Nota: Esta guía pretende ser una ayuda para recordar sólo aquellas fórmulas que de otro modo pueden ser difíciles de memorizar para un examen. De ningún modo se pretende dar un resumen de todas las fórmulas, y mucho menos de todos los temas de la materia. Se supone que el alumno ha estudiado la asignatura y no necesita tener anotadas las fórmulas básicas.

Cálculo combinatorio

Variaciones y combinaciones

	Considerando el orden (Variaciones)	Sin considerar el orden (Combinaciones)
Simple	$V_{m,n} = \frac{m!}{(m-n)!}$	$C_{m,n} = \binom{m}{n} = \frac{m!}{(m-n)!n!}$
Con repetición	$V'_{m,n} = m^n$	$C'_{m,n} = \frac{(m+n-1)!}{(m-1)!n!}$

Permutaciones

Simple: $P_n = n!$

Con elementos repetidos: $P_{n[r,s,t\ldots]} = \frac{n!}{r!\,s!\,t!\ldots}$

Variables aleatorias

Notación: $f(X = x)$ o simplemente $f(x)$ denota la función densidad de probabilidad de la variable continua X evaluada en el valor x. $P(X = x)$ o $P(x)$ es la función de probabilidad de la variable discreta X.

Para no repetir innecesariamente, algunas de las ecuaciones se expresan sólamente para variables continuas. Para variables discretas, reemplazar integrales por sumatorias.

Esperanza

$$E[\varphi(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\, f(x)\, dx \qquad E[\varphi(x,y)] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x,y)\, f(x,y)\, dx\, dy$$

Media: $\mu_x = E[x]$

Varianza: $\sigma_x^2 = E[(x-\mu_x)^2]$

Momento de orden r: $M_r = E[x^r]$

Momento centrado de orden r: $MC_r = E[(x-\mu_x)^r]$

Covarianza: $C_{xy} = E[(x-\mu_x)(y-\mu_y)]$

Coeficiente de correlación: $\rho_{xy} = \frac{C_{xy}}{\sigma_x\,\sigma_y}$

Línea de regresión $y \mid x$: $\mu_{y \mid x} = E[y \mid x]$

Propiedades

X, Y: variables aleatorias; a, b, c: constantes.

$$\sigma_x^2 = E[x^2] - \mu_x^2$$
$$C_{xy} = E[x\,y] - \mu_x\,\mu_y$$
$$E[a\,x + b\,x + c] = a\,E[x] + b\,E[y] + c$$
$$\sigma^2_{(a\,x+b\,x+c)} = a^2\,\sigma_x^2 + b^2\,\sigma_y^2 + 2\,a\,b\,C_{xy}$$

Otras definiciones

Mediana: $Med_x = \{x/F(X=x) = 1/2\}$

Modo o Moda: $Mod_x = \{x/f(X=x) \text{ es máximo}\}$

Mezcla de n variables

Sea un conjunto de n variables aleatorias X_i, donde cada una se asocia con el resultado R_i de un experimento aleatorio. Siendo $P(R_i)$ la probabilidad de ocurrencia de cada resultado, y donde $\sum_{i=1}^{n} P(R_i) = 1$:

$$f(X_M = x) = \sum_{i=1}^{n} f(X_i = x)\,P(R_i)$$

Propiedades

$$E[X_M] = \sum_{i=1}^{n} E[X_i]\,P(R_i)$$

$$\sigma^2_{X_M} = \sum_{i=1}^{n} P(R_i)\,\left[\sigma^2_{X_i} + (E[X_i] - E[X_M])^2\right]$$

$n = 2$: $$\sigma^2_{X_M} = \sigma^2_{X_1}\,P(R_1) + \sigma^2_{X_2}\,P(R_2) + (E[X_1] - E[X_2])^2\,P(R_1)\,P(R_2)$$

Cambio de variable

Función cambio de variable $Y = \varphi(X)$:

$$f(Y = y) = \sum_{i=1}^{n} \frac{f(X = x_i)}{|\varphi'(x_i)|}$$

donde x_i son las n soluciones de la ecuación $y = \varphi(x)$.

Extremos

Sean las v.a. $X_1, X_2, \ldots, X_n$ independientes e idénticamente distribuidas, con función de distribución $F(X = x)$ y función densidad $f(X = x)$.

Máximo

Función cambio de variable $X_M = \text{máx}\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$:

$$F(X_M = y) = [F(X = x)]^n$$

$$f(X_M = y) = n\, f(X = x)\, [F(X = x)]^{n-1}$$

Mínimo

Función cambio de variable $X_m = \text{mín}\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$:

$$F(X_m = x) = 1 - [1 - F(X = x)]^n$$

$$f(X_m = x) = n\, f(X = x)\, [1 - F(X = x)]^{n-1}$$

Variables particulares

Proceso Bernoulli

Parámetros:	p	probabilidad de éxito en un ensayo
	n	cantidad de ensayos
	r	cantidad de éxitos

Variable	Función	Rango	Media	Varianza
Binomial	$P(r \mid p, n) = \binom{n}{r}\, p^r\, (1-p)^{n-r}$	$0 \leq r \leq n$	$n\, p$	$n\, p\, (1-p)$
Geométrica	$P(n \mid p) = p\, (1-p)^{n-1}$	$n \geq 1$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
Pascal	$P(n \mid p, r) = \binom{n-1}{r-1}\, p^r\, (1-p)^{n-r}$	$n \geq r$	$\frac{r}{p}$	$r\, \frac{1-p}{p^2}$
Beta	$f(p \mid n, r) = \frac{(n+1)!}{r!\,(n-r)!}\, p^r\, (1-p)^{n-r}$	$0 \leq p \leq 1$	$\frac{r+1}{n+2}$	$\frac{(r+1)\,(n-r+1)}{(n+2)^2\,(n+3)}$

Propiedades:

- La suma de n variables Bernoulli de parámetro p genera una variable binomial de parámetros n y p.
- La suma de r variables geométricas de parámetro p genera una variable Pascal de parámetros p y r.

Proceso Poisson

Parámetros: λ tasa de éxito en el continuo
t cantidad de continuo
k cantidad de éxitos

Variable	Función	Rango	Media	Varianza
Poisson	$P(k \mid \lambda, t) = \frac{(\lambda\, t)^k\, e^{-\lambda\, t}}{k!}$	$k \geq 0$	$\lambda\, t$	$\lambda\, t$
Exponencial	$f(t \mid \lambda) = \lambda\, e^{-\lambda\, t}$	$t \geq 0$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
Gamma	$f(t \mid \lambda, k) = \frac{\lambda^k}{(k-1)!}\, t^{k-1}\, e^{-\lambda\, t}$	$t \geq 0$	$\frac{k}{\lambda}$	$\frac{k}{\lambda^2}$

Propiedades:

- La suma de n variables Poisson de parámetros λ y t genera otra variable Poisson de parámetros $n\,\lambda$ y t.
- La suma de k variables exponenciales de parámetro λ genera una variable Gamma de parámetros λ y k.

Proceso Hipergeométrico

Parámetros: N cantidad de elementos en el universo
R cantidad de elementos asociados con el evento “éxito”
n cantidad de ensayos
r cantidad de éxitos

Variable	Función	Rango	Media
Hipergeométrica	$P(r) = \frac{\binom{R}{r}\binom{N-R}{n-r}}{\binom{N}{n}}$	$\max\{0, n+R-N\} \leq r \leq \min\{n, R\}$	$\frac{n\,N}{2\,N-R}$

Otras distribuciones particulares

Variable	Función	Rango	Media	Varianza
Normal	$f(x \mid \mu_x, \sigma_x) = \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}\,\sigma_x}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)^2}$	$x \in \mathbb{R}$	μ_x	σ_x^2
Uniforme	$f(x \mid a, b) = \frac{1}{b-a}$	$a \leq x \leq b$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
Gamma generalizada	$f(x \mid \lambda, k) = \frac{\lambda^k}{\Gamma(k)}\, x^{k-1}\, e^{-\lambda\, x}$	$x \geq 0$	$\frac{k}{\lambda}$	$\frac{k}{\lambda^2}$
Beta generalizada	$f(x \mid \alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}\, x^{\alpha-1}\,(1-x)^{\beta-1}$	$0 \leq x \leq 1$	$\frac{\alpha}{\alpha+\beta}$	$\frac{\alpha\,\beta}{(\alpha+\beta)^2\,(\alpha+\beta+1)}$
χ^2	$f(x \mid \nu) = \frac{2^{-\nu/2}}{\Gamma(\nu/2)}\, x^{\nu/2-1}\, e^{-x/2}$	$x \geq 0$	ν	$2\,\nu$

Notas:

- **La función Gamma:** $\Gamma(x)$ es una función *matemática* que se calcula como una integral impropia, y está tabulada. Propiedad: $\forall\, x \in \mathbb{N} : \Gamma(x+1) = x!$
- La variable χ^2 de ν grados de libertad es una variable Gamma generalizada con parámetros $\lambda = 1/2$ y $k = \nu/2$.