$ Cumple tambien con la segunda parte.

4.6. 6)

X = Hora de llegada a la estación.
Y = Tiempo que tiene que esperar.

Tomando como 0 a las 7 tenemos.
$X \sim \mho(10, 30)$
$f_X(x) = \frac{1}{20}$

$$Y = \begin{cases} 15 - x & 10 \leq x < 15 \\ 30 - x & 15 \leq x < 30 \end{cases}$$

$P(Y \leq y) = P(15 - x \leq y) = P(x \geq 15 - y) = F_Y(y) = \int_{15-y}^{15} \frac{1}{20} \cdot dx = \frac{1}{20}(15 - 15 + y) = \frac{y}{20}$
$f_Y(y) = \frac{1}{20}$ Para $10 \leq x < 15 \Rightarrow 0 \leq y < 5$

$P(Y \leq y) = P(30 - x \leq y) = P(x \geq 30 - y) = F_Y(y) = \int_{30-y}^{30} \frac{1}{20} \cdot dx = \frac{1}{20}(30 - 30 + y) = \frac{y}{20}$
$f_Y(y) = \frac{1}{20}$ Para $15 \leq x < 30 \Rightarrow 0 \leq y < 15$

Sumando las funciones segun el intervalo donde son validas llegamos a:

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{20} + \frac{1}{20} = \frac{1}{10} & 10 \leq x < 15 \\ \frac{1}{20} & 15 \leq x < 30 \end{cases}$$

4.7. 7)

$V_1 \sim \mho(180, 220)$
$f_{V_1}(v_1) = \frac{1}{40}$

$$V_2 = \begin{cases} 0 & 190 < v_1 \\ \frac{v_1-190}{20} & 190 \leq v_1 \leq 210 \\ 1 & 210 < v_1 \end{cases}$$

$P(V_2 \leq v_2) = P(\frac{v_1-190}{20} \leq v_2) = P(v_1 \leq v_2 \cdot 20 + 190) = \int_{180}^{20v_2+190} \frac{1}{40} dv_1 = \frac{20v_2+190-180}{40} = \frac{20v_2+10}{40} = F_{V_2}(v_2)$ Para $190 \leq v_1 \leq 210 \Rightarrow 190 \leq 20v_2 + 190 \leq 210 \Rightarrow 0 \leq v_2 \leq 1$

Para $210 < v_1$:
$P(V_2 \leq v_2) = P(1 \leq v_2) = \int_{180}^{220} \frac{1}{40} dv_1 = \frac{40}{40} = 1$

4.8. 8)

La función que indica los pulsos facturados es:

$$Y = \begin{cases} 0 & t < 1 \\ 1 & 1 \leq t < 2 \\ 2 & 2 \leq t < 3 \\ ... & ... \\ k & k \leq t < k+1 \end{cases}$$

$P(Y \leq y) = P(k \leq Y) = \int_0^{k+1} \lambda e^{-\lambda t} dt = -e^{-\lambda(k+1)} + 1$ Se ve que la funcion de distribución va a ser escalonada, para calcular la probabilidad en un punto vamos a hacerlo a través de la resta de dos escalones.

$P(N = k) = F_Y(y = k) - F_Y(y = k-1) = (-e^{-\lambda k} + 1) - (-e^{-\lambda(k-1)} + 1) = -e^{-\lambda k} + e^{-\lambda(k-1)} = e^{-\lambda k}(e^{\lambda} - 1)$ Con $k = 1, 2, 3, ..$

4.9. 9)

$U_1 \sim \mho(-1/2, 1/2)$
$U_2 \sim \mho(-1/2, 1/2)$

Defino $Z = U_1 + U_2$, Z puede tomar valores entre -1 y 1.
Tengo entonces en un eje U_1 y en otro U_2, que forman un cuadrado centrado en 0 de lado 1 (la función de densidad vale 1). Para $U_1 = -1/2$ y $U_2 = -1/2$ se tiene el Z más chico, en el otro extremo del cuadrado el más grande, se ve que hay dos divisiones para el calculo de la distribución.

Para $-1 < z < 0$:

$P(Z \leq z) = P(U_1 + U_2 \leq z) = \frac{(z+1)^2}{2}$ Esta area se puede calcular facil ya que es el area del triangulo rectangulo en la parte inferior izquierda del cuadrado.
$f_Z(z) = z + 1$

Para $0 < z < 1$:

$P(Z \leq z) = P(U_1 + U_2 \leq z) = \frac{1}{2} - \frac{(1-z)^2}{2}$ Ya se acumulo 1/2 de probabilidad con el triangulo de abajo, el otro triangulo acumula la otra mitad.
$f_Z(z) = 1 - z$

0 en otro caso.

4.10. 10)

4.11. 11)

$f_X(x) = \begin{cases} 3x^2 & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$

$f_Y(x) = \begin{cases} 1 & 1 < y < 2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$

$Z = \frac{X}{Y}$

$P(Z \leq z) = P(\frac{X}{Y} \leq z) = P(X \leq Yz) = F_Z(z)$
$\int_1^2 \int_0^{zy} 3x^2 \cdot dxdy = z^3y^3 = \frac{z^3(2^4-1)}{4} = F_Z(z) \Rightarrow f_Z(z) = \frac{45z^2}{4}$ Para $0 < z < 1/2$

La segunda integral es más complicada ya que no se puede ver una forma de poder definir una integral con dos numeros fijos, lo que se tiene que notar es que el punto donde la recta corta a $y = 1$ es $z = \frac{x}{y} = x$, por lo tanto podemos hacer la siguiente integral:

$\int_z^1 \int_1^{x/z} 3x^2 \cdot dydx = \frac{3}{4z} - 1 + \frac{z^3}{4} \Rightarrow f_Z(z) = -\frac{3}{4z^2} + \frac{3z^2}{4}$ Para $1/2 < z < 1$

4.12. 12)

4.13. 13)

$U = \begin{cases} x & x < y \\ y & y \geq x \end{cases}$

$F_U(u) = P(U \leq u) = P(U \leq u \cap X < Y) + P(U \leq u \cap X \geq Y) = P(X \leq u \cap X < Y) + P(Y \leq u \cap X \geq Y)$ La integral se parte en dos en $U = 0{,}5$.

Para $0 < u < 0{,}5$:

Se puede ver que el area crece segun $1 - (1-u)^2$ a eso le multiplicamos $F_{XY}(x, y) = 0{,}8$ y obtenemos $F_U(u) = 0{,}8 - 0{,}8(1-u)^2 \Rightarrow f_U(u) = 1{,}6(1-u)$

Para $0,5 < u < 1$:

$F_U(u) = 1 - 1,6(1-u)^2 \Rightarrow f_U(u) = 3,2(1-u)$ La constante de $F_U(u)$ se calculo para empalmar el paso de $0 < u < 0,5$ a $0,5 < u < 1$

0 en otro caso.

4.14. 14)

$X_1 \sim Exp(\lambda_1) \rightarrow F_{X_1}(x_1) = 1 - e^{-\lambda_1 x_1}$
$X_2 \sim Exp(\lambda_2) \rightarrow F_{X_2}(x_2) = 1 - e^{-\lambda_2 x_2}$

$$U = \begin{cases} x & x < y \\ y & y \geq x \end{cases}$$

a) $F_N(n) = P(N \leq n) = P(min\{X,Y\} \leq n) = 1 - P(min\{X,Y\} > n) = 1 - P(\{x > n\} \cap \{y > n\})$ Como X_1 y X_2 son independientes: $F_N(n) = 1 - P(x > n)P(y > n) = 1 - [1 - F_{X_1}(n)][1 - F_{X_2}(n)] = 1 - e^{-\lambda_1 n} \cdot e^{-\lambda_2 n}$
$f_N(n) = (\lambda_1 + \lambda_2)e^{-(\lambda_1+\lambda_2)n}$

b) $j = 1$ corresponde a cuando estamos por debajo de la recta identidad, es decir, es el area del rectangulo de abajo multiplicado la probabilidad conjunta, para $j = 2$ es el rectangulo de arriba.
$P(j = 1) = \int_0^\infty \int_x^\infty \lambda_1\lambda_2 \cdot e^{-\lambda_1 x_1} e^{-\lambda_2 x_2} \cdot dx_2 dx_1 = \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}$
$P(j = 2) = \int_0^\infty \int_0^x \lambda_1\lambda_2 \cdot e^{-\lambda_1 x_1} e^{-\lambda_2 x_2} \cdot dx_2 dx_1 = \frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}$

4.15. 15)

$J \sim Exp(5)$
$P \sim Exp(10)$

a) Para que quede sin atender tiene que llegar en los 5 primeros minutos desde que iniciaron el juego.
La probabilidad es $F_J(\frac{1}{12}) \cdot F_P(\frac{1}{12}) + (1 - F_J(\frac{1}{12})) \cdot F_P(\frac{1}{12}) + F_J(\frac{1}{12}) \cdot (1 - F_P(\frac{1}{12})) = (1 - e^{-5\cdot\frac{1}{12}}) \cdot (1 - e^{-10\cdot\frac{1}{12}}) + e^{-5\cdot\frac{1}{12}} \cdot (1 - e^{-10\cdot\frac{1}{12}}) + (1 - e^{-5\cdot\frac{1}{12}}) \cdot e^{-10\cdot\frac{1}{12}} = 0,7135$ Como ven hay que tener en cuenta la probabilidad de que pasen ambos, solo Juan y solo Pedro.

b) Calcular esto equivaldria a la probabilidad $P(J < P)$, es decir, podemos calcularlo integrando el area del triangulo donde se cumple $J < P$.

$\int_0^\infty \int_0^p 50e^{-5j} e^{-10p} dj dp = \frac{1}{3}$

c) Seria la probabilidad de que llamen a Juan en los primeros 5 minutos.
$P(J < \frac{1}{12}) = F_J(\frac{1}{12}) = 0{,}34076$

4.16. 16)

X_{min} = tiempo de duración del circuito hasta falla.
$X_{min} = min(X_{1A}, X_{2A}, X_{3A}) \cup min(X_{1B}, X_{2B}, X_{3B})$
X_{minA} = tiempo de duración del circuito hasta falla en un componenten A.
X_{minB} = tiempo de duración del circuito hasta falla en un componenten B.

$X_A \sim Exp(1/1000) \rightarrow f_{XA}(x) = \frac{e^{-\frac{x}{1000}}}{1000}$
$X_B \sim Exp(1/1500) \rightarrow f_{XB}(x) = \frac{e^{-\frac{x}{1500}}}{1500}$

Como los proveedores se elijen al azar:
$P(A) = P(B) = 0{,}5$

$P(X_{min} > 1200|A) = P(X_{1A} > 1200|A) \cdot P(X_{2A} > 1200|A) \cdot P(X_{3A} > 1200|A) = [1 - P(X_{1A} \leq 1200|A)] \cdot [1 - P(X_{2A} \leq 1200|A)] \cdot [1 - P(X_{3A} \leq 1200|A)] = e^{-\frac{1200}{1000} \cdot 3} = 0{,}0273$
$P(X_{min} > 1200|B) = 0{,}0907$

$P(A|X_{min} > 1200) = \frac{P(A \cap (X_{min} > 1200))}{P(X_{min} > 1200)} = \frac{P(X_{min} > 1200|A)P(A)}{P(X_{min} > 1200|A)P(A) + P(X_{min} > 1200|B)P(B)} = 0{,}2314$

4.17. 17)

$X \sim U(-1/2, 1/2) \Rightarrow f_X(x) = 4$
$Y \sim U(-1/2, 1/2) \Rightarrow f_Y(y) = 4$
$f_{XY}(x, y) = 16$

Si hacemos un dibujo de Z para distintos valores es visible que se trata de una circunferencia, tambien lo podemos ver en la ecuación de Z, $Z = X^2 + Y^2$, de aca podemos notar que $Z = r^2$ siendo r el radio de la circunferencia. Ahora simplemente integramos con coordenadas cilindricas.

$\int_0^r \int_0^{2\pi} 16 \cdot d\theta dr = 16 \cdot 2\pi r \xrightarrow{z=r^2} 32\pi\sqrt{z} = F_Z(z)$
$f_Z(z) = \frac{16\pi}{\sqrt{z}}$

4.18. 18)

$X \sim U(0, \frac{1}{2}) \Rightarrow f_X(x) = 2$
$Y \sim U(0, \frac{1}{2}) \Rightarrow f_Y(y) = 2$

$f_{XY}(x,y) = 4$

Facilmente podemos dibujar el recinto de integración y la recta $Z = X + Y$ que es la que vamos a buscar la funcion de probabilidad, a esto hay que agregarle la restricción de $X - Y < 0$. Dibujamos la funcion identidad y vamos a tener que integrar el area que esta entre esta ultima funcion y la primera, se ve que queda dividido el dibujo en dos areas, una para $0 \leq z < 1/2$ y otra para $1/2 \leq z \leq 1$.

Para $0 \leq z < 1/2$:

$F_z(z) = \int_0^{\frac{z}{2}} \int_x^{z-x} 4 \cdot dydx = z^2 \Rightarrow f_Z(z) = 2z$ El limite superior de la integral de X se consiguió despejando que esa interseccion entre las rectas es $Z = X + Y \xrightarrow{X=Y} Z = 2X \rightarrow X = \frac{Z}{2}$

$f_{Z|X>Y} = \frac{f_Z(z)}{P(X>Y)} = \frac{2z}{1/2} = 4z^2$

Para $1/2 \leq z \leq 1$:

$\int_{\frac{z}{2}}^1 \int_{z-y}^y 4 \cdot dxdy = (z-1)^2$

$f_{Z|X>Y} = \frac{f_Z(z)}{P(X>Y)} = \frac{2(z-1)}{1/2} = 4(z-1)$

0 en otro caso.

5. Guia 5

5.1. 1)

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 2 & 0 < y < x \\ 1 & 0 < x < 1 \end{cases}$$

a) $f_X(x) = \int_0^x 2dy = 2x$
$f_{Y|X=0{,}75} = \frac{f_{XY(0{,}75,y)}}{f_x(0{,}75)} = \frac{2}{2\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}$ Para $0 < y < 0{,}75$, 0 en otro caso.
$f_{Y|X=0{,}4} = \frac{f_{XY(0{,}4,y)}}{f_x(0{,}4)} = \frac{2}{2 \cdot 0{,}4} = \frac{5}{2}$ Para $0 < y < 0{,}4$, 0 en otro caso

b) $f_Y(y) = \int_y^1 1dx = 1 - y$
$f_X(x) \cdot f_Y(y) = 2x(1-y)$ No es independiente

c) $P(1/4 < Y < 1/2|X = 0{,}75) = \int_{1/4}^{1/2} f_{Y|X=0{,}75}(y)dy = \frac{1}{3}$
$P(1/4 < Y < 1/2|X = 0{,}4) = \int_{0{,}25}^{0{,}4} f_{Y|X=0{,}4}(y)dy = \frac{3}{8} = 0{,}375$

5.2. 2)

$f_Y(y) = \int_0^1 0{,}8dx \cdot 1_{0<y<0{,}5} + \int_{0{,}5}^1 1{,}6dx \cdot 1_{0{,}5<y<1}$
$f_Y(y) = \frac{4}{5} \cdot 1_{0<y<0{,}5} + \frac{6}{5} \cdot 1_{0{,}5<y<1}$

$f_X(x) = \int_0^1 0{,}8dy \cdot 1_{0<x<0{,}5} + \int_{0{,}5}^1 1{,}6dy \cdot 1_{0{,}5<x<1}$
$f_X(x) = \frac{4}{5} \cdot 1_{0<x<0{,}5} + \frac{6}{5} \cdot 1_{0{,}5<x<1}$

$$f_{Y|X=x}(y) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_X(x)} = \begin{cases} \frac{0{,}8}{4/5} = 1 & 0 < x < 1/2 \cap 0 < y < 1 \\ \frac{0{,}8}{6/5} = \frac{2}{3} & 1/2 < x < 1 \cap 0 < y < 1/2 \\ \frac{1{,}6}{6/5} = \frac{4}{3} & 1/2 < x < 1 \cap 1/2 < y < 1 \end{cases}$$

Multiplicando marginales se ve que no son independientes.

5.3. 3)

$X_1 \sim Exp(\lambda) \Rightarrow f_{X_1}(x_1) = \lambda e^{-\lambda x_1}$
$X_2 \sim Exp(\lambda) \Rightarrow f_{X_2}(x_2) = \lambda e^{-\lambda x_2}$

$Y_1 = X_1 + X_2$
$Y_2 = \frac{X_1}{X_2}$
$Y_3 = X_1 - X_2$

Al ser X_1 y X_2 independientes tenemos que $f_{X_1,X_2}(x_1,x_2)=\lambda^2 e^{-\lambda(x_1+x_2)}$

a) Resuelvo por jacobiano.
$(Y_1,Y_2)\rightarrow(X_1+X_2,\frac{X_1}{X_2})$
Despejamos X_1 y X_2 en funcion de Y_1 y Y_2 y llegamos a:

$(X_1,X_2)\rightarrow(Y_1-\frac{Y_1}{Y_2+1},\frac{Y_1}{Y_2+1})$
$g^{-1}(y_1,y_2)=(y_1-\frac{y_1}{y_2+1},\frac{y_1}{y_2+1})$

$$J_{g^{-1}}(y_1,y_3)=\begin{bmatrix}\frac{dX_1}{dY_1} & \frac{dX_1}{dY_2}\\ \frac{dX_2}{dY_1} & \frac{dX_2}{dY_2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1-\frac{1}{Y_2+1} & \frac{Y_1}{(Y_2+1)^2}\\ \frac{1}{Y_2+1} & -\frac{Y_1}{(Y_2+1)^2}\end{bmatrix}\Rightarrow det=|-\frac{Y_1}{(Y_2+1)^2}|=\frac{Y_1}{(Y_2+1)^2}$$

$f_{Y_1,Y_2}(y_1,y_2)=f_{X_1,X_2}(g^{-1}(y_1,y_3))|J_{g^{-1}(y_1,y_3)}|=\lambda^2 e^{-\lambda y_1}\frac{y_1}{(y_2+1)^2}$

b)$(Y_1,Y_3)\rightarrow(X_1+X_2,X_1-X_2)$

$Y_3+X_2=X_1\Rightarrow X_1=Y_1+\frac{Y_3-Y_1}{2}$
$Y_1=Y_3+2X_2\Rightarrow X_2=\frac{Y_1-Y_3}{2}$

$g^{-1}(y_1,y_3)=(y_1+\frac{y_3-y_1}{2},\frac{y_1-y_3}{2})$

$$J_{g^{-1}}(y_1,y_3)=\begin{bmatrix}\frac{dX_1}{dY_1} & \frac{dX_1}{dY_3}\\ \frac{dX_2}{dY_1} & \frac{dX_2}{dY_3}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}\Rightarrow det=|-\frac{1}{2}|=\frac{1}{2}$$

$f_{Y_1,Y_3}(y_1,y_3)=f_{X_1,X_2}(g^{-1}(y_1,y_3))|J_{g^{-1}(y_1,y_3)}|=\lambda^2 e^{-\lambda y_1}\frac{1}{2}$

c) $f_{Y_2}(y_2)=\int_0^\infty\lambda^2 e^{-\lambda y_1}\frac{y_1}{(y_2+1)^2}\cdot dy_1=\frac{1}{(1+y_2)^2}$
$f_{Y1|Y_2=1}(y_1)=\frac{f_{Y_1,Y_2}(y_1,1)}{f_{Y_2}(1)}=\frac{\lambda^2 e^{-\lambda y_1}\frac{y_1}{4}}{1/4}=\lambda^2 e^{-\lambda y_1}y_1$

$f_{Y_3}(y_3)=\int_0^\infty\lambda^2 e^{-\lambda y_1}\frac{1}{2}\cdot dy_1=\frac{\lambda}{2}$
$f_{Y1|Y_3=0}(y_1)=\frac{f_{Y_1,Y_3}(y_1,0)}{f_{Y_3}(0)}=\frac{\lambda^2 e^{-\lambda y_1}\frac{1}{2}}{\lambda/2}=\lambda e^{-\lambda y_1}$

d) $P(Y_1>1|Y_2=1)=\int_1^\infty f_{Y1|Y_2=1}(y_1)dy_1=\int_1^\infty\lambda^2 e^{-\lambda y_1}y_1\cdot dy_1=(1+\lambda)e^{-1}\xrightarrow{\lambda=1}2e^{-1}$
$P(Y_1>1|Y_3=0)=\int_1^\infty f_{Y1|Y_3=0}(y_1)dy_1=\int_1^\infty\lambda e^{-\lambda y_1}\cdot dy_1=e^{-\lambda}\xrightarrow{\lambda=1}e^{-1}$

5.4. 4)

5.5. 5)

Jemina dijo que este problema tenia algo mal y que valia la pena hacerlo.

5.6. 6)

$f_{T_A}(t) = \begin{cases} 2t & 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$

$f_{T_B}(t) = \begin{cases} 0{,}5t & 0 \leq t \leq 2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$

$f_{T_C}(t) = \begin{cases} 0{,}125t & 0 \leq t \leq 4 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$

$P(A) = 0{,}5$
$P(B) = 0{,}3$
$P(C) = 0{,}2$

a) Esta parte del ejercicio es muy parecida al 4.16.

$P(t > 0{,}5|A) = 1 - P(t \leq 0{,}5|A) = 1 - \int_0^{0{,}5} 2t \cdot dt = \frac{3}{4}$
$P(t > 0{,}5|B) = 1 - P(t \leq 0{,}5|B) = 1 - \int_0^{0{,}5} 0{,}5t \cdot dt = \frac{15}{16}$
$P(t > 0{,}5|C) = 1 - P(t \leq 0{,}5|C) = 1 - \int_0^{0{,}5} 0{,}125t \cdot dt = \frac{63}{64}$

$P(A|t > 0{,}5) = \frac{P(A \cap (t>0{,}5))}{P(t>0{,}5)} = \frac{P(t>0{,}5|A)P(A)}{P(t>0{,}5|A)P(A)+P(t>0{,}5|B)P(B)+P(t>0{,}5|C)P(C)} = \frac{0{,}5\frac{3}{4}}{0{,}5\frac{3}{4}+0{,}3\frac{15}{16}+0{,}2\frac{63}{64}} = \frac{40}{91} = 0{,}4396$

b) $P(A|t = 0{,}5) = \frac{f_{T_A}(0{,}5)P(A)}{f_{T_A}(0{,}5)P(A)+f_{T_B}(0{,}5)P(B)+f_{T_C}(0{,}5)P(C)} = \frac{2 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5}{2 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5+0{,}5 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}3+0{,}125 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}2} = \frac{40}{47} = 0{,}8511$

5.7. 7)

5.8. 8)

$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} xe^{-x(1+y)} & x > 0, y > 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$

a) $f_X(x) = \int_0^\infty xe^{-x(1+y)}dy = e^{-x}$ para $x > 0$
$f_{Y|X=x}(y) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_X(x)} = \frac{xe^{-x(1+y)}}{e^{-x}} = xe^{-xy}$
$P(Y \leq y|X = x) = F_{Y|X=x}(y) = \int_0^y xe^{-xy}dy = 1 - e^{-xy}$ Para $x > 0, y > 0$, 0 en otro caso.

b) $\varphi(x) = E[Y|X = x] = \int_{-\infty}^\infty y f_{Y|X=x}(y)dy = \int_0^\infty y \cdot xe^{-xy} \cdot dy = \frac{1}{x}$

c) $[Y|X=x]=\frac{1}{x}\Rightarrow[Y|X]=\frac{1}{X}$

d) $F_W(w)=P(W\le w)=P(\frac{1}{X}\le w)=P(\frac{1}{w}\le X)=\int_{\frac{1}{w}}^{\infty}f_X(x)\cdot dx=e^{-1/w}$ para $w\ge 0$, 0 en otro caso.

e) $P(1/2<E[Y|X]\le 3)=P(1/2<w\le 3)=F_W(3)-F_W(1/2)=e^{-1/3}-e^{-2}=0{,}5812$

5.9. 9)

$$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases}2 & 0<y<x\\ 1 & 0<x<1\end{cases}$$

En el ejercicio 5.1 obtuvimos: $f_X(x)=2x$

a) $f_{Y|X=x}(y)=\frac{f_{XY(x,y)}}{f_x(x)}=\frac{2}{2x}=\frac{1}{x}$ Para $0<y<x$, 0 en otro caso.
$P(Y\le y|X=x)=F_{Y|X=x}(y)=\int_0^y\frac{1}{x}dy=\frac{y}{x}$ Para $0<y<x,0<x<1$

b) $\varphi(x)=E[Y|X=x]=\int_{-\infty}^{\infty}yf_{Y|X=x}(y)dy=\int_0^x\frac{y}{x}dy=\frac{x}{2}$ Para $0<x<1$

$E[Y^2|X=x]=\int_0^x\frac{y^2}{x}dy=\frac{x^2}{3}$
$\phi(x)=V[Y|X=x]=E[Y^2|X=x]-E[Y|X=x]^2=\frac{x^2}{3}-\left(\frac{x}{2}\right)^2=\frac{x^2}{12}$Para $0<x<1$

c) $E[Y|X=x]=\frac{x}{2}\Rightarrow[Y|X]=\frac{X}{2}$
$V[Y|X=x]=\frac{x^2}{12}\Rightarrow V[Y|X]=\frac{X^2}{12}$

d) $F_W(w)=P(W\le w)=P(\frac{X}{2}\le w)=P(X\le 2w)=\int_0^{2w}f_X(x)dx=4w^2$ Para $0<w<1/2$
$P(E[Y|X]\le 1/4)=P(W\le 1/4)=F_W(1/4)-F_W(0)=\frac{1}{4}$

$F_Z(z)=P(Z\le z)=P(\frac{X^2}{12}\le z)=P(X\le\pm\sqrt{12z})=\int_0^{\sqrt{12z}}2x\cdot dx=12z$ Para $0<z<1/12$
$P(V[Y|X]>3/64)=P(Z>3/64)=F_Z(1/12)-F_Z(3/64)=\frac{7}{16}$

5.10. 10)

5.11. 11)

6 bolas rojas.
4 azules.
2 negras.

X: Cantidad de bolas rojas extraidas.
Y: Cantidad de bolas azules extraidas.

a)

$X \setminus Y\|X=x$	0	1	2	3
0	0	1/5	3/5	1/5
1	1/15	8/15	2/5	0
2	1/3	2/3	0	0
3	1	0	0	0

Estos valores se pueden calcular pensando cada situación en particular y hacer como en la guia 1, por ejemplo: $X = 0, Y = 2$ Seria la situacion en que sabiendo que no sacamos ninguna roja cual es la probabilidad de saca una azul, como sabemos que no sacamos ninguna roja solamente evaluamos las probabilidades entre 6 bolas, de las cuales 4 son azules y 2 negras. La probabilidad de esta situacion es $\frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \binom{3}{2}$, las primeras dos probabilidades corresponden a sacar la bola azul, la ultima a la negra, y la combinatoria representa las posibles formas que podemos sacar esas bolas, es decir: azul, azul, negra; azul, negra, azul; negra, azul, azul.
Una forma más sencilla de hacer esto es acordarnos de la distribución hipergeometrica y calcular la probabilidad con una formula con combinatorias:

$$P_{Y|X=x}(y) = \frac{\binom{4}{y}\binom{2}{3-x-y}}{\binom{6}{3-x}} \text{ con } x = 0, 1, 2, 3; 0 < y < 3 - y$$

b) $E[Y|X = 0] = 1 \cdot \frac{1}{5} + 2 \cdot \frac{3}{5} + 3 \cdot \frac{1}{5} = 2$
$E[Y|X = 1] = 0 \cdot \frac{1}{15} + 1 \cdot \frac{8}{15} + 2 \cdot \frac{2}{5} = \frac{4}{3}$
$E[Y|X = 2] = 0 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$
$E[Y|X = 3] = 0 \cdot 1 = 0$

De la misma forma que antes tambien podemos encontrar una formula que represente estas situaciones: $E[Y|X = x] = (3 - x)\frac{4}{6}$

$E[Y^2|X = 0] = 1^2 \cdot \frac{1}{5} + 2^2 \cdot \frac{3}{5} + 3^2 \cdot \frac{1}{5} = \frac{22}{5}$
$E[Y^2|X = 1] = 0^2 \cdot \frac{1}{15} + 1^2 \cdot \frac{8}{15} + 2^2 \cdot \frac{2}{5} = \frac{32}{15}$
$E[Y^2|X = 2] = 0^2 \cdot \frac{1}{3} + 1^2 \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$
$E[Y^2|X = 3] = 0^2 \cdot 1 = 0$

$V[Y|X = 0] = E[Y^2|X = 0] - E[Y|X = 0]^2 = \frac{2}{5}$
$V[Y|X = 1] = E[Y^2|X = 1] - E[Y|X = 1]^2 = \frac{16}{45}$
$V[Y|X = 2] = E[Y^2|X = 2] - E[Y|X = 2]^2 = \frac{2}{9}$
$V[Y|X = 3] = E[Y^2|X = 3] - E[Y|X = 3]^2 = 0$

Y como con la esperanza, la formula que generaliza es $V[Y|X = x] = (9 - x^2)\frac{2}{45}$

c) $E[Y|X = x] = (3 - x)\frac{4}{6} \Rightarrow E[Y|X] = (3 - X)\frac{4}{6}$
$V[Y|X = x] = (9 - x^2)\frac{2}{45} \Rightarrow V[Y|X] = (9 - X^2)\frac{2}{45}$

5.12. 12)

5.13. 13)

a)
$X \sim \mho(-1,1)$
$Y \sim \mho(-1,1)$

$f_{XY}(x,y) = \frac{1}{4}$

$f_X(x) = \int_{-1}^{1} \frac{1}{4} dy = \frac{1}{2}$ Para $-1 < x < 1$

$f_{Y|X=x}(y) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_X(x)} = \frac{1/4}{1/2} = \frac{1}{2}$

$[Y|X=x] = \int_{-\infty}^{\infty} y f_{Y|X=x}(y) \cdot dy = \int_{-1}^{1} \frac{y}{2} dy = 0$

b) Para calcular el area primero tenemos que calcular el largo de sus lados, tirando un pitagoras donde los catetos son los ejes hasta $\sqrt{2}$ queda que la hipotenusa es el lado del cuadrado $2C^2 = H^2 \to H = \sqrt{2 \cdot 2} = 2$

$f_{XY}(x,y) = \frac{1}{4}$

$f_X(x) = \int_{-\sqrt{2}-x}^{\sqrt{2}+x} \frac{1}{4} dy \cdot 1_{\{-\sqrt{2}<x<0\}} + \int_{x-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}-x} \frac{1}{4} dy \cdot 1_{\{0<x<\sqrt{2}\}} = \frac{1}{2}(x+\sqrt{2}) \cdot 1_{\{-\sqrt{2}<x<0\}} + \frac{1}{2}(\sqrt{2}-x) \cdot 1_{\{0<x<\sqrt{2}\}}$

$f_{Y|X=x}(y) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_X(x)} = \begin{cases} \frac{1}{2(x+\sqrt{2})} & -\sqrt{2} < x < 0 \\ \frac{1}{2(\sqrt{2}-x)} & 0 < x < \sqrt{2} \end{cases}$

$[Y|X=x] = \int_{-\infty}^{\infty} y f_{Y|X=x}(y) \cdot dy = \int_{-\sqrt{2}-x}^{\sqrt{2}+x} \frac{y}{2(x+\sqrt{2})} dy + \int_{x-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}-x} \frac{y}{2(\sqrt{2}-x)} dy = 0 + 0 = 0$

5.14. 14)

Las tres salidas son equiprobables: $P(S_1) = P(S_2) = P(S_3) = \frac{1}{3}$

$E[T|S_1] = 4 + E[T]$
$E[T|S_2] = 7 + E[T]$
$E[T|S_3] = 3$

$E[T] = E[T|S_1] \cdot P(S1) + E[T|S_2] \cdot P(S_2) + E[T|S_3] \cdot P(S_3) = (4 + E[T])\frac{1}{3} + (7 + E[T])\frac{1}{3} + 3\frac{1}{3} \Rightarrow E[T] = 14$

5.15. 15)

$X \sim \mho(0, \pi)$
$f_X(x) = \frac{1}{\pi}$

$cov(sen(X), Y) = E[sen(X) \cdot Y] - E[sen(X)] \cdot E[Y]$ Por definición.
Despejamos cada parte:
$E[sen(X) \cdot Y] = E[E[sen(X) \cdot Y|X]] = E[sen(X) \cdot E[Y|X]] \xrightarrow{E[Y|X]=X} E[sen(X) \cdot X]$
$E[Y] = E[E[Y|X]] \xrightarrow{E[Y|X]=X} E[X]$

$E[X] = \int_0^\pi x\frac{1}{\pi}dx = \frac{\pi}{2}$
$E[sen(X) \cdot X] = \int_0^\pi sen(x)x\frac{1}{\pi}dx = 1$
$E[sen(X)] = \int_0^\pi sen(x)\frac{1}{\pi}dx = \frac{2}{\pi}$

Nos queda:
$cov(sen(X), Y) = E[sen(X) \cdot X] - E[sen(X)] \cdot E[X] = 1 - \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} = 0$

5.16. 16)

X: Cantidad de pares en 100 tiros.
Y: Cantidad de impares en 100 tiros.

$X \sim Bi(1/2, 100)$
$Y = 100 - X$ Esto es facil de ver pensando que si hubo, por ejemplo, 30 resultados pares va a tener que haber 70 impares, y así.

Para la distribución binomial se define $E[X] = n \cdot p = 100 \cdot \frac{1}{2} = 50$
Y también $V[X] = n \cdot p \cdot (1 - p) = 100 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 25]$
$E[Y] = E[100 - X] = E[100] - E[X] = 100 - 50 = 50$

$E[Y|X] = 100 - X$ Por la misma razon antes mensionada esto se puede ver sin calcular nada.

$\varphi(x) = \frac{cov(X,Y)(X-E[X])}{V[X]} + E[Y]$
Recordemos que $\varphi(x) = E[Y|X]$
$E[Y|X] = \frac{cov(X,Y)(X-E[X])}{V[X]} + E[Y]$
$\frac{E[Y|X]-E[Y]}{X-E[X]} = \frac{cov(X,Y)}{V[X]}$
$\frac{50-X}{X-50} = \frac{cov(X,Y)}{V[X]}$
$-V[X] = cov(X, Y) = -25$

5.17. 17)

$X \sim Exp(\lambda)$
$E[X] = 1$

$E[Y|X] = X$
$V[Y|X] = X$

Para distribuciones exponenciales sabemos que:
$E[X] = \frac{1}{\lambda}$
$V[X] = \frac{1}{\lambda^2}$

$E[X] = \frac{1}{\lambda} = 1 \Rightarrow \lambda = 1$
$V[X] = 1$

Pitagoras por definición:
$V[Y] = E[V[Y|X]] + V[E[Y|X]] = E[X] + V[X] = 2$

5.18. 18)

Aca solo hace falta acordarse que para la distribucion de Poisson $E[X] = u$. Al decirnos que la media por segundo es 10 quiere decir que recibe 10 impactos por segundo, para calcular la posición final lo hacemos como $10 \cdot \frac{3}{4} - 10 \cdot \frac{1}{4} = 5$ en este caso estamos suponiendo positiva la derecha, por lo tanto los movimientos a la derecha son positivos y los que son a la izquierda son negativos.

5.19. 19)

X: Cantidad de ases en el primer tiro.
Y: Cantidad de ases en el segundo tiro.
Z: Cantidad de ases en el tercer tiro.

$X \sim Binom(\frac{1}{6}, 5)$
$E[X] = 5 \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$

$Y \sim Binom(\frac{1}{6}, 5 - X)$
$E[Y] = E[E[Y]] = E[(5 - X) \cdot \frac{1}{6}] = \frac{5}{6} - \frac{E[X]}{6} = \frac{25}{36}$

$Z \sim Binom(\frac{1}{6}, 5 - Y - X)$
$E[Z] = E[E[Z]] = E[\frac{1}{6} \cdot (5 - Y - X)] = \frac{1}{6} \cdot (5 - E[Y] - E[X]) = \frac{1}{6} \cdot (5 - \frac{25}{36} - \frac{5}{6}) = \frac{125}{216}$

5.20. 20)

N: cantidad de bolsas necesarias.
X: Peso total en la balanza.

Si $N = 1 \to X$ es el peso de X_1
Si $N = 2 \to X$ es el peso de $X_1 + X_2$

Lo vemos como una mezcla se variables alteatorias.

$P(N = 1) = P(X_1 > 5) = \frac{1}{3}$
$P(N = 2) = P(X_1 < 5) = \frac{2}{3}$

$E[X_1|X_1 \leq 5] = 4$ ya que equivaldria a $\sim U(3, 5)$
$E[X_2|X_1 \leq 5] = 4, 5$ ya que puede ser cualquier valor entre 3 y 6.

$E[X|N = 1] = E[X_1|X_1 > 5] = 5{,}5$
$E[X|N = 2] = E[X_1 + X_2|X_1 \leq 5] = E[X_1|X_1 \leq 5] + E[X_2|X_1 \leq 5] = 4 + 4{,}5 = 8{,}5$

$E[X] = E[X|N = 1] \cdot P(N = 1) + E[X|N = 2] \cdot P(N = 2) = 5{,}5 \cdot \frac{1}{3} + 8{,}5 \cdot \frac{2}{3} = \frac{15}{2}$

5.21. 21)

5.22. 22)

$X \sim \mho(0, 2)$
$Y \sim \mho(0, X^2)$

a) Area $= \int_0^2 \int_0^{x^2} 1 \cdot dydx = \frac{8}{3} \Rightarrow f_{XY}(x, y) = \frac{3}{8}$

$f_X(x) = \int_0^{x^2} \frac{3}{8} \cdot dy = \frac{3x^2}{8}$

$f_{Y|X=x}(y) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_X(x)} = \frac{3/8}{\frac{3x^2}{8}} = \frac{1}{x^2}$

$E[Y|X = x] = \int_0^{x^2} \frac{y}{x^2} dy = \frac{x^2}{2} \Rightarrow E[Y|X] = \frac{X^2}{2}$ para $0 < x < 2$

b) $f_Y(y) = \int_{\sqrt{y}}^2 \frac{3}{8} dx = \frac{3}{8}(2 - \sqrt{y})$
$E[Y] = \int_0^4 \frac{y3}{8}(2 - \sqrt{y})dy = \frac{6}{5}$
$E[X] = \int_0^2 \frac{3x^3}{8} dx = \frac{3}{2}$
$E[X^2] = \int_0^2 \frac{3x^4}{8} dx = \frac{12}{5}$
$E[X \cdot Y] = \int_0^2 \int_0^{x^2} \frac{3xy}{8} \cdot dydx = 2$
$V[X] = E[X^2] - E[X]^2 = \frac{12}{5} - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3}{20}$
$cov(X, Y) = E[X \cdot Y] - E[X]E[Y] = 2 - \frac{3}{2} \cdot \frac{6}{5} = \frac{1}{5}$

$\hat{y} = \frac{cov(X,Y)(X-E[X])}{V[X]} + E[Y] = \frac{4}{3} \cdot x - \frac{44}{5}$

6. Guia 6

6.1. 1)

X: Tiros acertados.

a) $P(X = x) = \binom{10}{x} \cdot (\frac{1}{5})^x \cdot (\frac{4}{5})^{10-x}$
$P(X \geq 2) = P(X = 2) + P(X = 3) + ... + P(X = 10) = \sum_{x=2}^{10} P(X = x) = 0{,}6242$

b) $P(X \geq 2 | X \geq 1) = \frac{P(X \geq 2)}{P(X \geq 1)} = \frac{\sum_{x=2}^{10} P(X=x)}{\sum_{x=1}^{10} P(X=x)} = 0{,}6992$

6.2. 2)

$P(X = x) = \binom{6}{x} \cdot (\frac{1}{6})^x \cdot (\frac{5}{6})^{6-x}$

a) $P(X \geq 1) = \sum_{1}^{6} P(X = x) = 0{,}6651$

b) $P(X = 1) = 0{,}4019$

c) $P(X = 2) = 0{,}2009$

6.3. 3)

a) $P(X = x) = \binom{9}{x} \cdot (\frac{1}{5})^x \cdot (\frac{4}{5})^{9-x}$

x	P(X=x)
0	0.1342
1	0.3019
2	0.3019
3	0.1761
4	0.0661
5	0.0165
6	0.00275
...	...

Se ve que para valores mayores a 2 la probabilidad empieza a disminuir. Los casos de mayor probabilidad son 1 y 2, que son equiprobables.

b) $P(X = x) = \binom{10}{x} \cdot (\frac{1}{5})^x \cdot (\frac{4}{5})^{10-x}$

x	P(X=x)
0	0.1074
1	0.2684
2	0.3019
3	0.2013
4	0.0881
5	0.0264
6	0.0055
...	...

El caso de mayor probabilidad es 2.

6.4. 4)

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{x-6}{4} & 6 \leq x < 8 \\ \frac{10-x}{4} & 8 \leq x \leq 10 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

La probabilidad de que una arandela tenga menos de $6{,}5mm$ de diametro es $\int_6^{6,5} \frac{x-6}{4} dx = \frac{1}{32}$

$P(X = x) = \binom{100}{x} \cdot (\frac{1}{32})^x \cdot (\frac{31}{32})^{100-x}$

$P(X \geq 1) = \sum_{x=2}^{100} P(X = x) = 0{,}8233$

6.5. 5)

$X \sim Poi(2)$ Por cada 200 individuos hay 2 zurdos.

$P(X = x) = \frac{2^x}{x!} e^{-2}$

$\sum_4^{20} P(X = x) = 0{,}1429$ Para numeros mayores a 20 el valor de la probabilidad ya es despreciable.

6.6. 6)

La probabilidad de que aparezca un 7 en X cantidad de números es $P(X = x) = 1 - (\frac{9}{10})^x$

$1 - (\frac{9}{10})^x = \frac{9}{10}$
$(\frac{9}{10})^x = \frac{1}{10}$
$x = \frac{ln(1/10)}{ln(9/10)} = 21{,}85$

Como pide que sea “por lo menos” esa probabilidad, redondemos para arriba, 22 digitos.

6.7. 7)

$X \sim \mho(20, 30)$

a) La probabilidad de encontrar una bolsa de más de $29kg$ es $\int_{29}^{30} \frac{1}{10} dx = \frac{1}{10}$
La probabilidad pedida es $(1 - \frac{1}{10})^6 \cdot \frac{1}{10} = 0{,}05314$

b) La probabilidad de encontrar una bolsa de menos de $22{,}5kg$ es $\int_{20}^{22{,}5} \frac{1}{10} dx = \frac{1}{4}$
La probabilidad pedida es $\sum_{x=5}^{\infty} (1 - \frac{1}{4})^x \cdot \frac{1}{4} = 0{,}2373$

6.8. 8)

N: # chocolates hasta conseguir la colección.
N_1: # chocolate hasta el primer personaje.
N_2: # chocolate hasta el segundo personaje. $\sim Geo(4/5)$
N_3: # chocolate hasta el tercer personaje. $\sim Geo(3/5)$
N_4: # chocolate hasta el cuarto personaje. $\sim Geo(2/5)$
N_5: # chocolate hasta el quinto personaje. $\sim Geo(1/5)$

$N = N_1 + N_2 + ... + N_5$

$E[N] = E[N_1] + E[N_2] + ... + E[N_5] = 1 + \frac{5}{4} + \frac{5}{3} + \frac{5}{2} + \frac{5}{1} = 11{,}42$

$V[N] = V[N_1] + V[N_2] + ... + V[N_5] = \frac{1/5}{(4/5)^2} + \frac{2/5}{(3/5)^2} + \frac{3/5}{(2/5)^2} + \frac{4/5}{(1/5)^2} = 25{,}17$

6.9. 9)

T: Tiempo en que la lampara va a estar encendida $\sim Exp(1)$
K: # cantidad de tiradas del dado.

Para calcular la cantidad de tiradas del dado evaluamos la posibilidad de que la lampara este prendida un multiplo de 15 segundos, es decir, si tiramos 3 veces quiere decir que la lampara estuvo prendida más de 45 segundos y menos de 60.

$P(K = k) = P(15(K-1) \leq T \leq 15K) = F_T(15(K-1)) - F_T(15K) = e^{-\frac{1}{3600}(k-15)} - e^{-\frac{1}{3600}k} = e^{-\frac{1}{3600}(k-15)}(1 - e^{-\frac{-15}{3600}})$
Aproximando para $k = 1$ tenemos que $K \sim Geo(1 - e^{-\frac{-15}{3600}} = 0{,}004158)$

$E[N] = E[E[N|K]] = E[\frac{1}{6}K] = \frac{1}{6}E[K] = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{0{,}004158} = 40{,}08$

6.10. 10)

Tengo todas las posibles combinaciones de 2 ases y 4 no-ases en los primeros 6 tiros, pero en el ultimo tiene que salir un as, esta probabilidad la calculo como $\binom{6}{2} \cdot (\frac{1}{6})^3 \cdot (\frac{5}{6})^4 = 0{,}03349$

6.11. 11)

$f_T(t) = \begin{cases} \frac{t-1}{2} & 1 \leq t \leq 3 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$

$P(1 \leq t < 2) = \int_1^2 \frac{t-1}{2} dt = \frac{1}{4}$
$P(2 \leq t < 3) = \int_2^3 \frac{t-1}{2} dt = \frac{3}{4}$

La probabilidad que tiene lucas de ganar un partido es $P(1 \leq t < 2) \cdot \frac{3}{4} + P(2 \leq t < 3) \cdot \frac{1}{2} = \frac{9}{16}$

Resolvemos como en el ejercicio anterior, la probabilidad buscada es $\binom{7}{5} \cdot (\frac{9}{16})^6 \cdot (1 - \frac{9}{16})^2 = 0{,}1273$

6.12. 12)

6.13. 13)

Este problema es igual al tipico de la urna con bolas de distintos colores, la distribucion hipergeometrica es la siguiente:

$P(X = x) = \frac{\binom{8}{x} \cdot \binom{17}{11-x}}{\binom{25}{11}}$

a) $P(X = 0) = \frac{91}{32775} = 0{,}00278$

b) $P(X = 2) = \frac{1001}{6555} = 0{,}1527$

b) $\sum_{x=4}^{11} P(X = x) = \frac{661}{1311} = 0{,}5042$

6.14. 14)

Probabilidad de sacar 1 bola blanca y una negra de una urna con k bolas blancas:

$P(K = k) = \frac{\binom{k}{1} \cdot \binom{5}{1}}{\binom{5+k}{2}}$

$P(K = 0) = 0$
$P(K = 1) = \frac{1}{3} = 0{,}333$
$P(K = 2) = \frac{10}{21} = 0{,}4762$

$P(K=3)=\frac{15}{28}=0{,}5357$
$P(K=4)=\frac{5}{9}=0{,}5555$
$P(K=5)=\frac{5}{9}=0{,}5555$
$P(K=6)=\frac{6}{11}=0{,}5454$

Mas probable en $k=4$ o $k=5$

6.15. 15)

K: Cantidad de piezas defectuosas en cada caja.

a) $P(K)=\begin{cases} 1/6 & k=0 \\ 4/6 & k=1 \\ 1/6 & k=2 \end{cases}$

b) Calculo la posibilidad de sacar X piezas defectuosas en una caja con K piezas defectuosas como $P(X=x|K=k)=\frac{\binom{k}{x}\cdot\binom{10-k}{2-x}}{\binom{10}{2}}$

La probabilidad de no sacar ninguna pieza defectuosa es:
$P(X=0)=P(X=0|K=0)\cdot P(K=0)+P(X=0|K=1)\cdot P(K=1)+P(X=0|K=2)\cdot P(K=2)=1\cdot\frac{1}{6}+\frac{4}{5}\cdot\frac{4}{6}+\frac{28}{45}\cdot\frac{1}{6}=\frac{217}{270}$

Calculo las demas probabilidades de la misma manera:
$P(X=1)=P(X=1|K=0)\cdot P(K=0)+P(X=1|K=1)\cdot P(K=1)+P(X=1|K=2)\cdot P(K=2)=0\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{6}+\frac{16}{45}\cdot\frac{1}{6}=\frac{26}{135}$

$P(X=2)=P(X=2|K=0)\cdot P(K=0)+P(X=2|K=1)\cdot P(K=1)+P(X=2|K=2)\cdot P(K=2)=0\cdot\frac{1}{6}+0\cdot\frac{4}{6}+\frac{1}{45}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{270}$

c) Son rechazadas si encuentran al menos una pieza defectuosa, por lo tanto, el porcentaje de cajas rechazadas va a ser $P(X=1)+P(X=2)=\frac{26}{135}+\frac{1}{270}=\frac{53}{270}=0{,}1963\rightarrow 19,63\,\%$

6.16. 16)

6.17. 17)

$P(abolladura)=0{,}1$
$P(rotura)=0{,}2$

a) $P(X=x)=\binom{8}{x}\cdot(P(abolladura)\cdot\overline{P(rotura)})^x\cdot(1-P(abolladura)\cdot\overline{P(rotura)})^{8-x}=\binom{8}{x}\cdot(0{,}08)^x\cdot(0{,}92)^{8-x}$

$\sum_{x=2}^{8} P(X = x) = 0{,}1298$

b) $P(X = x) = \binom{8}{x} \cdot (\overline{P(abolladura)} \cdot P(rotura))^x \cdot (1 - \overline{P(abolladura)} \cdot P(rotura))^{8-x} = \binom{8}{x} \cdot (0{,}18)^x \cdot (0{,}82)^{8-x}$
$P(X = 1) = 0{,}3589$

c) $P(X = x) = \binom{8}{x} \cdot (P(abolladura) \cdot P(rotura))^x \cdot (1 - P(abolladura) \cdot P(rotura))^{8-x} = \binom{8}{x} \cdot (0{,}02)^x \cdot (0{,}98)^{8-x}$
$\sum_0^1 P(X = x) = 0{,}9897$

d) $P(abolladura) \cdot \overline{P(rotura)} + \overline{P(abolladura)} \cdot P(rotura) + P(abolladura) \cdot P(rotura) = 0{,}28$
$P(X = x) = \binom{8}{x} \cdot (0{,}28)^x \cdot (0{,}72)^{8-x}$
$\sum_0^1 P(X = x) = 0{,}2969$

e) $P(X = x) = \binom{8}{x} \cdot (\overline{P(abolladura)} \cdot \overline{P(rotura)})^x \cdot (1 - \overline{P(abolladura)} \cdot \overline{P(rotura)})^{8-x} = \binom{8}{x} \cdot (0{,}72)^x \cdot (0{,}28)^{8-x}$
$\sum_1^8 P(X = x) = 0{,}99996$

f) $\frac{2!3!1!2!}{8!} \cdot (P(abolladura)^2 + P(rotura)^3 + (P(abolladura) \cdot P(rotura))^1 + (\overline{P(abolladura)} \cdot \overline{P(rotura)})^2) = 0{,}00035$

6.18. 18)

Si sabemos que ya elegimos dos articulos de la maquina A nos queda ver la probabilidad que eligiendo otros 8 articulos, 2 sean de la maquina B. Para eso evaluamos la probabilidad de todas las posibles combinaciónes que tengan a 2 articulos de la maquina B y luego lo sumamos. Primero tenemos que calcular las nuevas probabilidades ya que estamos acotando de A,B,C,D a B,C,D

$P(B) + P(C) + P(D) = 0{,}7$
$P(B) = 0{,}2 \rightarrow \frac{0{,}2}{0{,}7} = \frac{2}{7}$
$P(C) = 0{,}1 \rightarrow \frac{0{,}1}{0{,}7} = \frac{1}{7}$
$P(D) = 0{,}4 \rightarrow \frac{0{,}4}{0{,}7} = \frac{4}{7}$

$P(C = c, D = d) = \frac{8!}{2!x!y!} \cdot (\frac{2}{7})^2 \cdot (\frac{1}{7})^c \cdot (\frac{4}{7})^d$

C	D	P(C=c, D=d)
0	6	0.079578
1	5	0.119367
2	4	0.074604
3	3	0.024868
4	2	0.004663
5	1	0.000466
6	0	0.000019

Sumo todos los valores para obtener la probabilidad pedida $0{,}079578 + 0{,}119367 + 0{,}074604 + 0{,}024868 + 0{,}004663 + 0{,}000466 + 0{,}000019 = 0{,}30357$

6.19. 19)

6.20. 20)

N: Cantidad de tiros hasta el 1^{er} as $\sim Geom(1/6)$
M: Cantidad de 4 obtenidos

$M|N = n \sim Bi(n-1, 1/5)$ es $n-1$ ya que en la ultima tirada sabemos que no salio 4 (salio as), y la probabilidad es 1/5 ya que es la probabilidad de salir 4 sabiendo que no salio as.

$E[M|N=1] = \frac{n-1}{5} \Rightarrow E[M|N] = \frac{N-1}{5}$

$E[M] = E[E[M|N]] = E[\frac{N-1}{5}] = \frac{E[N]-1}{5} = \frac{6-1}{5} = 1$
$E[N^2] = V[N] + E^2[N] = \frac{5/6}{1/6^2} + 36 = 66$

$cov(N, M) = E[N \cdot M] - E[N] \cdot E[M] = E[E[NM|N]] - 6 = E[N \cdot E[M|N]] - 6 = E[N \cdot (\frac{N-1}{5})] - 6 = \frac{E[N^2]-E[N]}{5} - 6 = 6$

6.21. 21)

X: Cantidad de luces amarillas hasta detenerse.
Y: Cantidad de semaforos hasta el primer rojo $\sim Geom(0{,}45)$

$P(R) = 0{,}45$
$P(V) = 0{,}5$
$P(A) = 0{,}05$

$X|Y = y \sim Bi(y-1, \frac{1}{11})$ La probabilidad que aparece es la probabilidad que salga amarillo sabiendo que no salio rojo ($\frac{1}{11} = \frac{0{,}05}{0{,}55}$).

a) $E[X|Y=y]=\frac{y-1}{11} \Rightarrow E[X|Y]=\frac{Y-1}{11}$

$E[X]=E[E[X|Y]]=E[\frac{Y-1}{11}]=\frac{E[Y]}{11}-\frac{1}{11}=\frac{1}{11\cdot 0{,}45}-\frac{1}{11}=\frac{1}{9}$

$V[X|Y=y]=\frac{(y-1)(1-\frac{1}{11})}{11} \Rightarrow V[X|Y]=\frac{Y-1}{11}\cdot\frac{10}{11}$
$V[X|Y]=E[X^2|Y]-E[X|Y]^2 \Rightarrow E[X^2|Y]=\frac{Y^2+8Y-9}{121}$

$V[Y]=E[Y^2]-E[Y]^2 \Rightarrow E[Y^2]=4{,}691$

$V[X]=E[X^2]-E[X]^2=E[E[X^2|Y]]-E[X]^2=E[\frac{Y^2+8Y-9}{121}]-E[X]^2=\frac{E[Y^2]}{121}+\frac{8E[Y]}{121}-\frac{9}{121}-E[X]^2=0{,}099$

b) $P_X(x)=\sum_{\forall y}P_{X,Y}$
$P_{X,Y}(x,y)=P(X=x,Y=y)=P_Y\cdot P_{X|Y=y}=0{,}45\cdot(0{,}55)^{y-1}\binom{y-1}{x}\cdot(\frac{1}{11})^2\cdot(\frac{10}{11})^{y-1-x}$ con $y=1,2,3,...$ y $0\leq x<y-1$

6.22. 22)

C: cantidad de caras que salieron en la fase I. T: cantidad de tiros realizados en la fase II.

$C\sim Bi(n=5,p=0{,}5)$

$P(C=0)=1/32$
$P(C=1)=5/32$
$P(C=2)=10/32$
$P(C=3)=10/32$
$P(C=4)=5/32$
$P(C=5)=1/32$

$E[T]=E[E[T|C]]=E[T|C=0]\cdot P(C=0)+E[T|C=1]\cdot P(C=1)+.....+E[T|C=5]\cdot P(C=5)$

Para cada $T|C$ en particular:

$T|C=0=Pascal(p=0{,}5,r=4)->E[T|C=0]=4/0{,}5=8$
$T|C=1=Pascal(p=0{,}5,r=3)->E[T|C=1]=3/0{,}5=6$
$T|C=2=Pascal(p=0{,}5,r=2)->E[T|C=2]=2/0{,}5=4$
$T|C=3=Pascal(p=0{,}5,r=1)->E[T|C=3]=1/0{,}5=2$
$T|C=4=4->E[T|C=4]=4$
$T|C=5=5->E[T|C=5]=5$

$E[T]=8\cdot 1/32+6\cdot 5/32+4\cdot 10/32+2\cdot 10/32+4\cdot 5/32+5\cdot 1/32=3,84375$

7. Guia 7

7.1. 1)

$X \sim Pois(2)$
$P(X = x) = \frac{e^{-2} \cdot 2^x}{x!}$

a) $P(X > 3) = 1 - \sum_{x=0}^{3} P(X = x) = 0{,}1429$

b)

x	P(X=x)
0	0.1353
1	0.2707
2	0.2707
3	0.1804
4	0.0902
5	0.0361
6	0.0120
...	...

Se ve que los mayores valores se alcanzan en $x = 1$ y $x = 2$

c) Uno tenderia a pensar que la cantidad de buques atendidos es 2, ya que la esperanza de esta distribución vale eso, pero hay que recordar que no se pueden atender más de 3 botes, por lo tanto lo que vamos a hacer es calcular la esperanza de manera habitual pero para toda cantidad de barcos mayor a 3 vamos a considerar que son 3, ya que el resto se derivarian a otro puerto. Entonces hacemos el siguiente calculo para responder lo pedido $0 \cdot 0{,}1353 + 1 \cdot 0{,}2707 + 2 \cdot 0{,}2707 + 3 \cdot (1 - 0{,}1353 - 0{,}2707 - 0{,}2707) = 1{,}782$ Como dije, la probabilidad del tercer barco es toda la restante que no este en 0, 1 o 2.

c) Si sumamos las probabilidades de la tabla de arriba tenemos que para 0 a 3 buques (la situacion actual) hay una probabilidad de $0{,}1353 + 0{,}2707 + 0{,}2707 + 0{,}1804 = 0{,}8571$, si incluimos un barco más tendriamos 0,9473 y eso cumple con lo pedido.

7.2. 2)

$I \sim Pois(60)$

a) $Bi(2/3, 60)$

b) $M \sim Bi(2/3, 50)$

$P(I=50\cap M=35)=P_I(50)\cdot P(M=35)=\frac{e^{-60}60^{50}}{50!}\cdot\binom{50}{35}\cdot(\frac{2}{3})^{35}\cdot(1-\frac{2}{3})^{50-35}=0{,}0025$

c) Ya que la distribución de poisson tiene la propiedad que sumando dos distribuciones con μ_1 y μ_2 la distribución resultante tiene $\mu_3=\mu_1+\mu_2$. Para este caso tenemos que de 60 insectos $60\cdot\frac{2}{3}=40$ son moscas y 20 no-moscas, por lo tanto la distribución para las moscas es $Pois(40)$

7.3. 3)

$Tej\sim Pois(2)$
$Ten\sim Pois(4)$

a) $P_{Tej}(0)\cdot P_{Ten}(0)=\frac{e^{-2}2^0}{0!}\cdot\frac{e^{-4}4^0}{0!}=0{,}00248$

b) $P_{Tej}(1)\cdot P_{Ten}(0)+P_{Tej}(0)\cdot P_{Ten}(1)=\frac{e^{-2}2^1}{1!}\cdot\frac{e^{-4}4^0}{0!}+\frac{e^{-2}2^0}{0!}\cdot\frac{e^{-4}4^1}{1!}=0{,}01487$

c) $P_{Tej}(1)\cdot P_{Ten}(0)=\frac{e^{-2}2^1}{1!}\cdot\frac{e^{-4}4^0}{0!}=0{,}00496$
$P_{Tej}(0)\cdot P_{Ten}(1)=\frac{e^{-2}2^0}{0!}\cdot\frac{e^{-4}4^1}{1!}=0{,}009915$

Calculamos la probabilidad del primero truncando. $\frac{0{,}00496}{0{,}00496+0{,}009915}=\frac{1}{3}$

7.4. 4)

$U\sim\mho(3{,}8)$
$R|U=u\sim Pois(u)$

$f_U(u)=(\int_3^8 1\cdot du)^{-1}=\frac{1}{5}$
$P(R|U=u)(r)=\frac{e^{-u}u^r}{r!}$

Y recordemos que $P(R)(r)=\int_{-\infty}^{\infty}P(R|U=u)\cdot f_U(u)du$

El ejercicio pide $P(R\geq 1|U=u)=1-P(R=0|U=u)$

$\int_3^8 f_U(u)(1-P(R=0,U=u))du=\frac{1}{5}\cdot\int_3^8 1-\frac{e^{-u}u^0}{0!}du=0{,}99011$

7.5. 5)

$E[X]=\frac{1}{\lambda}=1000\Rightarrow\lambda=\frac{1}{1000}$
$X\sim Exp(\frac{1}{1000})$

a) $P(X>200)=1-P(X\leq 200)=1-(1-e^{\frac{200}{1000}})=e^{\frac{2}{10}}$

b) $P(X>1400|X>1200)=\frac{P(X>1400)}{P(X>1200)}=\frac{e^{-\frac{1400}{1000}}}{e^{-\frac{1200}{1000}}}=e^{-\frac{1}{5}}$

c) Muestra que la distribucion exponencial no tiene memoria.

7.6. 6)

7.7. 7)

$E[T]=\frac{1}{\lambda}=5\Rightarrow\lambda=\frac{1}{5}$

$X\sim Pois(4)$
$T\sim Exp(\frac{1}{5})$

$E[W]=E[W|X=0]\cdot P(X=0|X<3)+E[W|X=1]\cdot P(X=1|X<3)+E[W|X=2]\cdot P(X=2|X<3)=0\cdot\frac{e^{-4}}{e^{-4}+4e^{-4}+\frac{16}{2!}e^{-4}}+5\cdot\frac{e^{-4}.4^{1}}{e^{-4}+4e^{-4}+\frac{16}{2!}e^{-4}}+10\cdot\frac{\frac{16}{2!}.e^{-4}}{e^{-4}+4e^{-4}+\frac{16}{2!}e^{-4}}=7{,}6923$

$P(W\leq w|X=0)\cdot P(X=0|X<3)+P(W\leq w|X=1)\cdot P(X=1|X<3)+P(W\leq w|X=2)\cdot P(X=2|X<3)=P(T_1\leq w)\cdot\frac{4}{13}+P(T_1+T_2\leq w)\cdot 8$

$$F_W(w)=P(W\leq w)=\begin{cases}0 & w<0\\ P(T_1\leq w)\cdot\frac{4}{13}+P(T_1+T_2\leq w)\cdot 8z & w\geq 0\end{cases}$$

7.8. 8)

$X\sim Exp(3)\Rightarrow f_X(X)=3e^{-3x}$
$R|X=x\sim Pois(x)$

a) $P(R|X=x)(r)=\frac{e^{-x}x^r}{r!}$
$\int_0^\infty P(R=0|X=x)\cdot f_X(x)dx=\int_0^\infty 3e^{-3x}\cdot\frac{e^{-x}x^0}{0!}dx=\frac{3}{4}$

7.9. 9)

Aca hay un asunto con la notacion, nostros normalmente usabamos X_i en vez de $N(i)$, pero es lo mismo.

$X_t=N(T)$: Cantidad de exitos en t.

$X_1\sim Po(8)$
$X_2\sim Po(16)$
$X_3\sim Po(24)$

a) $P(N(1) = 2) = P(X_1 = 2) = \frac{e^{-8}8^2}{2!} = 0{,}0107$

b) En este punto pide que la resta entre el punto 2 y 1 sea igual a 3, como la distribución de Poisson no tiene memoria es lo mismo pedir que el punto 1 sea igual a 3.

$P(N(2) - N(1) = 3) = P(X_2 - X_1 = 3) = P(X_1 = 3) = \frac{e^{-8}8^3}{3!} = 0{,}0286$

c) $P(X_1 = 2 \cap X_1 = 3 \cap X_2 = 5) = \frac{e^{-8}8^2}{2!} \cdot \frac{e^{-8}8^3}{3!} \cdot \frac{e^{-16}16^5}{5!} = 3x10^{-7}$

d) Para hacer calculos de este tipo usamos la distribución Gamma, que recibe como parametros λ que es el mismo que el que usamos para Poisson y n que es la cantidad de veces que queremos que ocurra el evento en ese periodo de tiempo.

$T \sim Ga(4, 8)$

$E[T] = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

e) $N(1) = 2$ Quiere decir que ocurrieron 2 eventos en el primer minuto, por lo tanto la esperanza que queremos calcular es ahora la esperanza de que ocurran los dos eventos restantes sumado el minuto que ya ocurrio, calculamos como:

$J \sim Ga(2, 8)$

$E[T|N(1) = 2] = 1 + E[J] = 1 + \frac{2}{8} = \frac{5}{4}$

7.10. 10)

a)$X \sim Pois(15)$ 15 clientes en media hora
$P(X = 15) = \frac{e^{-15}15^{15}}{15!} = 0{,}1024$

b) Usamos la distribución Gamma como en el item d del inciso anterior.
$S_2 \sim Ga(2, 30)$

La función de probabilidad de la distribución Gamma esta definida como $f(x|\lambda, n) = \frac{\lambda^n}{(n-1)!}t^{n-1}e^{-\lambda t}$. Si buscamos la probabilidad de que la segunda llegada ocurra en más de 5 minutos hacemos la siguiente integral:

$\int_{\frac{1}{12}}^{\infty} \frac{30^2}{1!} t^1 e^{-30t} dt = 0{,}2873$

7.11. 11)

$X \sim Pois(12)$

a) $X_1 \sim Ga(1, 12)$

Esta integral se puede calcular haciendo el complemento y asi no te queda una integral con limite en infinito.

$\int_{\frac{1}{12}}^{\infty} 12e^{-12t}dt = 1 - \int_0^{\frac{1}{12}} 12e^{-12t}dt = 0{,}3679$

b) Exactamente igual al item anterior, como la distribución de Poisson no tiene memoria es lo mismo que empiece 19:30 o 19:31.

7.12. 12)

$N \sim Pois(10)$

a) $P(X_{0-20} = 2|X_{60} = 2)) = \frac{P(X_{0-20}=2 \cap X_{20-60}=0)}{P(X_{60}=2)} = \frac{\frac{e^{-10/3}(10/3)^2}{2!} \cdot \frac{e^{-20/3}(20/3)^0}{0!}}{\frac{e^{-10}10^2}{2!}} = \frac{1}{9}$

b)$\frac{P(X_{0-20}=1 \cap X_{20-60}=1)+P(X_{0-20}=2 \cap X_{20-60}=0)}{P(X_{60}=2)} = \frac{\frac{e^{-10/3}(10/3)^1}{1!} \cdot \frac{e^{-20/3}(20/3)^1}{1!} + \frac{e^{-10/3}(10/3)^2}{2!} \cdot \frac{e^{-20/3}(20/3)^0}{0!}}{\frac{e^{-10}10^2}{2!}} = \frac{5}{9}$

Esta bueno aclarar que se pueden separar las probabilidades asi ya que es una unión de procesos mutuamente excluyentes.

7.13. 13)

Podemos considerar a las paginas como tiempo y pensar que la distribucion de errores es $E \sim Pois(1)$ 1 error por pagina para saber el tiempo (en este caso pagina) hasta los primeros tres errores lo expresamos con la siguiente distribución $T \sim Ga(3, 1)$

La probabilidad buscada es:
$1 - \sum_{x=0}^{2}(\int_0^1 \frac{1^x.t^{x-1}.e^{-t}}{(x-1)!}dt) = 0{,}1036$

7.14. 14)

7.15. 15)

Fallas en el alambre $\sim PPo(\lambda = \frac{1}{25})$
Segun el teorema del adelgazamiento (o de coloración) tenemos que: fallas detectadas $\sim PPo(\lambda_D = \lambda \cdot P(0) = \frac{1}{25} \cdot 0{,}9 = \frac{9}{250})$

$T \sim Exp(\lambda_D)$ siendo T la longitud hasta la primer falla.

L: longitud de los rollos.
$L = \begin{cases} T & T < 25 \\ 25 & T \geq 25 \end{cases}$

$E[T|T \geq 25] = 25 + E[T] = 25 + \frac{250}{9} = \frac{475}{9}$ Podemos hacer esto para esta distribución ya que no tiene memoria.

$E[T] = E[T|T < 25]P(T < 25) + E[T|T \geq 25]P(T \geq 25) \Rightarrow E[T|T < 25]P(T < 25) = E[T] - E[T|T \geq 25]P(T \geq 25) = \frac{250}{9} - \frac{475}{9} \cdot e^{-9/10} = 6{,}32$

$E[L] = E[L|T < 25]P(T < 25) + E[L|T \geq 25]P(T \geq 25) = 6{,}32 + 25e^{-9/10} = 16{,}48$

Se vio que reemplaze $E[L|T < 25]$ con $E[T|T < 25]$ y eso es valido porque hay que recordar que para $T < 25$ tenemos que $T = L$

7.16. 16)

7.17. 17)

Familias que migran $\sim PPo(\lambda = 4)$ familias por semana.

$N_i = n^{\text{o}}$de integrantes de la familia i

N_i	P
2	0.1
3	0.2
4	0.3
5	0.5

T: Cantidad de personas que migran en 15 semanas.

$T = \sum_{i=1}^{X} N_i$
$T|X = x = \sum_{i=1}^{x} N_i$

$X \sim Pois(60)$ familias

$E[T|X = x] = E[\sum_{i=1}^{x} N_i] = \sum_{i=1}^{x} E[N_i] = xE[N_i] = \varphi$

$E[T|X] = \varphi(x) = 4x$

$E[T] = E[E[T|X]] = E[4x] = 4E[X] = 240$

7.18. 18)

Arribo de vehiculos $\sim PPo(\lambda = 40)$ Vehiculos / min

a) X: Cantidad de autos en 30 minutos $X \sim Po(10 \cdot 0,7 \cdot 30)$

$P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = \frac{e^{-210}210^0}{0!} + \frac{e^{-210}210^1}{1!} + \frac{e^{-210}210^2}{2!} = 1,4x10^{-87} \simeq 0$

b) $X_A \sim Pois(0{,}7 \cdot 10)$ Autos
$X_M \sim Pois(0{,}1 \cdot 10)$ Motos
$X_C \sim Pois(0{,}2 \cdot 10)$ Camiones

$P(X_A = 7 \cap X_M = 1 \cap X_C = 2) = P(X_A = 7)P(X_M = 1)P(X_C = 2) = \frac{e^{-7}7^7}{7!} \cdot \frac{e^{-1}1^1}{1!} \cdot \frac{e^{-2}2^2}{2!} =$ 0,0148

c) Q: Carga del vehiculo.

$E[Q] = E[Q|A]P(A) + E[Q|M]P(M) + E[Q|C]P(C) = 552$

X: tiempo de vehiculo

$$Q = \begin{cases} 400 & x = 1 \\ 120 & x = 2 \\ 1300 & x = 3 \end{cases}$$

Q	P(x)
400	0.7
120	0.1
1300	0.2

d) Arrivo de vehiculos $\sim PPo(\lambda = 600)$ Vehiculos/hora
T : Carga total en 1 hora.

$Y_A \sim Pois(0{,}7 \cdot 600)$
$Y_M \sim Pois(0{,}1 \cdot 600)$
$Y_C \sim Pois(0{,}2 \cdot 600)$

$T = 400Y_A + 120Y_M + 1300Y_C$
$E[T] = 400E[Y_A] + 120E[Y_M] + 1300E[Y_C] = 400 \cdot 420 + 120 \cdot 60 + 1300 \cdot 120 = 331200$

8. Guia 8

Se agradecen las colaboraciones de Tomas Boccardo.

8.1. 1)

Aca solamente buscamos las probabilidades en la tabla y reemplazamos.

a) $P(-0{,}43 < X < 1{,}32) = P(1{,}32) - P(-0{,}43) = 0{,}9066 - 0{,}3336 = 0{,}573$
$P(1{,}28 < X < 1{,}64) = P(1{,}64) - P(1{,}28) = 0{,}9495 - 0{,}8997 = 0{,}0498$
$P(|X| < 1{,}64) = P(-1{,}64 < X < 1{,}64) = P(1{,}64) - P(-1{,}64) = 0{,}9495 - 0{,}0505 = 0{,}899$

b) $P(X < a) = 0{,}1 \Rightarrow a = -1{,}28$
$P(X > b) = 1 - P(X < b) = 0{,}2 \Rightarrow b = 0{,}84$
$P(|X| < c) = P(-c < X < c) = P(c) - P(-c) = P(c) - (1 - P(c)) = 2P(c) - 1 = 0{,}95 \rightarrow c = 1{,}96$

8.2. 2)

El problema no tiene un objetivo claro, capas pretenden que hablemos sobre la relacion entre la media y la varianza, recordar que $\sigma = \sqrt{V[X]}$ es la desviación e indica cuanto varia desde la media.

8.3. 3)

8.4. 4)

Proveedor A, media 15 y varianza 9. Distribución normal.
Proveedor B, media 23 y desvio 3. Distribución normal.

Los errores que se pueden cometer son dos: agarrar una arandela y clasificarla como A cuando es de B, y agarrar una arandela y clasificarla como B y que sea A.

La probabilidad de clasificar mal una arandela A es: $\int_{19}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x})^2} dx = \int_{19}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi} \cdot 3} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-15}{3})^2} dx = 0{,}09121$

La probabilidad de clasificar mal una arandela B es: $\int_{-\infty}^{19} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x})^2} dx = \int_{-\infty}^{19} \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi} \cdot 3} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-23}{3})^2} dx = 0{,}09121$

8.5. 5)

$X \sim N(100, \sigma^2) \xrightarrow{Estandarizamos} Z \sim N(0,1) \to \frac{x-100}{\sigma}$

Pide que el 90 % sea mayor a 80 asi que buscamos la probabilidad $(1 - 0{,}9) = 0,1$ en la tabla de normales, $P(-1{,}28) = 0{,}1$. Reemplazamos:

$\frac{80-100}{\sigma} = -1{,}28 \Rightarrow \sigma = 15{,}625 \Rightarrow \sigma^2 = V[X] = 244$

8.6. 6)

P: Peso de los novillos.

$P \sim N(\mu, \sigma)$

$P(-1{,}48) \simeq 0{,}07 \Rightarrow \frac{410-\mu}{\sigma} = -1{,}48$
$P(1{,}28) \simeq 0{,}9 \Rightarrow \frac{500-\mu}{\sigma} = 1{,}28$

Despejamos de ambas ecuaciónes y obtenemos $\mu = 458{,}26$ y $\sigma = 32{,}8$

a) Al pedir el peso superado por el 15 % de los novillos tenemos que buscar un peso que no lo superen el 85 %.

$P(1{,}04) \simeq 0{,}85$

$\frac{x-458{,}26}{32{,}8} = 1{,}04 \Rightarrow x = 492{,}37$

b) Buscamos un rango de pesos donde aseguremos que el 95 % de los novillos esten en esos valores.
$P(-1{,}96) = 0{,}025 \Rightarrow \frac{x-458{,}26}{32{,}8} = -1{,}96 \Rightarrow x = 394$
$P(1{,}96) = 0{,}975 \Rightarrow \frac{x-458{,}26}{32{,}8} = 1{,}96 \Rightarrow x = 522{,}5$

c) La probabilidad la calculamos como: $\int_0^{400} \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi} \cdot 32{,}8} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-458{,}26}{32{,}8})^2} dx = 0{,}03784$

Calculo la probabilidad de que haya alguno con una distribución binomial:
$X \sim Bi(0{,}03784, 25)$

La probabilidad pedida es $1 - P(X = 0) = 1 - \binom{25}{0} \cdot (0{,}03784)^0 \cdot (1 - 0{,}03784)^{25} = 0{,}61877$

8.7. 7)

Vale aclarar que este ejercicio no tiene un resultado oficial, esta es la solución que proponemos.

$X \sim U(3,4) \Rightarrow f_X(x) = 1$

$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{Y|X=x}(y) \cdot f_X(x)dx$
$f_Y(5) = \int_3^4 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{5-x}{1})^2} dx = 0{,}1359$

8.8. 8)

8.9. 9)

8.10. 10)

X: Peso neto.
Y: Peso envase.

$X \sim N(49,8; 1{,}2)$ $C_X = 0{,}06 \frac{1}{gr}$
$Y \sim N(8{,}2; 0{,}6)$ $C_Y = 0{,}0085 \frac{1}{gr}$

C: Costo total
$C = 0{,}06X + 0{,}008Y$

$E[C] = E[0{,}06X + 0{,}008Y] = 0{,}06E[X] + 0{,}008E[Y] = 3{,}05$
$V[C] = V[0{,}06X + 0{,}008Y] = 0{,}06^2 V[X] + 0{,}008^2 V[Y] = 0{,}00521 \Rightarrow \sigma = 0{,}07216$ Ya que X e Y son independientes.

$C \sim N(3{,}05; 0{,}072)$

$P(C < 3) = P(z < \frac{3-3{,}05}{0{,}072}) = P(z < -0{,}69) = 0{,}2451$

b) $P(C > 1{,}02C_X X) = P(C - 1{,}02C_X X > 0)$ Cambiamos variables:
$W = C - 1{,}02C_X X = 0{,}06X + 0{,}008Y - 1{,}02 \cdot 0{,}06X = 0{,}008Y - 0{,}0012X$

$E[W] = 0{,}00584$
$V[W] = V[0{,}008Y - 0{,}0012X] = 0{,}008^2 V[Y] + (-0{,}0012)^2 V[X] = 0{,}000025 \Rightarrow \sigma = 0{,}005$

$W \sim N(0{,}00584, 0{,}005)$

$P(W > 0) = 1 - P(W < 0) = 1 - \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot 0{,}005}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-0{,}00584}{0{,}005})^2} dx = 0{,}878$

8.11. 11)

Para resolver este ejercicio debemos recordar la propiedad de la distribución normal que dice:

$X_1, X_2, ..., X_N$ son v.a. independientes, $X_i \sim N(\mu_i, \sigma^2) \Rightarrow a_1X_1 + a_2X_2 + ... + a_nX_n \sim N(\mu = a_1\mu_1 + ... + a_n\mu_n; \sigma^2 = a_1^2\sigma_1^2 + ... + a_n^2\sigma_n^2)$.

$A \sim Pois(1/2)$ articulos/ hora
$M \sim N(240, 70)$
Para un lapso de 6 horas $\Rightarrow X \sim Pois(1/2 \cdot 6 = 3)$

$P(X = 2) = \frac{e^{-3}3^2}{2!} = 0{,}22404$
$P(X = 3) = \frac{e^{-3}3^3}{3!} = 0{,}22404$
$P(X = 4) = \frac{e^{-3}3^4}{4!} = 0{,}16803$

Para las distintas cantidades de articulos vendidos tenemos las siguientes distribuciones para el monto adquirido:
$M_2 \sim N(480, 99) \Rightarrow P(M_2 > 680) = \int_{680}^{\infty} \frac{e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-480}{99})^2}}{\sqrt{2\pi}99} dx = 0{,}02168$
$M_3 \sim N(720, 121{,}2) \Rightarrow P(M_2 > 680) = \int_{680}^{\infty} \frac{e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-720}{121{,}2})^2}}{\sqrt{2\pi}121{,}2} dx = 0{,}62927$
$M_4 \sim N(960, 140) \Rightarrow P(M_2 > 680) = \int_{680}^{\infty} \frac{e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-960}{140})^2}}{\sqrt{2\pi}140} dx = 0{,}97725$

$P(M > 680|A = 2 \cup A = 3 \cup A = 4) = \frac{P(M_2>680)P(A=2)+P(M_3>680)P(A=3)+P(M_4>680)P(A=4)}{P(A=2)+P(A=3)+P(A=4)} = 0{,}5032$

8.12. 12)

8.13. 13)

a)$A = \sum_{i=1}^{60} a_i$

$Z_A = \frac{\sum_{i=1}^{60} a_i - 60\cdot 100}{\sqrt{60}\cdot 45}$

$P(A > 6500) = P(\sum_{i=1}^{60} a_i - 60 \cdot 100 > 6500 - 60 \cdot 100) = P(Z_A > \frac{6500-60\cdot 100}{\sqrt{60}\cdot 45}) = P(Z > 1{,}43444) = 0{,}0757$

b) $P(B > 1{,}3C) = P(B - 122{,}2\cdot 60 > 1{,}3C - 122,2\cdot 60) = P(B - 122{,}2\cdot 60 > 1{,}3\cdot(C - 94\cdot 60)) = P(\frac{B-120\cdot 60-2{,}2\cdot 60}{\sqrt{60}\cdot 30} > \frac{1{,}3\cdot(C-94\cdot 60)}{\sqrt{60}\cdot 15\cdot 2}) = P(\frac{B-120\cdot 60}{\sqrt{60}\cdot 30} - \frac{2{,}2\cdot 60}{\sqrt{60}\cdot 30} > \frac{1{,}3}{2} \cdot \frac{\cdot C-94\cdot 60}{\sqrt{60}\cdot 15})$

Ahora recordemos lo que plantea el teorema central del limite:
$Z_B = \frac{\sum_1^{60} b_1 - 120\cdot 60}{\sqrt{60}\cdot 30} = \frac{B-120\cdot 60}{\sqrt{60}\cdot 30}$
$Z_C = \frac{\sum_1^{60} c_1 - 94\cdot 60}{\sqrt{60}\cdot 15} = \frac{C-94\cdot 60}{\sqrt{60}\cdot 15}$

Reemplazamos:

$P(Z_B - \frac{2{,}2\cdot 60}{\sqrt{60}\cdot 30} > \frac{1{,}3}{2}\cdot Z_C) = P(\frac{2}{1{,}3}\cdot Z_B - Z_C > \frac{2}{1{,}3}\cdot\frac{2{,}2\cdot 60}{\sqrt{60}\cdot 30}) = P(\frac{2}{1{,}3}\cdot Z_B - Z_C > 0{,}873904)$

Defino la variable: $Z_{AB} = \frac{2}{1{,}3}\cdot Z_B - Z_C$

$E[Z_{AB}] = E[\frac{2}{1{,}3}\cdot Z_B - Z_C] = \frac{2}{1{,}3}\cdot E[Z_B] - E[Z_C] = 0$
$V[Z_{AB}] = V[\frac{2}{1{,}3}\cdot Z_B - Z_C] = (\frac{2}{1{,}3})^2 V[Z_B] + (-1)^2 V[Z_C] = 3{,}36686 \Rightarrow \sigma_{AB} = 1{,}8349$

Por lo tanto ahora sabemos que $Z_{AB} \sim N(0; 1{,}8349)$

Solo nos queda calcular $P(Z_{AB} > 0{,}873904) = \int_{0{,}873904}^{\infty} \frac{e^{-\frac{1}{2}(\frac{x}{1{,}8349})^2}}{\sqrt{2\pi}*1{,}8349} = 0{,}31694$

8.14. 14)

8.15. 15)

P(dar en el blanco) = 1/2
$m = 12$ disparos
K: # aciertos $\sim Bi(n = 12, p = 1/2)$

a) Se puede calcular de forma exacta como $P(k = 6) = \binom{12}{6}\cdot(\frac{1}{2})^6\cdot(\frac{1}{2})^6 = 0{,}22559$

Para la forma aproximada usamos el teorema central del limite.

$P(k = 6) \simeq \frac{1}{\sqrt{12\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}}\cdot f_Z\left(\frac{6-12\cdot\frac{1}{2}}{\sqrt{12\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}}\right) \xrightarrow{f_Z(z)=\frac{e^{-\frac{1}{2}z^2}}{\sqrt{2\pi}}} 0{,}23033$

Tambien se puede calcular como:

$P(K = 6) \simeq \Phi\left(\frac{6+0{,}5-6}{\sqrt{12\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}}\right) - \Phi\left(\frac{6-0{,}5-6}{\sqrt{12\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}}\right) = 0{,}2272$

b) Se puede calcular de forma exacta sabiendo que: $P(X = x) = \binom{12}{x}\cdot(\frac{1}{2})^x\cdot(\frac{1}{2})^{12-x}$

$\sum_{x=6}^{12}\binom{12}{x}\cdot(\frac{1}{2})^x\cdot(\frac{1}{2})^{12-x} = 0{,}6128$

Para la forma aproximada sabemos que $P(K = k) \simeq \frac{e^{-\frac{1}{2}*(\frac{k-6}{\sqrt{12/4}})^2}}{\sqrt{12/4}*\sqrt{2\pi}}$
La probabilidad pedida es entonces:
$\sum_{x=6}^{12}\frac{e^{-\frac{1}{2}*(\frac{x-6}{\sqrt{12/4}})^2}}{\sqrt{12/4}*\sqrt{2\pi}} = 0{,}6151$

Tambien se puede hacer de la otra forma, solamente buscando en la tabla.
Vimos que $P(K = k) \simeq \Phi\left(\frac{k+0{,}5-6}{\sqrt{12\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}}\right) - \Phi\left(\frac{k-0{,}5-6}{\sqrt{12\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}}\right)$

Por lo tanto:
$\sum_{k=6}^{12} P(K=k) = \Phi\left(\frac{12+0,5-6}{\sqrt{12\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}}\right) - \Phi\left(\frac{6-0,5-6}{\sqrt{12\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}}\right) = 0{,}99925 - 0{,}38642 = 0{,}61283$

c) Ya calculamos la forma exacta en cada punto.
Para a) el error es $|0{,}22559 - 0{,}23033 = 0{,}00474$
Para b) el error es $|0{,}6128 - 0{,}61283 = 0{,}00003$

8.16. 16)

8.17. 17)

$\epsilon_i = X_i - R_i \sim U(-0{,}5, 0{,}5)$

$S_3 = \sum_{i=1}^{3} \epsilon_i$

Recordemos que $\frac{\sum_{i=1}^{3}\epsilon_i - 3\cdot 0}{\sqrt{3\cdot\frac{1}{12}}} \sim N(0,1)$

Los resultados que aparecen son para:
$P(|S_3| < 1) = P\left(\frac{|S_3|}{\sqrt{3\cdot\frac{1}{12}}} < \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{12}}}\right) = P(|Z| < 2) = \Phi(2) - \Phi(-2) = 0{,}97725 - 0{,}02275 = 0{,}9545$
Pero en verdad se esta pidiendo justo lo opuesto, que la suma difiera en más de 1, no en menos. Hacemos complemento y listo.
$P(|S_3| > 1) = 1 - P(|S_3| < 1) = 0{,}0455$

8.18. 18)

8.19. 19)

$X \sim Pois(2{,}5)$ fallas/mes
$Y \sim Pois(0{,}25)$ fallas/0.1mes

$S_{672} = \sum_{0}^{672} Y_i$

Definamos: $Z = \frac{\sum_0^{672} Y_i - 672\cdot 0{,}25}{\sqrt{672\cdot 0{,}25}}$

$P(S_{672} > 196) = P(S_{672} - 672\cdot 0{,}25 > 196 - 672\cdot 0{,}25) = P(\frac{S_{672}-672\cdot 0{,}25}{\sqrt{672\cdot 0{,}25}} > \frac{196-672\cdot 0{,}25}{\sqrt{672\cdot 0{,}25}}) = P(Z > \frac{\sqrt{42}}{3}) = 1 - \Phi(\frac{\sqrt{42}}{3}) = 1 - 0{,}98462 = 0{,}01538$

8.20. 20)

$C \sim U(3,5) \Rightarrow f_C(c) = \frac{1}{2}$

Hacemos un cambio de variables para el peso. $Q = C^3$

$F_Q(q) = P(Q \leq q) = P(C^3 \leq q) = P(C \leq (q)^{1/3}) = \int_3^{(q)^{1/3}} \frac{1}{2} dq = \frac{(q)^{1/3}-3}{2} \Rightarrow f_Q(q) = \frac{1}{6q^{2/3}}$ para $27 < q < 125$

$E[Q] = \int_{27}^{125} \frac{q}{6q^{2/3}} dq = 68$
$E[Q^2] = \int_{27}^{125} \frac{q^2}{6q^{2/3}} dq = 5424$
$V[Q] = E[X^2] - E[X] = 800$

La suma de los pesos seria:
$S_{100} = \sum_{i=0}^{100} Q_i$

Definamos: $Z = \frac{\sum_{i=0}^{100} Q_i - 100 \cdot 68}{\sqrt{100 \cdot 800}}$

$P(q + 100 > 9600) = P(q > 9500) = P(q - 100 \cdot 68 > 9500 - 100 \cdot 68) = P(Z > \frac{9500 - 100 \cdot 68}{\sqrt{100 \cdot 800}}) = P(Z > 9{,}5459) = 1 - \Phi(9{,}5459) = 1 - 1 = 0$

8.21. 21)

$R \sim N(500, 120)$
$D \sim N(0{,}1; 0{,}03)$

Defino una variable para el costo total: $C = 0{,}8R + (0{,}8 + 3{,}6)D = 0{,}8R + 4{,}4D$

$E[C] = 0{,}8E[R] + 4{,}4E[D] = 400{,}44$
$V[C] = 0{,}8^2 V[R] + 4{,}4^2 V[D] = 9216 \Rightarrow \sigma = 96$

$P(C > a) > 0{,}9 \Rightarrow P(C < a) < 0{,}1$
$P(-1{,}28) \simeq 0{,}1$

$\frac{x - 400{,}44}{96} = -1{,}28 \Rightarrow x = 277{,}56$ Esta es la ganancia por dia, para obtener la de 90 dias simplemente multiplicamos.

Ganancia en 90 días. $277{,}56 \cdot 90 = 24980$

8.22. 22)

8.23. 23)

$V_L \sim U(1, 3)$
$V_M \sim U(2, 4)$

Definimos: $X = \sum_{i=1}^{n} V_i$

$V|_{I=L} = V_L$ con $P(I = L) = 0{,}6$
$V|_{I=M} = V_M$ con $P(I = M) = 0{,}4$

$E[V] = E[V|_{I=L}]P(I = L) + E[V|_{I=M}]P(I = M) = 2 \cdot 0{,}6 + 3 \cdot 0{,}4 = 2{,}4$
$Var[V] = Var[V|_{I=L}]P(I = L) + Var[V|_{I=M}]P(I = M) + (E[V|_{I=L}] - E[V])^2 P(I = L) + (E[V|_{I=M}] - E[V])^2 P(I = M) = 0{,}6 \cdot \frac{1}{3} + 0{,}4 \cdot \frac{1}{3} + (2 - 2{,}4)^2 \cdot 0{,}6 + (3 - 2{,}4)^2 \cdot 0{,}4 = 0{,}5733 \Rightarrow \sigma = 0{,}7572$

$P(\sum_{i=1}^{n} V_i > 4000) = P(\frac{\sum_{i=1}^{n} V_i - n \cdot 2{,}4}{\sqrt{n} \cdot 0{,}7572} > \frac{4000 - n \cdot 2{,}4}{\sqrt{n} \cdot 0{,}7572}) = P(Z > \frac{4000 - n \cdot 2{,}4}{\sqrt{n} \cdot 0{,}7572}) > 0{,}9$
Sabemos que $P(Z > -1{,}28) = 0{,}9$

Por lo tanto despejamos n de la siguiente expresión:
$\frac{4000 - n \cdot 2{,}4}{\sqrt{n} \cdot 0{,}7572} < -1{,}28$
$0 < 2,4n - 0{,}09691\sqrt{n} - 4000 \Rightarrow n \geq 1683$

9. Guia 9

9.1. 1)

$$f_{X|\theta=n} = \begin{cases} nx^{n-1} & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{En otro caso} \end{cases}$$

A priori: $P_\theta(n) = \frac{1}{6} \forall n \in [1, 6]$ ya que es uniforme.

A posteriori: $P_\theta(n|\underline{X}) = \frac{\prod_{i=1}^{5}(f_{x|\theta=n}(X_i))\cdot P_\theta(n)}{\sum_{\forall n}\prod_{i=1}^{5}(f_{x|\theta=n}(X_i))\cdot P_\theta(n)} = \frac{\prod_{i=1}^{5}(nX_i^{n-1})\cdot P_\theta(n)}{\sum_{\forall n}\prod_{i=1}^{5}(nX_i^{n-1})\cdot P_\theta(n)} = \frac{n^5\cdot(0{,}69\cdot 0{,}21\cdot 0{,}89\cdot 0{,}79\cdot 0{,}46)^{n-1}\cdot P_\theta(n)}{\sum_{\forall n} n^5\cdot(0{,}69\cdot 0{,}21\cdot 0{,}89\cdot 0{,}79\cdot 0{,}46)^{n-1}\cdot P_\theta(n)} =$ $\frac{n^5\cdot 0{,}04686^{n-1}\cdot P_\theta(n)}{\sum_{\forall n} n^5\cdot 0{,}04686^{n-1}\cdot P_\theta(n)} = \frac{n^5\cdot 0{,}04686^{n-1}\cdot P_\theta(n)}{0{,}5259} = \frac{n^5\cdot 0{,}04686^{n}\cdot \frac{1}{6}}{0{,}5259\cdot 0{,}04686} = \frac{n^5\cdot 0{,}04686^{n}}{0{,}1478}\ n \in [1, 6]$

La parte del denominador de la formula anterior hace que la suma de todas las probabilidades de 1, se puede verificar.

n	P($\theta = n$)
1	0.3171
2	0.4754
3	0.1692
4	0.0334
5	0.0048
6	0.0006

$E[\theta] = 1\cdot 0{,}3171 + 2\cdot 0{,}4754 + 3\cdot 0{,}1692 + 4\cdot 0{,}0334 + 5\cdot 0{,}0048 + 6\cdot 0{,}0006 = 1{,}937$

La moda (el punto donde hay mayor probabilidad) es en $n = 2$.

9.2. 2)

X: Longitud.
$X|\mu = m \sim N(\mu, 2)$
$P(\mu = 10) = 0{,}25$
$P(\mu = 14) = 0{,}75$

a) A posteriori:
$P_\mu(m|x) = \frac{f_{x|\mu=m}(X_1)\cdot P(\mu=m)}{\sum_{\forall m} f_{x|\mu=m}(X_1)\cdot P(\mu=m)}$

Si $m = 10$:
$P_\mu(10|x) = \frac{f_{x|\mu=10}(X_1)\cdot P(\mu=10)}{\sum_{\forall m} f_{x|\mu=m}(X_1)\cdot P(\mu=m)} = \frac{e^{-\frac{1}{2}(\frac{12{,}1-10}{2})^2}\cdot 0{,}25}{e^{-\frac{1}{2}(\frac{12{,}1-10}{2})^2}\cdot 0{,}25 + e^{-\frac{1}{2}(\frac{12{,}1-14}{2})^2}\cdot 0{,}75} = 0{,}2317$

Si $m = 14$:
$P_\mu(14|x) = \frac{f_{x|\mu=14}(X_1)\cdot P(\mu=14)}{\sum_{\forall m} f_{x|\mu=m}(X_1)\cdot P(\mu=m)} = \frac{e^{-\frac{1}{2}(\frac{12,1-14}{2})^2}\cdot 0,75}{e^{-\frac{1}{2}(\frac{12,1-10}{2})^2}\cdot 0,25+e^{-\frac{1}{2}(\frac{12,1-14}{2})^2}\cdot 0,75} = 0,7683$

b) $P(X > 13) = P(X > 13|\mu = 10)\cdot P(\mu = 10|x) + P(X > 13|\mu = 14)\cdot P(\mu = 14|x)$
$P(X > 13) = 0,06681 \cdot 0,2317 + 0,6915 \cdot 0,7683 = 0,5468$

9.3. 3)

X: cantidad bolas blancas extraidas.
$X|B = b \sim Hipergeometrica(2, 6, b)$ b es la cantidad de bolas blancas.

Recordar que para la distribución hipergeometrica:
$P(r) = \frac{\binom{R}{r}\cdot\binom{N-R}{n-r}}{\binom{N}{n}}$

$P_B(b) = \frac{1}{6}\forall b \in [0, 6]$

a) A posteriori: $P_B(b|\underline{X}) = \frac{P_{x|B=b}(X_1)\cdot P(B=b)}{\sum_{\forall b} P_{x|B=b}(X_1)\cdot P(B=b)}$

Con $X = 1$:
$P_B(b|1) = \frac{P_{x|B=b}(1)\cdot P(B=b)}{\sum_{\forall b} P_{x|B=b}(1)\cdot P(B=b)} = \frac{\frac{\binom{B}{1}\cdot\binom{6-B}{2-1}}{\binom{6}{2}}\cdot\frac{1}{6}}{\sum_{\forall b} P_{x|B=b}(1)\cdot P(B=b)} = \frac{\frac{\frac{b!}{1!\cdot(b-1)!}\cdot\frac{(6-b)!}{(2-1)!\cdot(6-b-(2-1))!}}{15}\cdot\frac{1}{6}}{\sum_{\forall b} P_{x|B=b}(1)\cdot P(B=b)} = \frac{\frac{b(6-b)}{15\cdot 6}}{\sum_{\forall b} P_{x|B=b}(1)\cdot P(B=b)} = \frac{b(6-b)}{35}\forall b \in [0, 6]$

b)

b	P$(B = b)$
0	0
1	0.1429
2	0.2286
3	0.2571
4	0.2286
5	0.1429
6	0

$E[B] = 0\cdot 0 + 1\cdot 0,1429 + 2\cdot 0,2286 + 3\cdot 0,2571 + 4\cdot 0,2286 + 5\cdot 0,1429 + 61\cdot 0 = 3,0003 \simeq 3$

9.4. 4)

$f_{W|\theta} = \begin{cases} \frac{1}{2}(w-\theta) & \theta \le w \le \theta + 2 \\ 0 & \text{En otro caso} \end{cases}$

$\theta \sim U(0,10) \xrightarrow{\text{A priori}} f_\theta(n) = \frac{1}{10} \forall n \in [0,10]$

A posteriori: $f_\theta(n|X) = \frac{f_{n|\theta}(5)\cdot f_\theta(n)}{\int_0^{10} f_{n|\theta}(5)\cdot f_\theta(n)\cdot dn} = \frac{\frac{1}{2}(5-n)\cdot\frac{1}{10}}{\int_0^3 0\cdot\frac{1}{10}dn+\int_3^5 \frac{1}{2}(5-n)\cdot\frac{1}{10}dn+\int_7^{10} 0\cdot\frac{1}{10}dn} =$
$\frac{\frac{1}{2}(5-n)\cdot\frac{1}{10}}{\frac{1}{10}} = \frac{5}{2} - \frac{n}{2} \forall n \in [3,5]$

9.5. 5)

$$f_{X|\theta=a} = \begin{cases} ax^2 & 0 < x < b \\ 0 & \text{En otro caso} \end{cases}$$

a) Sabemos que tiene que integrar a 1 asi que podemos despejar b a partir de ahi:
$\int_0^b ax^2 = 1$
$a \cdot \frac{b^3}{3} = 1 \Rightarrow a = \frac{3}{b^3}$

b) $A \sim U(0,2) \xrightarrow{\text{A priori}} f_A(a) = \frac{1}{2} \forall n \in [0,2]$

A posteriori: $P_\theta(n|\underline{X}) = \frac{\prod_{i=1}^3 (f_{X|\theta=n}(X_i))\cdot f_A(a)}{\int_0^2 \prod_{i=1}^3 (f_{X|\theta=n}(X_i))\cdot f_A(a)\cdot da} = \frac{\prod_{i=1}^3 (aX_i^2)\cdot\frac{1}{2}}{\int_0^2 \prod_{i=1}^3 (f_{X|\theta=n}(X_i))\cdot f_A(a)\cdot da} = \frac{a^3\cdot(0{,}2^2+0{,}8^2+3^2)\cdot\frac{1}{2}}{\int_0^2 \prod_{i=1}^3 (f_{X|\theta=n}(X_i))\cdot f_A(a)\cdot da} =$
$\frac{\frac{a^3\cdot 121}{25}}{\int_0^2 \frac{a^3\cdot 121}{25}\cdot da}$

Para el intervalo donde esta formula es válida hay que prestar especial atención, el b máximo necesario para que valga la formula de densidad $f_{X|\theta=a}$ debe ser al menos 3, ya que para el tercer dato tenemos que $0 < 3 < b$. Despejando de la relación obtenida en a) conseguimos que $a = \frac{3}{3^3} = \frac{1}{9}$, si usamos un $a > \frac{1}{9}$ obtenemos un $b < 3$.

$\frac{\frac{a^3\cdot 121}{25}}{\int_0^{1/9} \frac{a^3\cdot 121}{25}\cdot da} = \frac{\frac{a^3\cdot 121}{25}}{1{,}844x10^{-4}} = 26247a^3 \forall a \in [0, \frac{1}{9}]$
$E[X] = \int_0^{\frac{1}{9}} a \cdot 26247a^3 \cdot da = 0{,}089$

Moda en $a = \frac{1}{9}$.

9.6. 6)

X: cantidad de tiros hasta la primera cara.
$X|P = p \sim Binom(2,p)$

Recordar que para distribucion binomial:
$P_X(n|p,n) = \binom{n}{r} p^r (1-p)^{n-r}$

$P(cara|M_1) = 0{,}6$
$P(cara|M_2) = 0{,}4$

A posteriori: $P_X(p|\underline{X}) = \frac{P_{X|P=p}(X_1)\cdot P(P=p)}{\sum_{\forall p} P_{x|P=p}(X_1)\cdot P(P=p)}$

Para $P = 0{,}6$:
$P_X(0{,}6|x) = \frac{P_{X|P=0{,}6}(X_1)\cdot P(P=0{,}6)}{\sum_{\forall p} P_{x|P=}(X_1)\cdot P(P=p)} = \frac{\binom{2}{0}\cdot 0{,}6^0(1-0{,}6)^{2-0}\cdot 0{,}5}{\binom{2}{0}\cdot 0{,}6^0(1-0{,}6)^{2-0}\cdot 0{,}5+\binom{2}{0}\cdot 0{,}4^0(1-0{,}4)^{2-0}\cdot 0{,}5} = 0{,}3077$

Para $P = 0{,}4$:
$P_X(0{,}4|x) = \frac{P_{X|P=0{,}4}(X_1)\cdot P(P=0{,}4)}{\sum_{\forall p} P_{x|P=}(X_1)\cdot P(P=p)} = \frac{\binom{2}{0}\cdot 0{,}4^0(1-0{,}4)^{2-0}\cdot 0{,}5}{\binom{2}{0}\cdot 0{,}6^0(1-0{,}6)^{2-0}\cdot 0{,}5+\binom{2}{0}\cdot 0{,}4^0(1-0{,}4)^{2-0}\cdot 0{,}5} = 0{,}6923$

Y: Cantidad de tiros hasta la primer cara.
$Y|P = p \sim Geom(p)$

$E[X] = E[Y|P = 0{,}6]\cdot P_X(0{,}6|x) + E[Y|P = 0{,}4]\cdot P_X(0{,}6|x) = \frac{1}{0{,}6}\cdot 0{,}3077 + \frac{1}{0{,}4}\cdot 0{,}6923 = 2{,}244$

9.7. 7)

$P \sim U(0,1) \xrightarrow{\text{A priori}} f_P(p) = 1 \forall p \in (0,1)$

$X|P = p \sim Binom(p, 6)$

A posteriori: $P_X(p|x) = \frac{P_{X|P=p}(X_1)\cdot P(P=p)}{\int_0^1 P_{X|P=p}(X_1)\cdot P(P=p)\cdot dp}$

Con el dato:
$P_X(p|2) = \frac{P_{2|P=p}(2)\cdot P(P=p)}{\int_0^1 P_{X|P=p}(X_1)\cdot P(P=p)\cdot dp} = \frac{\binom{6}{2}\cdot p^2(1-p)^4\cdot 1}{\int_0^1 \binom{6}{2}\cdot p^2(1-p)^4\cdot 1\cdot dp} = \frac{15\cdot p^2(1-p)^4}{0{,}1429} \forall p \in (0,1)$
$E[P] = \int_0^1 p\cdot \ \frac{15\cdot p^2(1-p)^4}{0{,}1429} = 0{,}375$

Ahora para hacer esa estimación hacemos una binomial con la probabilidad obtenida por bayes:
$Y \sim Binom(4, 0{,}375)$

$P(Y = 1) = \binom{4}{1}0{,}375\cdot(1-0{,}375)^3 = 0{,}366$

10. Guia 10

En la nota 9 de Grynberg hay varios ejercicios de este tipo resueltos.

10.1. 1)

Recordar:

$E_\theta[\overline{X}] = E_\theta[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n E_\theta[X_i] = \mu(\theta)$
$V_\theta(\overline{X}) = V_\theta(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^n V_\theta(X_i) = \frac{1}{n}\sigma^2(\theta)$

$ECM(\theta) = V(\hat{\theta}) + B^2(\hat{\theta})$
$B(\hat{\theta}) = E[\hat{\theta}] - \theta$

Ejercicio:

$\hat{\theta}_1 = \overline{X} = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^4 X_i$

$E_\theta[\hat{\theta}_1] = \theta_1$ (es insesgado)
$V_\theta(\hat{\theta}_1) = V_\theta(\frac{1}{4}\sum_{i=1}^4 X_i) = \frac{1}{4^2}\sum_{i=1}^4 V_\theta(X_i) = \frac{1}{4^2}\cdot 4 = \frac{1}{4}$

$ECM(\hat{\theta}_1) = V(\hat{\theta}_1) + B^2(\hat{\theta}_1) = \frac{1}{4}$

$\hat{\theta}_2 = \frac{X_1+2X_2+3X_3+4X_4}{10}$

$E[\hat{\theta}_2] = \frac{\theta_2+2\cdot\theta_2+3\cdot\theta_2+4\cdot\theta_2}{10} = \theta_2$ (es insesgado)
$V(\hat{\theta}_2) = \frac{1^2\cdot 1+2^2\cdot 1+3^2\cdot 1+4^2\cdot 1}{10^2} = \frac{3}{10}$

$ECM(\hat{\theta}_2) = V(\hat{\theta}_2) + B^2(\hat{\theta}_2) = \frac{3}{10}$

$\hat{\theta}_3 = \frac{X_1+X_2+X_3}{3}$

$E[\hat{\theta}_3] = \frac{\theta_3+2\cdot\theta_3+3\cdot\theta_3}{3} = \theta_3$ (es insesgado)
$V(\hat{\theta}_3) = \frac{1^2\cdot 1+2^2\cdot 1+3^2\cdot 1}{3^2} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$

$ECM(\hat{\theta}_3) = V(\hat{\theta}_3) + B^2(\hat{\theta}_3) = \frac{1}{3}$

$ECM(\hat{\theta}_1) < ECM(\hat{\theta}_2) < ECM(\hat{\theta}_3)$

El mejor estimador es $\hat{\theta}_1$.

10.2. 2)

Recordemos que si $X \sim Ber(\theta)$:
$E[X] = \theta$
$V(X) = \theta(1-\theta)$

$\hat{\theta}_1 = X$

$E[\hat{\theta}_1] = E[X] = \theta$ (es insesgado)
$V(\hat{\theta}_1) = V(X) = \theta(1-\theta)$

$ECM(\hat{\theta}_1) = V(\hat{\theta}_1) + B^2(\hat{\theta}_1) = \theta(1-\theta)$

$\hat{\theta}_2 = 1/2$

$E[\hat{\theta}_2] = E[1/2] = 1/2$ (es sesgado)
$V(\hat{\theta}_2) = V(1/2) = 0$

$ECM(\hat{\theta}_2) = V(\hat{\theta}_2) + B^2(\hat{\theta}_2) = (E[\hat{\theta}_2] - \theta_2)^2 = (1/2 - \theta_2)^2 = 1/4 - \theta_2 + \theta_2^2 = \theta_2(\theta_2 - 1) + 1/4$

10.3. 3)

Que el p no los confunda, esto es exactamente igual que cuando estaba el θ.

Recordemos que una suma de experiencias de Bernoulli resulta en una distribución Binomial, para esta distribución tenemos que:
$E[X] = np$
$V[X] = np(1-p)$

$E[\hat{p}_1] = E\left[\frac{1}{2}\left(\frac{X}{m} + \frac{Y}{n}\right)\right] = \frac{1}{2}\left(\frac{E[X]}{m} + \frac{E[Y]}{n}\right) = \frac{2p}{2} = p$ (es insesgado)

$E[\hat{p}_2] = E\left[\frac{X+Y}{m+n}\right] = \frac{E[X]+E[Y]}{m+n} = \frac{mp+np}{m+n} = p$ (es insesgado)

$V(\hat{p}_1) = \frac{1}{2^2}\left(\frac{V(X)}{m^2} + \frac{V(Y)}{n^2}\right) = \frac{1}{2^2}\left(\frac{mp(1-p)}{m^2} + \frac{np(1-p)}{n^2}\right) = \frac{p(1-p)}{4}\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right) = \frac{p(1-p)}{4} \cdot \frac{m+n}{mn}$

$V(\hat{p}_2) = V\left(\frac{X+Y}{m+n}\right) = \frac{V(X)+V(Y)}{(m+n)^2} = \frac{p(1-p)\cdot(m+n)}{(m+n)^2} = \frac{p(1-p)}{m+n}$

Para ver cual es el preferible comparamos los errores cuadraticos medios:

$ECM(\hat{p}_1) = V(\hat{p}_1) + B^2(\hat{p}_1) = V(\hat{p}_1) = \frac{p(1-p)}{4} \cdot \frac{m+n}{mn}$

$ECM(\hat{p}_2) = V(\hat{p}_2) + B^2(\hat{p}_2) = V(\hat{p}_2) = \frac{p(1-p)}{m+n}$

Vamos a suponer que $ECM(\hat{p}_1) \geq ECM(\hat{p}_2)$:

$ECM(\hat{p}_1) \geq ECM(\hat{p}_2)$
$\frac{p(1-p)}{4} \cdot \frac{m+n}{mn} \geq \frac{p(1-p)}{m+n}$
$\frac{m+n}{4mn} \geq \frac{1}{m+n}$
$(m+n)^2 \geq 4mn$
$m^2 + 2mn + n^2 \geq 4mn$
$m^2 + 2mn + n^2 - 4mn \geq 0$
$m^2 - 2mn + n^2 \geq 0$
$(m-n)^2 \geq 0$

Es evidente que esta ultima inecuación se cumple para todo m y n, por lo tanto $\hat{p}_2$ tiene menos error que $\hat{p}_1$.

10.4. 4)

$X \sim \mho(0, \theta)$

a) $F_X(X_n = x) = P(X_n \leq x) = P(max(X_1, X_2, ..., X_n) \leq x) \overset{indep}{=} P(X_1 \leq x) \cdot P(X_2 \leq x) \cdot ... \cdot P(X_n \leq x) = \left(\int_0^x \frac{1}{\theta} \cdot dt\right)^n = \left(\frac{x}{\theta}\right)^n$

$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{x^n}{\theta^n}\right) = \frac{nx^{n-1}}{\theta^n}$

$E[X_{(n)}] = \int_0^\theta \frac{xnx^{n-1}}{\theta^n} dx = \int_0^\theta \frac{nx^n}{\theta^n} dx = \frac{n\theta^{n+1}}{(n+1)\theta^n} = \frac{n\theta}{n+1}$

$E[X_{(x)}^2] = \int_0^\theta \frac{x^2nx^{n-1}}{\theta^n} dx = \int_0^\theta \frac{nx^{n+1}}{\theta^n} dx = \frac{n\theta^{n+2}}{\theta^n(n+2)} = \frac{n\theta^2}{n+2}$

$V(X) = E[X^2] - E[X]^2 = \frac{n\theta^2}{n+2} - \left(\frac{n\theta}{n+1}\right)^2 = \frac{n\theta^2(n+1)^2 - n^2\theta^2(n+2)}{(n+2)(n+1)^2} = \frac{\theta^2(n^3+2n^2+n-(n^3+2n^2))}{(n+2)(n+1)^2} = \frac{\theta^2 n}{(n+2)(n+1)^2}$

b) $B(X_{(n)}) = E[X_{(n)}] - \theta = \frac{n\theta}{n+1} - \theta$

10.5. 5)

a) $\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{25} X_i}{n}$
Por teorema central del limite definimos $S = \frac{\sum_{i=1}^{25} X_i - \mu}{\sqrt{25\sigma^2}} = \frac{\sum_{i=1}^{25} X_i}{\sqrt{25}} \sim N(0,1)$

$P(\overline{X} < 0{,}25) = P\big(\frac{\sum_{i=1}^{25} X_i}{25} < 0{,}25\big) = P(\frac{\sum_{i=1}^{25} X_i}{\sqrt{25}} < \frac{0{,}25 \cdot 25}{\sqrt{25}}) = P(S < 1{,}25) = 0{,}89435$

b) Recordar la definición de chi cuadrado $\frac{S^2(n-1)}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$

$P(S^2 < 0{,}577) = P\big(\frac{S^2(n-1)}{\sigma^2} < \frac{0{,}577(n-1)}{\sigma^2}\big)$ con $n = 25$ y $\sigma = 1$
$P(S^2 24 < 13{,}848)$ y tenemos que $S^2 24 \sim \chi^2_{24}$

$P(S^2 24 < 13{,}848) = 1 - P(S^2 24 \geq 13{,}848) = 1 - 0{,}05 = 0{,}95$

c) $h(x)$ es la probabilidad de que $x < 0{,}44$, ya que X tiene distribucion $N(0,1)$ esta probabilidad es 0,67. Vemos que $\hat{p}$ es una suma de eventos que son procesos de Bernoulli, a partir de esto podemos saber su esperanza y varianza para aplicar TCL.

$Z = \frac{\sum_{i=1}^{25} Y_i - 0{,}67}{\sqrt{25 \cdot 0{,}67(1-0{,}67)}} \sim N(0,1)$

$P(0{,}576 < \hat{p} < 0{,}764) = P(0{,}576 < \frac{1}{25}\sum_1^{25} Y_i < 0{,}764) = P(25\frac{0{,}576-0{,}67}{\sqrt{25 \cdot 0{,}67(1-0{,}67)}} < Z < 25\frac{0{,}764-0{,}67}{\sqrt{25 \cdot 0{,}67(1-0{,}67)}}) = P(-1 < Z < 1) = P(1) - P(-1) = 0{,}84134 - 0{,}15866 = 0{,}68268$

10.6. 6)

Esta resuelto en la nota 9 de Grynberg (Estimadores puntuales).

10.7. 7)

X: Cantidad rojas en 5.
$X \sim Bi(5, p)$

Recordemos que para la distribución binomial:
$f_P(x) = \binom{5}{x} p^x (1-p)^{5-x}$

$X_{Obs} = 3$
$p_1 = 2/5 \rightarrow P(X = 3) = \binom{5}{3}(2/5)^3(1 - 2/5)^{5-3} = 0{,}2304$
$p_2 = 4/5 \rightarrow P(X = 3) = \binom{5}{3}(4/5)^x(1 - 4/5)^{5-3} = 0{,}2048$

$\hat{p}_{MV} = p_1 = 2/5$

10.8. 8)

X: cant de defectuosas en 10
$X \sim Hipergeometrica(n = 10; N = 100; M)$

$P_M(x) = \frac{\binom{M}{x} \cdot \binom{100-M}{100-x}}{\binom{100}{10}}$

Por el método de máxima verosimilitud buscamos que $M|P_M(X=2)$ sea max.
Lo hacemos despejando desde $P_M(X=2) > P_{M-1}(X=2)$

Sabemos que los valores de M que cumplen esa inecuación tienen una probabilidad mayor que su valor anterior, por lo tanto el último M que la cumpla tendra el valor mayor.

De todas formas a simple vista se puede ver que $M = 20$ ya que si hay 2 defectuosas en 10, se esperara que en 100 haya 20 defectuosas.

10.9. 9)

10.10. 10)

a) Igual que la primera parte del punto 10.6. Esta resuelto en la pagina 18 de la nota 9 de Grynberg (Estimadores puntuales).

10.11. 11)

Muy parecido al ejercicio 10.8 pero más facil.

X: cantidad bolas rojas extraidas.
$X : Hipergeometrica(2, r+5, r)$

$P_r(x) = \frac{\binom{r}{x} \cdot \binom{r+5-r}{2-x}}{\binom{r+5}{2}}$
Por el método de máxima verosimilitud buscamos que $r|P_r(X=2)$ sea max.

Como $0 \leq r \leq 6$ solo son 6 casos, asi que calculo la probabilidad para cada uno y busco la máxima:
$P_0(X=2) = \frac{\binom{0}{2} \cdot \binom{5}{0}}{\binom{0+5}{2}} = 0$
$P_1(X=2) = \frac{\binom{1}{2} \cdot \binom{5}{0}}{\binom{1+5}{2}} = 0$
$P_2(X=2) = \frac{\binom{2}{2} \cdot \binom{5}{0}}{\binom{2+5}{2}} = 0{,}04762$
$P_3(X=2) = \frac{\binom{3}{2} \cdot \binom{5}{0}}{\binom{3+5}{2}} = 0{,}10714$
$P_4(X=2) = \frac{\binom{4}{2} \cdot \binom{5}{0}}{\binom{4+5}{2}} = 0{,}16667$
$P_5(X=2) = \frac{\binom{5}{2} \cdot \binom{5}{0}}{\binom{5+5}{2}} = 0{,}22222$

$P_6(X=2) = \frac{\binom{6}{2}\cdot\binom{5}{0}}{\binom{6+5}{2}} = 0{,}27273$

La mayor probabilidad es que halla 6 bolas rojas, la probabilidad pedida entonces es:

$P_6(X=1) = \frac{\binom{6}{1}\cdot\binom{5}{1}}{\binom{11}{2}} = \frac{6}{11}$

10.12. 12)

X: duración del tanque en minutos.
$X \sim N(\mu, 2)$ estimo μ con $\overline{X}$:

Calculamos la media como el promedio de todos los valores muestrales

$\overline{X} = \frac{37{,}447+51{,}101+34{,}258+38{,}401+33{,}288+45{,}971+47{,}348+36{,}241+41{,}585}{9} = 40{,}627$

$P(X > 45) \xrightarrow{estandarizo} P(Z > \frac{45-40{,}627}{2}) = (Z > 2{,}1865) = 1 - (Z \leq 2{,}1865) = 0{,}01439$

b) La probabilidad de que una muestra sea mayor a 0,45 puede ser 1 o 0 dependiendo si se cumple o no tal condición. Promediamos todas las probabilidades y llegamos al valor pedido:

$P(X > 45) = \frac{P(X_1>45)+P(X_2>45)+...+P(X_9>45)}{9} = \frac{0+1+0+0+0+1+1+0+0}{9} = \frac{1}{3}$

10.13. 13)

X: diametro de objetos.
$X \sim N(100, \sigma)$

a) Si en 10 objetos se encontraron 2 defectuosos tenemos que la probabilidad de encontrar un defectuoso va a ser de $p = \frac{2}{10}$

Como la distribución es normal buscamos $P(Z \leq z) = 0{,}2 \to z = -0{,}83$ ya que la probabilidad de que sea defectuoso es la probabilidad de que el diametro sea menor a $99cm$

De la estandarización tenemos $\frac{99-100}{\hat{\sigma}_{MV}} = -0{,}83 \to \hat{\sigma}_{MV} = 1{,}2$

b) $p = \frac{7}{10}$

$P(Z \leq z) = 0{,}7 \to z = 0{,}53$

$\frac{99-100}{\hat{\sigma}_{MV}} = 0{,}53 \to \hat{\sigma}_{MV} = -1{,}89$ La desviación no puede ser negativa por lo tanto este caso no existe.

10.14. 14)

X: duración de la maquina en dias.
$X \sim Exp(\lambda)$

Media: $\overline{X} = \frac{359+317+2379+53+554+536+414+122+345+739}{10} = 581{,}8$ dias

Como es una distribución exponencial sabemos que $\overline{X} = \frac{1}{\lambda} \to \lambda = \frac{1}{581{,}8}$
De aca despejamos la varianza como: $V(X) = \frac{1}{\lambda^2} = 581{,}8^2 = 338491{,}24 dias^2$

Y para la mediana calculamos el X para el cual acumulo el 0,5 de probabilidad:
$F(X) = 1 - e^{-\frac{x}{581{,}8}} = 0{,}5 \to x = 403{,}27$

10.15. 15)

X: duración en horas de la bateria.
$X \sim Exp(\lambda)$

Ahora consideramos:
$Y = 0$ si $X < 2$
$Y = 1$ si $X \geq 2$

$\hat{p}_{MV} = \frac{1}{10} \cdot \sum_{i=1}^{10} Y_i = 0{,}7$

$P(2 < X) = 1 - P(X \leq 2) = e^{-2\lambda} = 0{,}7 \to \lambda = 0{,}1783$

La probabilidad pedida es $P(X > 2{,}5) = 1 - P(X \leq 2{,}5) = e^{-2{,}5 \cdot 0{,}1783} = 0{,}64$

11. Guia 11

11.1. 1)

Hacemos un cambio de variables para llegar a un problema conocido. $Y = \frac{X}{\theta}$
$f_Y(y) = 2y\mathbf{1}\{0 \leq y \leq 1\}$

Planteamos $P(Y \leq Y_{1-\alpha}) = 1 - \alpha$
$\int_0^{Y_{1-\alpha}} 2y \cdot dy = Y_{1-\alpha}^2 = 1 - \alpha \rightarrow Y_{1-\alpha} = \sqrt{1-\alpha}$

Volvemos a las variables originales:

$Y \leq Y_{1-\alpha} \rightarrow \frac{X}{\theta} \leq \sqrt{1-\alpha} \rightarrow \frac{x}{\sqrt{1-\alpha}} \leq \theta$

11.2. 2)

Resuelto en la pagina 7 del apunte 10 de Grynberg.

a) El estimador de maxima verosimilitud para θ es $X_{(n)} = max(X_1, ..., X_n)$ y tiene densidad:
$f(x) = \frac{nx^{n-1}}{\theta^n} 1\{0 \leq x \leq \theta\}$

Como depende de θ no es un pivote asi que proponemos un cambio de variables para que si lo sea: $Q = \frac{X_{(n)}}{\theta}$ Su funcion de densidad es:
$f_Q(q) = nq^{n-1} 1\{0 \leq q \leq 1\}$ No depende de θ por lo tanto $Q = \frac{X_{(n)}}{\theta}$ es pivote.

b) Para un intervalo de confianza de nivel β tenemos:
$P(q_{1-\beta} \leq Q(X, \theta) \leq 1) = 1 - \alpha$
$P(q_{1-\beta} \leq \frac{X_{(n)}}{\theta} \leq 1) = 1 - \alpha$
$P(1 \leq \frac{\theta}{X_{(n)}} \leq \frac{1}{q_{1-\beta}}) = 1 - \alpha$
$P(X_{(n)} \leq \theta \leq \frac{X_{(n)}}{q_{1-\beta}}) = 1 - \alpha$

Para obtener el intervalo de confianza solo nos queda despejar $q_{1-\beta}$:
$\gamma = \int_0^{q_\gamma} f_Q(q) dq \Rightarrow q_\gamma = \gamma^{1/n}$.

Reemplazando obtengo que el intervalo de confianza es:
$IC(X) = \left[X_{(n)}, \frac{X_{(n)}}{q_{1-\beta}}\right] = \left[X_{(n)}, \frac{X_{(n)}}{(1-\beta)^{1/n}}\right] \xrightarrow{\beta = 1-\alpha} \left[X_{(n)}, \frac{X_{(n)}}{\alpha^{1/n}}\right]$

c) $\int_0^{k(X_1+X_2)} f_Q(q) dq = 0{,}95$
$(k(X_1 + X_2))^n = 0{,}95$
$k = \frac{0{,}95^{1/n}}{X_1 + X_2}$

11.3. 3)

Sabemos que $\overline{X} = \frac{1}{9}\sum_{i=1}^{9} X_i \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{9})$
Entonces $\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{9}} \sim N(0,1)$

Queremos un intervalo de confianza de $0,95$, los valores z son:
$P(-1{,}96) = 0{,}0250 \rightarrow Z_{0{,}025} = -1{,}96$
$P(1{,}96) = 0{,}9750 \rightarrow Z_{0{,}975} = 1{,}96$

$P(Z_{0{,}025} \leq \frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{9}} \leq Z_{0{,}975}) = 0{,}95$
$P(\overline{X} + Z_{0{,}025} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{9}} \leq \mu \leq \overline{X} + Z_{0{,}975} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{9}}) = 0{,}95$

$\overline{X} = \frac{1}{9}\sum_{i=1}^{9} X_i = \frac{8{,}016+8{,}488+7{,}395+9{,}011+7{,}532+7{,}841+8{,}651+6{,}917+8{,}490}{9} = 8{,}03789$ y $\sigma = 1$ es dato del enunciado.

$P(7{,}3845 \leq \mu \leq 8{,}6912) = 0{,}95 \Rightarrow IC = \Big[7{,}3845; 8{,}6912\Big]$

b) Para que el error sea de 0,01 tenemos que pedir que:
$Z_{0{,}025} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq 0{,}01 \Rightarrow n \geq 38416$

11.4. 4)

Busco un pivote para μ con σ desconocido, llamo U al pivote.

$\frac{z}{\sqrt{\frac{U}{n-1}}} \sim t_{n-1} \Rightarrow \frac{\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}}{\sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \cdot \frac{1}{(n-1)}}} = \frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{S/\sigma} = \frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$ Esto sirve como pivote si σ desconocido.

Calculo la sumatoria primero sumando todas las filas y luego esos resultados:

$Y_{fila1} = 850 + 740 + 900 + 1070 + 930 + 850 + 950 + 980 + 980 + 880 = 9130$
$Y_{fila2} = 1000 + 980 + 930 + 650 + 760 + 810 + 1000 + 1000 + 960 + 960 = 9050$
$Y_{fila3} = 960 + 940 + 960 + 940 + 880 + 800 + 850 + 880 + 900 + 840 = 8950$
$Y_{fila4} = 830 + 790 + 810 + 880 + 880 + 830 + 800 + 790 + 760 + 800 = 8170$
$Y_{fila5} = 880 + 880 + 880 + 860 + 720 + 720 + 620 + 860 + 970 + 950 = 8340$
$Y_{fila6} = 880 + 910 + 850 + 870 + 840 + 840 + 850 + 840 + 840 + 840 = 8560$
$Y_{fila7} = 890 + 810 + 810 + 820 + 800 + 770 + 760 + 740 + 750 + 760 = 7910$
$Y_{fila8} = 910 + 920 + 890 + 860 + 880 + 720 + 840 + 850 + 850 + 780 = 8500$
$Y_{fila9} = 890 + 840 + 780 + 810 + 760 + 810 + 790 + 810 + 820 + 850 = 8160$
$Y_{fila10} = 870 + 870 + 810 + 740 + 810 + 940 + 950 + 800 + 810 + 870 = 8470$

$Y = 9130 + 9050 + 8950 + 8170 + 8340 + 8560 + 7910 + 8500 + 8160 + 8470 = 85240$

$\overline{X} = \frac{Y}{100} = 852{,}40$

$W_{fila1} = 850^2 + 740^2 + 900^2 + 1070^2 + 930^2 + 850^2 + 950^2 + 980^2 + 980^2 + 880^2 = 8410100$
$W_{fila2} = 1000^2 + 980^2 + 930^2 + 650^2 + 760^2 + 810^2 + 1000^2 + 1000^2 + 960^2 + 960^2 = 8324700$
$W_{fila3} = 960^2 + 940^2 + 960^2 + 940^2 + 880^2 + 800^2 + 850^2 + 880^2 + 900^2 + 840^2 = 8037300$
$W_{fila4} = 830^2 + 790^2 + 810^2 + 880^2 + 880^2 + 830^2 + 800^2 + 790^2 + 760^2 + 800^2 = 6688500$
$W_{fila5} = 880^2 + 880^2 + 880^2 + 860^2 + 720^2 + 720^2 + 620^2 + 860^2 + 970^2 + 950^2 = 7067000$
$W_{fila6} = 880^2 + 910^2 + 850^2 + 870^2 + 840^2 + 840^2 + 850^2 + 840^2 + 840^2 + 840^2 = 7332400$
$W_{fila7} = 890^2 + 810^2 + 810^2 + 820^2 + 800^2 + 770^2 + 760^2 + 740^2 + 750^2 + 760^2 = 6274900$
$W_{fila8} = 910^2 + 920^2 + 890^2 + 860^2 + 880^2 + 720^2 + 840^2 + 850^2 + 850^2 + 780^2 = 7258000$
$W_{fila9} = 890^2 + 840^2 + 780^2 + 810^2 + 760^2 + 810^2 + 790^2 + 810^2 + 820^2 + 850^2 = 6671000$
$W_{fila10} = 870^2 + 870^2 + 810^2 + 740^2 + 810^2 + 940^2 + 950^2 + 800^2 + 810^2 + 870^2 = 7212700$

$W = 8410100 + 8324700 + 8037300 + 6688500 + 7067000 + 7332400 + 6274900 + 7258000 + 6671000 + 7212700 = 73276600$

Tenemos $n = 100$ asi que buscamos en la tabla de distribución de t de student en la fila de 99 grados de libertad las probabilidades para acumular $0,95$:
$P(-1{,}984) = 0{,}025$
$P(1{,}984) = 0{,}975$

$P(-1{,}984 \leq \frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \leq 1{,}984) = 0{,}95$
$P(\overline{X} - 1{,}984 \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \overline{X} + 1{,}984 \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}) = 0{,}95$

$S = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2} = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i^2 - 2 \cdot X_i \cdot \overline{X} + \overline{X}^2)} = \sqrt{\frac{1}{n-1}(\sum_{i=1}^{n} \cdot X_i^2 - 2 \cdot n \cdot \overline{X}^2 + n\overline{X}^2)} = \sqrt{\frac{1}{n-1}(\sum_{i=1}^{n} \cdot X_i^2 - n\overline{X}^2)} = \sqrt{\frac{1}{99} \cdot (73276600 - 100 \cdot 852{,}4^2)} = 79{,}01$

$P(836{,}72 \leq \mu \leq 868{,}08) = 0,95 \Rightarrow IC = [836{,}72; 868{,}08]$

La verdadera velocidad de la luz es $299792km/h$, no esta en ese intervalo.

b) Si quiero σ uso como pivote $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$

Busco en la tabla de distribución de chi cuadrado en la fila de 99 grados de libertad:
$P(129{,}5613) = 0{,}025$
$P(74{,}2219) = 0{,}975$

$P(74{,}2219 \leq \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \leq 129{,}5613) = 0{,}95$
$P(\sqrt{\frac{(n-1)S^2}{129{,}5613}} \leq \sigma \leq \sqrt{\frac{(n-1)S^2}{74{,}2219}}) = 0{,}95$
$P(69{,}07 \leq \sigma \leq 91{,}25) = 0{,}95 \Rightarrow IC = [69{,}07; 91{,}25]$

11.5. 5)

a) $X_{n+1} - \overline{X}_n \sim N(0, \sigma^2(1+\frac{1}{n}))$

b) Para distribucion normal:
$P(-1{,}645) = 0{,}05$
$P(1{,}645) = 0{,}95$
$Z_{\frac{1+\beta}{2}} = Z_{0{,}95} = 1{,}645$

$P(-Z_{0{,}95} \leq \frac{x_{n+1}-\overline{X}_n}{\sigma\sqrt{1+\frac{1}{n}}} \leq Z_{0{,}95}) = 0{,}9$
$P(\overline{X}_n - Z_{0{,}95}\cdot\sigma\sqrt{1+\frac{1}{n}} \leq X_{n+1} \leq \overline{X}_n + Z_{0{,}95}\cdot\sigma\sqrt{1+\frac{1}{n}}) = 0{,}9$
$P(4 - 1{,}645\cdot 1\sqrt{1+\frac{1}{5}} \leq X_6 \leq 4 + 1{,}645\cdot 1\sqrt{1+\frac{1}{5}}) = 0{,}9$
$P(4 - 1{,}645\cdot 1\sqrt{1+\frac{1}{5}} \leq X_6 \leq 4 + 1{,}645\cdot 1\sqrt{1+\frac{1}{5}}) = 0{,}9$
Para σ conocido calculamos como:
$P(2{,}2 \leq X_6 \leq 5{,}8)$

c) Para σ desconocido usamos:
$$\frac{\frac{X_{n+1}-\overline{X}_n}{\sigma\sqrt{1+\frac{1}{n}}}\sim N(0,1)}{\sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2/(n-1)}}} = \frac{\frac{X_{n+1}-\overline{X}_n}{\sigma\sqrt{1+\frac{1}{n}}}}{\frac{S}{\sigma}} = \frac{X_{n+1}-\overline{X}_n}{S\sqrt{1+\frac{1}{n}}} \sim t_{n-1}$$
Para t de student con 4 grados de libertad:
$P(2{,}132) = 0{,}05 \Rightarrow Z_{\frac{1+\beta}{2}} = Z_{0{,}95} = 2{,}015$

$P(-Z_{0{,}95} \leq \frac{X_6-\overline{X}_5}{S\sqrt{1+\frac{1}{5}}} \leq Z_{0{,}95}) = 0{,}9$
$P(\overline{X} - Z_{0{,}95}S\sqrt{1+\frac{1}{5}} \leq X_6 \leq \overline{X} + Z_{0{,}95}S\sqrt{1+\frac{1}{5}}) = 0{,}9$
$P(1{,}66 \leq X_6 \leq 6{,}34) = 0{,}9$

11.6. 6)

La distribución de la muestra es Bernoulli, recordemos que para $X \sim Ber(p)$:
$E[X] = p$
$V[X] = p(1-p)$

$\overline{X} = \frac{30}{300} = 0{,}1$

Como la cantidad de casos es grande (300) se puede aproximar por teorema central del limite como:

$\sum_{i=1}^{n} \sim N(np, np(1-p))$ que es equivalente a $\overline{X} \sim N(p, \frac{p(1-p)}{n})$

Se puede usar como pivote: $\frac{\overline{X}-p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \sim N(0,1)$

De la tabla de distribución normal:
$P(-1{,}645) = 0{,}05 \Rightarrow Z_{0{,}95} = 1{,}645$

$P(-Z_{0{,}95} \leq \frac{\overline{X}-p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \leq Z_{0{,}95}) = 0{,}9$
$P\Big(|\overline{X}-p| \leq Z_{0{,}95} \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\Big) = 0{,}9$
$P((\overline{X}-p)^2 \leq Z_{0{,}95}^2 \cdot \frac{p(1-p)}{n}) = 0{,}9$
$P(\overline{X}^2 - 2 \cdot \overline{X}p + p^2 - Z_{0{,}95}^2 \cdot \frac{p-p^2}{n} \leq 0) = 0{,}9$
$P(p^2(1+\frac{Z_{0{,}95}^2}{n}) - p(2\overline{X} + \frac{Z_{0{,}95}^2}{n}) + \overline{X}^2 \leq 0) = 0{,}9$
$P(p^2 \cdot 1{,}009 - p \cdot 0{,}2090 + 0{,}01 \leq 0) = 0{,}9$
$P(0{,}075 \leq p \leq 0{,}132) = 0{,}9$

En vez de hacer la cuadratica tambien se pueden aproximar las p de abajo con su estimador como $p \simeq \overline{X}$ (aveces hacer esto da un mejor resultado, casi que es la resolucion preferible).

b) $Z_{0{,}9} = 1{,}28$

$P(Z_{0{,}9} \geq \frac{\overline{X}-p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}) = 0{,}9$
$P(Z_{0{,}9} \geq \frac{\overline{X}-p}{\sqrt{\frac{\overline{X}(1-\overline{X})}{n}}}) = 0{,}9$
$P(Z_{0{,}9}^2 \cdot \frac{\overline{X}(1-\overline{X})}{n} \geq \overline{X} - p) = 0{,}9$
$P(\overline{X} - Z_{0{,}9}^2 \cdot \frac{\overline{X}(1-\overline{X})}{n} \leq p) = 0{,}9$
$P(0{,}099 \leq p) = 0{,}9$

11.7. 7)

Muy parecido al 11.3.

$Z_{0{,}975} = 1{,}96$

$P(-Z_{0{,}975} \leq \frac{\overline{X}-p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \leq Z_{0{,}975}) = 0{,}95$
$P\Big(|\overline{X}-p| \leq Z_{0{,}975} \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\Big) = 0{,}95$

Como $p(1-p) < 1$ podemos reemplazar con esto y se sigue cumpliendo la inecuación:

$P\Big(|\overline{X} - p| \leq Z_{0,975} \cdot \sqrt{\frac{1}{n}}\Big) = 0{,}95$

Recordemos que $\hat{p} = \overline{X}$ y lo que esta pidiendo el ejercicio es que el error del estimador sea menor a 0,01, es decir $|\hat{p} - p|$ que es justamente lo que tenemos en la inecuacion de arriba. Entonces pedimos que:

$Z_{0,975} \cdot \sqrt{\frac{1}{n}} \leq 0{,}01$
$n \geq (\frac{1{,}96}{0{,}01})^2 \Rightarrow n \geq 38416$

11.8. 8)

Para distribuciones exponenciales se usa como pivote $2\lambda \sum_{i=1}^{n} X_i \sim \chi^2_{2n}$

a) En la tabla de distribución de chi cuadrado con 20 grados de libertad:
$P(31{,}4104) = 0{,}05$
$P(10{,}8508) = 0{,}95$

$P(10{,}8508 \leq 2\lambda \sum_{i=1}^{n} X_i \leq 31{,}4104) = 0{,}9$
$P(\frac{10{,}8508}{2\sum_{i=1}^{10}} \leq \lambda \leq \frac{31{,}4104}{2\sum_{i=1}^{10}}) = 0{,}9$
$P(2{,}7127 \leq \lambda \leq 7{,}8526) = 0{,}9 \Rightarrow IC = [2{,}7172; 7{,}8526]$

b) En la tabla de distribución de chi cuadrado con 200 grados de libertad:
$P(233{,}9942) = 0{,}05$
$P(168{,}2785) = 0{,}95$

$P(168{,}2785 \leq 2\lambda \sum_{i=1}^{n} X_i \leq 233{,}9942) = 0{,}9$
$P(\frac{168{,}2785}{2\sum_{i=1}^{100} X_i} \leq \lambda \leq \frac{233{,}9942}{2\sum_{i=1}^{100} X_i}) = 0{,}9$
$P(3{,}3656 \leq \lambda \leq 4{,}4799) = 0{,}9 \Rightarrow IC = [3{,}3656; 4{,}4799]$

11.9. 9)

$\sum_{i=1}^{16} X_i = 2632 + 1742 + 667 + 1184 + 3896 + 809 + 1412 + 1789 + 2396 + 3358 + 9901 + 1925 + 2981 + 1843 + 8315 + 1299 = 46149$

Tenemos 16 valores, por lo tanto buscamos en la tabla de distribuciones de chi cuadrado con 32 grados de libertad:
$P(20{,}0719) = 0{,}95$

$P(\frac{20{,}0719}{2\sum_{i=1}^{16} X_i} \leq \lambda) = 0{,}95$
$P(2{,}175x10^{-4} \leq \lambda) = 0{,}95 \Rightarrow LI = 2{,}175x10^{-4}$

11.10. 10)

Para la distribución de poisson se usa como pivote $\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\lambda}{\sqrt{n\lambda}} \sim N(0,1)$
Se puede usar Slutsky para aproximar y llegar a este pivote equivalente $\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\lambda}{\sqrt{n\overline{X}}} \sim N(0,1)$

a) X: Cantidad de emisiones en 10 segundos.
$X \sim Pois(10\lambda)$
$X \sim N(10\lambda, \sqrt{10\lambda})$

$\hat{\lambda} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{tn} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{10n}$
$\hat{\lambda} \sim N(\lambda, \sqrt{\lambda/t_n})$

Busco en la tabla de distribución normal:
$P(1{,}96) = 0{,}975$

$P(Z_{\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\hat{\lambda}-\lambda}{\sqrt{\hat{\lambda}/tn}} \leq Z_{1-\frac{\alpha}{2}}) = 1-\alpha$
$P\Big(\hat{\lambda} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{\lambda}}{tn}} \leq \lambda \leq \hat{\lambda} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{\lambda}}{tn}}\Big) = 1-\alpha$
$P\Big(0{,}4 - 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{0{,}4}{10}} \leq \lambda \leq 0{,}4 + 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{0{,}4}{10}}\Big) = 0{,}95$
$P\Big(0{,}008 \leq \lambda \leq 0{,}792\Big) = 0{,}95$

b) T: Tiempo hasta la primer emision.
$T \sim Exp(\lambda)$ $n = 4$
$2\lambda \sum_{i=1}^{n} T_i \sim \chi^2_{2n}$

$\sum_{i=1}^{4} T_i = 10$

Busco en la tabla de distribucion chi cuadrado con 8 grados de libertad:
$P(17{,}5345) = 0{,}025$
$P(2{,}1797) = 0{,}975$

$P(2{,}1797 \leq 2\lambda \sum_{i=1}^{n} T_i \leq 17{,}5345) = 0{,}95$
$P(\frac{2{,}1797}{2\sum_{i=1}^{4} T_i} \leq \lambda \leq \frac{17{,}5345}{2\sum_{i=1}^{4} T_i}) = 0{,}95$
$P(0{,}108985 \leq \lambda \leq 0{,}876725) = 0{,}95$

12. Guia 12

12.1. 1)

El error de tipo I es rechazar H_0 cuando es verdadera y el error de tipo II es aceptar H_0 cuando es falsa.

Para el error de tipo I calculamos la probabilidad de sacar 3 bolas rojas sabiendo que H_0 es verdad, es decir, que hay 3 rojas y 4 negras:

$P(\text{rechazar } H_0|H_0 \text{ es V}) = \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{35}$

Para el error de tipo II calculamos la probabilidad de sacar 0, 1 o 2 bolas rojas sabiendo que H_0 es falsa, es decir, que hay 4 rojas y 3 negras:

$P(\text{aceptar } H_0|H_0 \text{ es F}) = \binom{3}{0} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} + \binom{3}{1} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} + \binom{3}{2} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{5} = \frac{31}{35}$

12.2. 2)

Similar al ejemplo 1.1 de la nota 11 de Grynberg.

Solo hay un valor observado $\rightarrow n = 1$

a) Error de tipo I: $\beta(\theta) = P(\text{ Rechazar } H_0|\theta = 3) = P(X_{(n)} < 1)$

Sabemos que $Q(X, \theta) = X_{(n)}/\theta$ es un pivote para θ y que su distribución tiene densidad de probabilidades $f_Q(q) = nq^{n-1}1\{0 < q < 1\}$. Por lo tanto:

$P(X_{(n)} < 1) = P(\frac{X_{(n)}}{\theta} < \frac{1}{\theta}) = \int_0^{min(1,\frac{1}{\theta})} nq^{n-1}dq = min(1, \frac{1}{\theta})^n \xrightarrow{\theta=3} \frac{1}{3^n} \xrightarrow{n=1} \frac{1}{3}$

Error de tipo II: $P(\text{ Aceptar } H_0|\theta = 2) = P(X_{(n)} \geq 1) = P(\frac{X_{(n)}}{\theta} \geq \frac{1}{\theta}) = \int_{\frac{1}{\theta}}^1 nq^{n-1}dq = 1^n - (\frac{1}{\theta})^n \xrightarrow{n=1} 1 - \frac{1}{\theta} \xrightarrow{\theta=2} \frac{1}{2}$

b) Error de tipo I: $\beta(\theta) = P(\text{ Rechazar } H_0|\theta = 3) = P(1 < X_{(n)} < 2) = P(\frac{1}{\theta} < \frac{X_{(n)}}{\theta} < \frac{2}{\theta}) = \int_{\frac{1}{\theta}}^{min(1,\frac{2}{\theta})} nq^{n-1}dq = min(1, \frac{2}{\theta})^n - (\frac{1}{\theta})^n \xrightarrow{n=1} min(1, \frac{2}{\theta}) - (\frac{1}{\theta}) \xrightarrow{\theta=3} \frac{1}{3}$

Error de tipo II: $P(\text{ Aceptar } H_0|\theta = 2) = P(X_{(n)} \leq 1 \cup X_{(n)} \geq 2) = P(X_{(n)} \leq 1) + P(X_{(n)} \geq 2) = P(\frac{X_{(n)}}{\theta} \leq \frac{1}{\theta}) + P(\frac{X_{(n)}}{\theta} \geq \frac{2}{\theta}) = \int_0^{\frac{1}{\theta}} nq^{n-1}dq + \int_{\frac{2}{\theta}}^1 nq^{n-1}dq = (\frac{1}{\theta})^n + 1^n - (\frac{2}{\theta})^n \xrightarrow{n=1} 1 - \frac{1}{\theta} \xrightarrow{\theta=2} \frac{1}{2}$

c) $\alpha(\delta) = max\beta(\theta) = \max P(\text{ Rechazar } H_0|\theta = 3) = \max P(X_{(n)} < k|\theta = 3) = min(1, \frac{k}{\theta})$
$\alpha = 0{,}5 = \frac{k}{\theta} \xrightarrow{\theta=3} 0, 5 = \frac{k}{3} \Rightarrow k = 1{,}5$

La region critica es $x < 1{,}5$

12.3. 3)

a) $B(\theta) = P($ Rechazar $H_0|\theta \in [3,4]) = P(X_{(n)} \notin [2{,}9;4]) = P(X_{(n)} < 2{,}9) + P(X_{(n)} > 4) = P(\frac{X_{(n)}}{\theta} < \frac{2{,}9}{\theta}) + P(\frac{X_{(n)}}{\theta} > \frac{4}{\theta}) = \int_0^{min(1,\frac{2{,}9}{\theta})} nq^{n-1}dq + \int_{\frac{4}{\theta}}^1 nq^{n-1}dq = min(1, \frac{2{,}9}{\theta})^n + (1^n - (\frac{4}{\theta})^n)1_{\{4<\theta\}}$

$$\beta(\theta) = \begin{cases} 1 & 0 \leq \theta < 2{,}9 \\ (\frac{2{,}9}{\theta})^n & 2{,}9 \leq \theta < 4 \\ (\frac{2{,}9}{\theta})^n + 1^n - (\frac{4}{\theta})^n & \theta \geq 4 \end{cases}$$

Para la funcion de potencia le sacamos el intervalo $3 < \theta < 4$ ya que la funcion de potencia se define como las probabilidades de decision erronea y en ese intervalo H_0 es verdadera.

$$pot(\theta) = \begin{cases} 1 & 0 \leq \theta < 2{,}9 \\ (\frac{2{,}9}{\theta})^n & 2{,}9 \leq \theta < 3 \\ 0 & 3 \leq \theta < 4 \\ (\frac{2{,}9}{\theta})^n + 1^n - (\frac{4}{\theta})^n & \theta \geq 4 \end{cases}$$

b) El nivel de significacion (α) se define como:

$\alpha(\delta) = \max \beta(\theta) \forall \theta \in \Theta_0$

Es decir, el nivel de significacion del test es la máxima probabilidad de rechazar la hipótesis H_0 cuando es verdadera.

$\alpha(\delta) = (\frac{2{,}9}{\theta})^n$

c) El nivel de significación es maximo cuando $\theta = 3$

$(\frac{2{,}9}{\theta})^n = 0{,}1$
$n = \frac{ln(0{,}1)}{ln(\frac{2{,}9}{3})} = 67{,}91 \simeq 68$

12.4. 4)

$H)\mu \leq 1$
$K)\mu > 1$

$\alpha = 0{,}1$

Recordar que para distribuciones exponenciales:
$\mu = \frac{1}{\lambda}$
$P(t < T) = F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$

La regla de decisión dice cuando se va a rechazar H, podemos elegir un valor k y decir que cuando X sea menor o mayor a ese valor la hipotesis se rechaza, sin embargo, no tiene sentido buscar un valor k para el que cuando X sea menor la hipotesis se rechaza ya que $H)\mu \leq 1$, siempre que X sea menor a un valor no es coherente decir que no se puede cumplir que $\mu \leq 1$, por esto se elige un valor k para el que X debe ser mayor. Si X es mayor a un k lo suficientemente grande podemos asegurar que la hipotesis H es falsa, es decir, que se cumple $\mu > 1$.

$\beta(\theta) = P(\text{ Rechazar } H|\mu \leq 1) = P(X > k) = 1 - (1 - e^{-\frac{k}{\mu}}) = e^{-\frac{k}{\mu}}$

La funcion β es máxima para $\mu = 1$ (este valor se debe buscar entre los cuales la hipótesis H se cumple).

$\alpha(\delta) = e^{-k}$
$0{,}1 = e^{-k}$
$k = -ln(0{,}1) = 2{,}303$

La regla de decisión queda definida como:

$\delta(x) = 1_{\{x > 2{,}303\}}$

$P(\text{ Aceptar } H|\mu = 1{,}1) = 1 - P(\text{ Rechazar } H|\mu = 1{,}1) = e^{-\frac{2{,}303}{1{,}1}} = 1 - 0{,}1232 = 0{,}8768$

12.5. 5)

$H_0)\mu \leq 5$
$H_1)\mu > 5$

$\alpha = 0{,}05$

Recordar que para distribucion de Poisson:
$\mu = \lambda t$
$P(k|\lambda, t) = \frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!}$

$\beta(\theta) = P(\text{ Rechazar } H_0|\mu \leq 5) = P(X > k) = 1 - \sum_{i=1}^{k} \frac{(\mu)^k e^{-\mu}}{k!}$

$\alpha(\delta) = 1 - \sum_{i=0}^{k} \frac{5^k e^{-5}}{k!}$
$0{,}05 = 1 - \sum_{i=0}^{k} \frac{5^k e^{-5}}{k!}$
$k = 9$

$\overline{X} = \frac{3+7+2+4}{4} = 4$

Según la regla de decision $\delta(X) = 1\{X > 9\}$ tenemos que $4 < 9$ asi que no rechazamos la hipótesis.

12.6. 6)

a) Falso. El nivel de significación es la máxima probabilidad de rechazar la hipótesis nula cuando es verdadera.

b) Verdadero.

c) Falso. El nivel de significación es la máxima probabilidad de rechazar la hipótesis fundamental cuando es verdadera, si esta disminuye hay más probabilidades de aceptarla, no rechazarla, que es lo que expresa la funcion de potencia.

d) Falso. Puede no haber evidencia significativa suficiente.

e) Verdadero.

f) Falso.

g) Falso. La region critica se calcula en funcion de un nivel de significación y la distribucion de la muestra, no depende de sus valores.

h) Verdadero.

12.7. 7)

$H_0)\mu \leq \mu_0$
$H_1)\mu > \mu_0$

Para distribuciones normales con varianza conocida tenemos como pivote para μ :

$Q(\overline{X}, \mu) = \frac{\sqrt{n}(\overline{X}-\mu)}{\sigma} \sim N(0,1)$

a) En la tabla de distribución normal:
$P(1{,}65) = 0{,}95$

$\beta(\mu) = P(\text{ Rechazar } H|\mu \leq \mu_0) = P(\frac{\sqrt{n}(\overline{X}-\mu_0)}{\sigma} > 1{,}65) = P(\overline{X} > \mu_0 + 1{,}65\frac{\sigma}{\sqrt{n}})$

Recordemos que $\overline{X} \sim N(\mu, \sigma^2/n)$
Estandarizando: $\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$

$P(\overline{X} > \mu_0 + 1{,}65\frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = P(\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} > \frac{\mu_0+1{,}65\frac{\sigma}{\sqrt{n}}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}) = P(\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} > 1{,}65 + \frac{\mu_0-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}) = P(\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} < -1{,}65 - \frac{\mu_0-\mu}{\sigma/\sqrt{n}})$

$$\delta(X) = \begin{cases} 1 & \overline{X} > \mu_0 + 1{,}65\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \\ 0 & \overline{X} \leq \mu_0 + 1{,}65\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \end{cases}$$

b) $\beta(\mu) = \Phi(-1{,}65 - \frac{\mu_0-\mu}{\sigma/\sqrt{n}})$

(Extraido de las páginas 14 y 15 del apunte 11 de Grynberg)

(a) $\beta(\mu)$ es simétrica con respecto a μ_0: $\beta(\mu_0 + m) = \beta(\mu_0 - m)$ para tomo $m > 0$.
(b) $\beta(\mu)$ es creciente sobre la semi-recta (μ_0, ∞).
(c) $\beta(\mu_0) = \alpha$
(d) $lim_{\mu\to+\infty}\beta(\mu) = 1$

12.8. 8)

$H_0)\mu = 8,21 = \mu_0$
$H_1)\mu \neq 8,21$

Usamos como pivote: $\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$

En la tabla de distribución normal: $P(1{,}96) = 0{,}975$

$\delta(X) = 1\{\frac{|X-\mu_0|}{\sigma/\sqrt{n}} > 1{,}96\}$

$P($ Aceptar $H_0|\mu = 8{,}21) = 0{,}95$
$P($ Rechazar $H_0|\mu = 8{,}21) = 0{,}05$
$P($ Rechazar $H_0|\mu = 8{,}18) = P($ Rechazar $H_0|\mu = 8{,}24) = 0{,}95$
$P($ Aceptar $H_0|\mu = 8{,}18) = P($ Aceptar $H_0|\mu = 8{,}24) = 0{,}05$

$P(\frac{|\overline{X}-\mu_0|}{\sigma/\sqrt{n}} < 1{,}96|\mu = 8{,}24) = 0{,}05$
$P(\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} + \frac{\mu-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} < 1{,}96|\mu = 8{,}24) = 0{,}05$
$P(\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} < 1{,}96 - \frac{\mu-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}|\mu = 8{,}24) = 0{,}05$

$P(Z < z) = 0{,}05 \Rightarrow z = -1{,}645$

$1{,}96 - \frac{\mu-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = -1{,}645$
$1{,}96 - \frac{8{,}24-8{,}21}{0{,}02/\sqrt{n}} = -1{,}645 \Rightarrow n = 5{,}77 \simeq 6$

12.9. 9)

$H_0)\mu > 790 = \mu_0$
$H_1)\mu \leq 790$

$n = 100$

Al no conocer la desviación usamos como pivote el mismo que en el ejercicio 11.4:
$\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$

$\delta(X) = 1\{\frac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}} < k\}$

$P($ Rechazar $H_0|\mu > 790) = 0{,}05$
$P(\frac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}} < k|\mu > 790) = 0{,}05$
$P(\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} + \frac{\mu-\mu_0}{S/\sqrt{n}} < k|\mu > 790) = 0{,}05$
$P(\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} < k - \frac{\mu-\mu_0}{S/\sqrt{n}}|\mu > 790) = 0{,}05$

La probabilidad de rechazar la hipotesis se maximiza con $\mu = 790$.

$P(Z < z) = 0{,}05 \Rightarrow z = -1{,}660$

$k - \frac{\mu-\mu_0}{S/\sqrt{n}} = -1{,}660$
$k - \frac{790-790}{79{,}01/\sqrt{100}} = -1{,}660 \Rightarrow k = -1{,}660$

Evaluamos la hipotesis según la regla de desición:
$\frac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}} < -1{,}660$
$\frac{852{,}4-790}{79{,}01/\sqrt{100}} < -1{,}660$
$7{,}898 < -1{,}660$ Abs!

La hipotesis no se puede rechazar.

12.10. 10)

Se ponen al reves las hipótesis ya que nomas podemos llegar a la conclusion de que H_0 se rechaza o no se rechaza. Si se rechaza H_0 entoneces se acepta H_1, que es lo que queriamos probar, en cambio si no se rechaza H_0 no sabemos nada.

$H_0) \mu \geq 5{,}5$
$H_1) \mu < 5{,}5 = \mu_0$

$n = 29$

Usamos como pivote el mismo que el ejercicio anterior:
$\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$

$\delta(X) = 1\{\frac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}} < k\}$

$P($ Rechazar $H_0|\mu \geq 5{,}5) = 0{,}05$
$P(\frac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}} < k|\mu \geq 5{,}5) = 0{,}05$
$P(\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} + \frac{\mu-\mu_0}{S/\sqrt{n}} < k|\mu \geq 5{,}5) = 0{,}05$
$P(\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} < k - \frac{\mu-\mu_0}{S/\sqrt{n}}|\mu \geq 5{,}5) = 0{,}05$

La probabilidad de rechazar la hipotesis se maximiza con $\mu = 5{,}5$.

$P(Z < z) = 0{,}05 \Rightarrow z = -1{,}701$

$k - \frac{\mu-\mu_0}{S/\sqrt{n}} = -1{,}701$
$k - \frac{5{,}5-5{,}5}{S/\sqrt{n}} = -1{,}701 \Rightarrow k = -1{,}701$

Calculando como en el ejercicio 11.4 obtenemos lo siguiente:
$\overline{X} = 5{,}4479$
$S = 0{,}22094$

Evaluamos la hipotesis según la regla de desición:
$\frac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}} < -1{,}701$
$\frac{5{,}4479-5{,}5}{0{,}22094/\sqrt{29}} < -1{,}701$
$-1{,}2699 < -1{,}701$ Abs!

La hipotesis no se puede rechazar.

12.11. 11)

12.12. 12)

$H_0) \mu = 10$
$H_1) \mu \neq 10$

Por teorema central del limite uso como pivote:

$\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$

En la tabla de distribución normal: $P(1{,}645) = 0{,}95$

$\delta(X) = 1\{\frac{|\overline{X}-\mu_0|}{\sigma/\sqrt{n}} > 1{,}645\}$

a) $\frac{|\overline{X}-\mu_0|}{\sigma/\sqrt{n}} > 1{,}645$
$\frac{|10{,}1-10|}{0{,}3/\sqrt{100}} > 1{,}645$
$3{,}333 > 1{,}645$

Se rechaza la hipotesis.

b) $P(\frac{|\overline{X}-\mu_0|}{\sigma/\sqrt{n}} > 1{,}645) = P(\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} + \frac{\mu-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} > 1{,}645) = P(\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} > 1{,}645 - \frac{\mu-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}) = P(\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} > 1{,}645 - \frac{10{,}05-10}{0{,}3/\sqrt{100}}) = P(\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} > -0{,}02166) = 0{,}5080$

c) $P(Z > z) = 0{,}8 \Rightarrow z = -0{,}84$
$1{,}645 - \frac{\mu-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = -0{,}84$
$1{,}645 - \frac{10{,}05-10}{0{,}3/\sqrt{n}} = -0{,}84$
$n = (\frac{(1{,}645+0{,}84)0{,}3}{10{,}05-10})^2 = 222{,}31 \simeq 223$

12.13. 13)

a)
$H_0)\mu \geq 1000 = \mu_0$
$H_1)\mu < 1000$

Usamos como pivote:
$\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$

En la tabla de t de student con 74 grados de libertad:
$P(Z < z) = 0{,}05 \Rightarrow z = -1{,}6657$

$\delta(X) = 1\{\frac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}} < -1{,}6657\}$

$\frac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}} < -1{,}6657$
$\frac{992-1000}{10/\sqrt{75}} < -1{,}6657$
$-6{,}93 < -1{,}6657$

La hipótesis H_0 se rechaza.

b)
$H_0)\sigma \geq 14$
$H_1)\sigma < 14$

$(n-1)\frac{S^2}{14^2} \sim \chi^2_{n-1}$

En la tabla de chi cuadrado con 74 grados de libertad:
$\chi^2_{74;0{,}95} \simeq 53$

$\delta(X) = 1\{(n-1)\frac{S^2}{14^2} < 53\}$

$(n-1)\frac{S^2}{14^2} < 53$
$(75-1)\frac{10^2}{14^2} < 53$
$37{,}75 < 53$

La hipótesis H_0 se rechaza.

12.14. 14)

$H_0)p \leq 0{,}8 = p_0$
$H_1)p > 0{,}8$

Como no dice nada sobre el nivel de significación usamos $\alpha = 0{,}05$ por ser el valor más común.

Se trata de una distribución de Bernoulli, usaremos como pivote:
$\frac{\sqrt{n}(\overline{X}-p)}{\sqrt{p(1-p)}} \sim N(0,1)$

Para que no quede una cuadratica molesta aproximamos las p de abajo con $\overline{X}$ como dijimos en el punto 11.6.

En la tabla de distribución normal:
$P(Z > z) = 0{,}05 \Rightarrow z = -1{,}645$

$\delta(X) = 1\{\frac{\sqrt{n}(\overline{X}-p_0)}{\sqrt{\overline{X}(1-\overline{X})}} > -1{,}645\}$

$\frac{\sqrt{n}(\overline{X}-p_0)}{\sqrt{\overline{X}(1-\overline{X})}} > -1{,}645$
$\frac{\sqrt{1000}(0{,}1-0{,}08)}{\sqrt{0{,}1(1-0{,}1)}} > -1{,}645$
$2{,}108 > -1{,}645$

La hipotesis H_0 se rechaza, es decir, $p > 0{,}8$.

12.15. 15)

12.16. 16)

Muy similar al ejercicio 14 de esta misma guía.

$H_0)p > 0{,}5 = p_0$
$H_1)p \leq 0{,}5$

Como no dice nada sobre el nivel de significación usamos $\alpha = 0{,}05$ por ser el valor más común.

Se trata de una distribución de Bernoulli, usaremos como pivote:
$\frac{\sqrt{n}(\overline{X}-p)}{\sqrt{p(1-p)}} \sim N(0,1)$

En la tabla de distribución normal:
$P(Z < z) = 0{,}05 \Rightarrow z = -1{,}645$

a)
$\delta(X) = 1\{\frac{\sqrt{n}(\overline{X}-p_0)}{\sqrt{\overline{X}(1-\overline{X})}} < -1{,}645\}$

$\frac{\sqrt{n}(\overline{X}-p_0)}{\sqrt{\overline{X}(1-\overline{X})}} < -1{,}645$
$\frac{\sqrt{1000}(0{,}54-0{,}5)}{\sqrt{0{,}54(1-0{,}54)}} < -1{,}645$
$2{,}538 < -1{,}645$ Abs!

La hipotesis no se puede rechazar.

12.17. 17)

$H_0)\lambda \leq 0{,}00019 = \lambda_0$
$H_1)\lambda > 0{,}00019$

$\alpha = 0{,}05$
$\sum_{i=1}^{i=16} = 46149$

$\lambda 2 \sum_{i=1}^{i=16} X_i \sim \chi^2_{2n}$

Busco en la tabla de distribución chi cuadrado con 32 grados de libertad:
$P(Z < z) = 0{,}05 \Rightarrow z = 20{,}0719$

$\delta(X) = 1\{\lambda_0 2 \sum_{i=1}^{i=16} X_i < 20{,}0719\}$

$\lambda_0 2\sum_{i=1}^{i=16} X_i < 20{,}0719$
$0{,}00019 \cdot 2 \cdot 46149 < 20{,}0719$
$17{,}5366 < 20{,}0719$

Se rechaza la hipotesis H_0

12.18. 18)

12.19. 19)

Longitud lote a: $X_a \sim N(\mu_a, \sigma^2)$
Longitud lote b: $X_b \sim N(\mu_b, \sigma^2)$
Cantidad de datos lota a: $n = 12$
Cantidad de datos lota b: $m = 7$

$\overline{X}_a = \frac{134+146+105+119+124+161+107+83+113+129+97+123}{12} = 120{,}0833$
$\overline{X}_b = \frac{70+118+101+85+107+132+94}{7} = 101$

$\sum_{i=1}^{n} \cdot X_{ia}^2 = 134^2+146^2+105^2+119^2+124^2+161^2+107^2+83^2+113^2+129^2+97^2+123^2 = 178041$
$\sum_{i=1}^{n} \cdot X_{ib}^2 = 70^2 + 118^2 + 101^2 + 85^2 + 107^2 + 132^2 + 94^2 = 73959$

$S_a = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_{ia} - \overline{X}_b)^2} = \sqrt{\frac{1}{n-1}(\sum_{i=1}^{n} \cdot X_{ia}^2 - n\overline{X}_a^2)} = \sqrt{\frac{1}{12-1}(178041 - 12 \cdot 120{,}0833^2)} = 21{,}3222$
$S_b = \sqrt{\frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{n}(X_{ib} - \overline{X}_b)^2} = \sqrt{\frac{1}{m-1}(\sum_{i=1}^{m} \cdot X_{ib}^2 - m\overline{X}_b^2)} = \sqrt{\frac{1}{7-1}(73959 - 7 \cdot 101^2)} = 20{,}6236$

$\widetilde{S} = \sqrt{\frac{(n-1)S_a^2+(m-1)S_b^2}{m+n-2}} = \sqrt{\frac{(12-1)\cdot 21{,}3222^2+(7-1)\cdot 20{,}6236^2}{12+7-2}} = 21{,}0783$

$H_0)\mu_a - \mu_b = 0$
$H_1)\mu_a - \mu_b \neq 0$

Pivote que voy a usar:
$\frac{\overline{X}_a-\overline{X}_b-(\mu_a-\mu_b)}{\widetilde{S}\sqrt{1/n+1/m}} \sim t_{n+m-2}$

$\delta(X) = 1\{\left|\frac{\overline{X}_a-\overline{X}_b}{\widetilde{S}\sqrt{1/n+1/m}}\right| > c\}$
$c = t_{0{,}99;17} = 2{,}567$

$\left|\frac{\overline{X}_a-\overline{X}_b}{\widetilde{S}\sqrt{1/n+1/m}}\right| > 2{,}567$
$\left|\frac{120{,}0833-101}{21{,}0783\sqrt{1/12+1/7}}\right| > 2{,}567$
$1{,}90362 > 2{,}567$ Abs!.

No se rechaza la hipotesis.