Estimación por intervalo
(Borradores, Curso 23)

Sebastian Grynberg

27-29 de mayo de 2013

Si ves al futuro, dile que no venga.
(Juan José Castelli)

Índice

1. Estimación por intervalo

En lo que sigue consideramos el problema de estimación de parámetros utilizando intervalos de confianza. Consideramos una muestra aleatoria $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ de la variable aleatoria X cuya función de distribución $F(x) := \mathbb{P}(X \leq x)$, pertenece a la familia paramétrica de distribuciones (distinguibles) $\mathcal{F} = \{F_\theta : \theta \in \Theta\}$, $\Theta \subset \mathbb{R}$. La idea básica es la siguiente: aunque no podamos determinar exactamente el valor de θ podemos tratar de construir un intervalo aleatorio $[\theta^-, \theta^+]$ tal que con una probabilidad bastante alta, sea capaz de "capturar" el valor desconocido θ.

Definición 1.1 (Intervalo de confianza)**.** Un *intervalo de confianza* para θ de nivel β es un intervalo aleatorio, $I(\mathbf{X})$, que depende de la muestra aleatoria $\mathbf{X}$, tal que

$$\mathbb{P}_\theta(\theta \in I(\mathbf{X})) = \beta, \tag{1}$$

para todo $\theta \in \Theta$.

Definición 1.2 (Cotas de confianza)**.** Una *cota inferior de confianza* para θ, de nivel β, basada en la muestra aleatoria $\mathbf{X}$, es una variable aleatoria $\theta_1(\mathbf{X})$ tal que

$$\mathbb{P}_\theta(\theta_1(\mathbf{X}) \leq \theta) = \beta, \tag{2}$$

para todo $\theta \in \Theta$.

Una *cota superior de confianza* para θ, de nivel β, basada en la muestra aleatoria $\mathbf{X}$, es una variable aleatoria $\theta_2(\mathbf{X})$ tal que

$$\mathbb{P}_\theta(\theta \leq \theta_2(\mathbf{X})) = \beta, \tag{3}$$

para todo $\theta \in \Theta$.

Nota Bene. En el caso discreto no siempre se pueden obtener las igualdades (1), (2) o (3). Para evitar este tipo de problemas se suele definir un intervalo mediante la condición más laxa $\mathbb{P}_\theta(\theta \in I(\mathbf{X})) \geq \beta$, $\forall\, \theta$. En este caso el $\min_\theta P_\theta(\theta \in I(\mathbf{X}))$ se llama *nivel de confianza.*

Observación 1.3. Sean $\theta_1(\mathbf{X})$ una cota inferior de confianza de nivel $\beta_1 > 1/2$ y $\theta_2(\mathbf{X})$ una cota superior de confianza de nivel $\beta_2 > 1/2$, tales que $\mathbb{P}_\theta(\theta_1(\mathbf{X}) \leq \theta_2(\mathbf{X})) = 1$ para todo $\theta \in \Theta$. Entonces,

$$I(\mathbf{X}) = [\theta_1(\mathbf{X}),\, \theta_2(\mathbf{X})]$$

define un intervalo de confianza para θ de nivel $\beta = \beta_1 + \beta_2 - 1$. En efecto,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_\theta\left(\theta \in I(\mathbf{X})\right) &= 1 - \mathbb{P}_\theta\left(\theta < \theta_1(\mathbf{X}) \text{ o } \theta > \theta_2(\mathbf{X})\right) \\
&= 1 - \mathbb{P}_\theta\left(\theta < \theta_1(\mathbf{X})\right) - \mathbb{P}_\theta\left(\theta > \theta_2(\mathbf{X})\right) \\
&= 1 - (1 - \beta_1) - (1 - \beta_2) = \beta_1 + \beta_2 - 1.
\end{aligned} \tag{4}$$

La identidad (4) muestra que la construcción de intervalos de confianza se reduce a la construcción de cotas inferiores y superiores. Más precisamente, *si se quiere construir un intervalo de confianza de nivel β, basta construir una cota inferior de nivel $\beta_1 = (1+\beta)/2$ y una cota superior de nivel $\beta_2 = (1+\beta)/2$.* □

Las ideas principales para construir intervalos de confianza están contenidas en el ejemplo siguiente.

Ejemplo 1.4 (Media de la normal con varianza conocida)**.** Sea $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ una muestra aleatoria de una variable aleatoria $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, con varianza σ^2 conocida. Para obtener un intervalo de confianza de nivel β para μ, consideramos el estimador de máxima verosimilitud para μ

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i.$$

La distribución de $\bar{X}$ se obtiene utilizando los resultados conocidos sobre sumas de normales independientes y de cambio de escala:

$$\bar{X} \sim \mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right).$$

En consecuencia,

$$\frac{\sqrt{n}\left(\bar{X} - \mu\right)}{\sigma} \sim \mathcal{N}\left(0, 1\right).$$

Por lo tanto, para cada $\mu \in \mathbb{R}$ vale que

$$\mathbb{P}_\mu\left(-z_{(1+\beta)/2} \leq \frac{\sqrt{n}\left(\bar{X} - \mu\right)}{\sigma} \leq z_{(1+\beta)/2}\right) = \beta.$$

Despejando μ de las desigualdades dentro de la probabilidad, resulta que

$$\mathbb{P}_\mu\left(\bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{(1+\beta)/2} \leq \mu \leq \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{(1+\beta)/2}\right) = \beta,$$

y por lo tanto el intervalo

$$I(\mathbf{X}) = \left[\bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{(1+\beta)/2},\ \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{(1+\beta)/2}\right]$$

es un intervalo de confianza para μ de nivel β. $\square$

Nota Bene. Las ideas principales para construir el intervalo de confianza contenidas en el ejemplo anterior son las siguientes:

1. Obtener un estimador del parámetro y caracterizar su distribución.
2. Transformar el estimador de parámetro hasta convertirlo en una variable aleatoria cuya distribución "conocida" que no dependa del parámetro.
3. Poner cotas para el estimador transformado y despejar el parámetro.

1.1. El método del pivote

Cuando se quieren construir intervalos de confianza para θ lo más natural es comenzar la construcción apoyándose en algún estimador puntual del parámetro $\hat{\theta}(\mathbf{X})$ (cuya distribución depende de θ). Una técnica general para construir intervalos de confianza, llamada el *método del pivote*, consiste en transformar el estimador $\hat{\theta}(\mathbf{X})$ hasta convertirlo en una variable aleatoria cuya distribución sea "conocida" y no dependa de θ. Para que la transformación sea útil no debe depender de ningún otro parámetro desconocido.

Definición 1.5 (Pivote)**.** Una variable aleatoria de la forma $Q(\mathbf{X},\theta)$ se dice una *cantidad pivotal* o un *pivote* para el parámetro θ si su distribución no depende de θ (ni de ningún parámetro desconocido, cuando hay varios parámetros).

Nota Bene. Por definición, la distribución del pivote $Q(\mathbf{X},\theta)$ no depende de θ. Para cada $\alpha \in (0,1)$ notaremos mediante q_α el cuantil-α del pivote. Si el pivote tiene distribución continua y su función de distribución es estrictamente creciente, q_α es la única solución de la ecuación

$$\mathbb{P}_\theta(Q(\mathbf{X},\theta) \leq q_\alpha) = \alpha.$$

Método. Si se consigue construir un pivote $Q(\mathbf{X},\theta)$ para el parámetro θ, el problema de la construcción de intervalos de confianza, de nivel β, se descompone en dos partes:

1. Encontrar parejas de números reales $a < b$ tales que $\mathbb{P}_\theta(a \leq Q(\mathbf{X};\theta) \leq b) = \beta$. Por ejemplo, $a = q_{\frac{1-\beta}{2}}$ y $b = q_{\frac{1+\beta}{2}}$.

2. Despejar el parámetro θ de las desigualdades $a \leq Q(\mathbf{X},\theta) \leq b$.

Si el pivote $Q(\mathbf{X},\theta)$ es una función monótona en θ se puede ver que existen $\theta_1(\mathbf{X})$ y $\theta_2(\mathbf{X})$ tales que

$$a \leq Q(\mathbf{X};\theta) \leq b \Leftrightarrow \theta_1(\mathbf{X}) \leq \theta \leq \theta_2(\mathbf{X})$$

y entonces

$$\mathbb{P}_\theta\left(\theta_1(\mathbf{X}) \leq \theta \leq \theta_2(\mathbf{X})\right) = \beta,$$

de modo que $I(\mathbf{X}) = [\theta_1(\mathbf{X}), \theta_2(\mathbf{X})]$ es un intervalo de confianza para θ de nivel β. $\square$

1.1.1. Pivotes decrecientes

Sea $Q(\mathbf{X},\theta)$ un pivote para θ que goza de las siguientes propiedades:

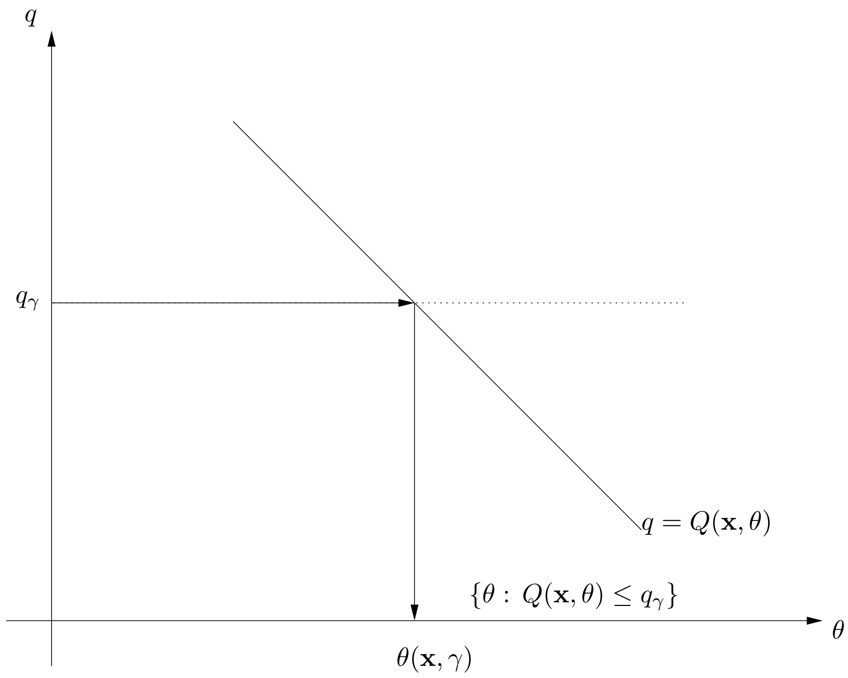
(i) la función de distribución de $Q(\mathbf{X},\theta)$ es continua y estrictamente creciente;

(ii) para cada $\mathbf{x}$, la función $Q(\mathbf{x},\theta)$ es continua y monótona decreciente en la variable θ:

$$\theta_1 < \theta_2 \implies Q(\mathbf{x},\theta_1) > Q(\mathbf{x},\theta_2)$$

Sea $\gamma \in (0,1)$, arbitrario pero fijo y sea q_γ el cuantil-γ del pivote $Q(\mathbf{X},\theta)$.
Para cada $\mathbf{x}$, sea $\theta(\mathbf{x},\gamma)$ la única solución de la ecuación en θ

$$Q(\mathbf{x},\theta) = q_\gamma.$$



Como el pivote $Q(\mathbf{X}, \theta)$ es decreciente en θ tenemos que

$$Q(\mathbf{X}, \theta) \leq q_\gamma \iff \theta(\mathbf{X}, \gamma) \leq \theta.$$

En consecuencia,

$$\mathbb{P}_\theta(\theta(\mathbf{X}, \gamma) \leq \theta) = \mathbb{P}_\theta(Q(\mathbf{X}, \theta) \leq q_\gamma) = \gamma, \qquad \forall\, \theta \in \Theta.$$

Por lo tanto, $\theta(\mathbf{X}, \gamma)$ es una cota inferior de confianza para θ de nivel γ y una cota superior de nivel $1 - \gamma$.

Método

Sea $\beta \in (0, 1)$. Si se dispone de un pivote $Q(\mathbf{X}, \theta)$ que satisface las propiedades (i) y (ii) enunciadas más arriba, entonces

- la variable aleatoria, $\theta_1(\mathbf{X})$, que se obtiene resolviendo la ecuación $Q(\mathbf{X}, \theta) = q_\beta$ es una *cota inferior de confianza* para θ, de nivel β.
- la variable aleatoria, $\theta_2(\mathbf{X})$, que se obtiene resolviendo la ecuación $Q(\mathbf{X}, \theta) = q_{1-\beta}$ es una *cota superior de confianza* para θ, de nivel β.
- el intervalo aleatorio $I(\mathbf{X}) = [\theta_1(\mathbf{X}), \theta_2(\mathbf{X})]$ cuyos extremos son las soluciones respectivas de las ecuaciones $Q(\mathbf{X}, \theta) = q_{\frac{1+\beta}{2}}$ y $Q(\mathbf{X}, \theta) = q_{\frac{1-\beta}{2}}$, es un *intervalo "bilateral" de confianza* para θ, de nivel β.

Ejemplo 1.6 (Extremo superior de la distribución uniforme)**.** Sea $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ una muestra aleatoria de una variable aleatoria $X \sim \mathcal{U}(0, \theta)$, $\theta > 0$.

El estimador de máxima verosimilitud para θ es $X_{(n)} = \max(X_1, \dots, X_n)$ y tiene densidad de la forma

$$f(x) = \frac{nx^{n-1}}{\theta^n}\mathbf{1}\{0 \le x \le \theta\}.$$

Como la distribución de $X_{(n)}$ depende de θ, $X_{(n)}$ no es un pivote para θ. Sin embargo, podemos liberarnos de θ utilizando un cambio de variables lineal de la forma $Q = X_{(n)}/\theta$:

$$f_Q(q) = nq^{n-1}\mathbf{1}\{0 \le q \le 1\}.$$

Por lo tanto,

$$Q(\mathbf{X}, \theta) = X_{(n)}/\theta$$

es un pivote para θ.

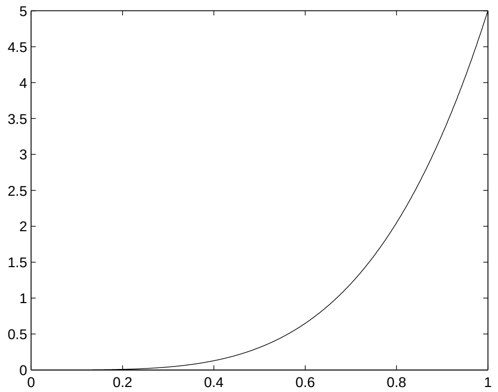


Figura 1: Forma típica del gráfico de la densidad del pivote $Q(\mathbf{X}, \theta)$.

Los cuantiles-γ para Q se obtienen observando que

$$\gamma = \mathbb{P}(Q(\mathbf{X}, \theta) \le q_\gamma) = \int_0^{q_\gamma} f_Q(q)dq \iff q_\gamma = \gamma^{1/n}.$$

Construyendo un intervalo de confianza. Dado el nivel de confianza $\beta \in (0, 1)$, para construir un intervalo de confianza de nivel β notamos que

$$\beta = \mathbb{P}_\theta\left(q_{1-\beta} \le Q(\mathbf{X}, \theta) \le 1\right) = \mathbb{P}_\theta\left(q_{1-\beta} \le X_{(n)}/\theta \le 1\right)$$

Despejando θ de las desigualdades dentro de la probabilidad, resulta que

$$I(\mathbf{X}) = \left[X_{(n)}, \frac{X_{(n)}}{q_{1-\beta}}\right] = \left[X_{(n)}, \frac{X_{(n)}}{(1-\beta)^{1/n}}\right]$$

es un intervalo de confianza para θ de nivel β. $\square$

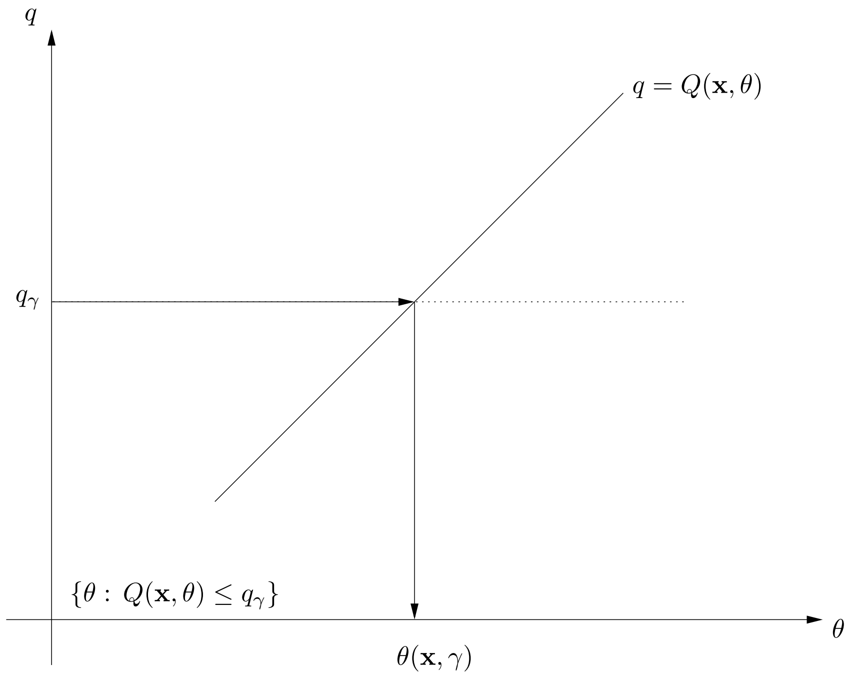
1.1.2. Pivotes crecientes

Sea $Q(\mathbf{X}, \theta)$ un pivote para θ que goza de las siguientes propiedades:

(i) la función de distribución de $Q(\mathbf{X}, \theta)$ es continua y estrictamente creciente;

(ii') para cada $\mathbf{x}$, la función $Q(\mathbf{x}, \theta)$ es continua y monótona creciente en la variable θ:

$$\theta_1 < \theta_2 \implies Q(\mathbf{x}, \theta_1) < Q(\mathbf{x}, \theta_2)$$



Sea $\gamma \in (0, 1)$, arbitrario pero fijo y sea q_γ el cuantil-γ del pivote $Q(\mathbf{X}, \theta)$. Para cada $\mathbf{x}$, sea $\theta(\mathbf{x}, \gamma)$ la única solución de la ecuación en θ

$$Q(\mathbf{x}, \theta) = q_\gamma.$$

Como el pivote $Q(\mathbf{X}, \theta)$ es creciente en θ tenemos que

$$Q(\mathbf{X}, \theta) \leq q_\gamma \iff \theta \leq \theta(\mathbf{X}, \gamma).$$

En consecuencia,

$$\mathbb{P}_\theta(\theta \leq \theta(\mathbf{X}, \gamma)) = \mathbb{P}_\theta(Q(\mathbf{X}, \theta) \leq q_\gamma) = \gamma, \qquad \forall\, \theta \in \Theta.$$

Por lo tanto, $\theta(\mathbf{X}, \gamma)$ es una cota superior de confianza para θ de nivel γ y una cota inferior de nivel $1 - \gamma$.

Método

Sea $\beta \in (0,1)$. Si se dispone de un pivote $Q(\mathbf{X}, \theta)$ que satisface las propiedades (i) y (ii') enunciadas más arriba, entonces

- la variable aleatoria, $\theta_1(\mathbf{X})$, que se obtiene resolviendo la ecuación $Q(\mathbf{X}, \theta) = q_{1-\beta}$ es una *cota inferior de confianza* para θ, de nivel β.
- la variable aleatoria, $\theta_2(\mathbf{X})$, que se obtiene resolviendo la ecuación $Q(\mathbf{X}, \theta) = q_{\beta}$ es una *cota superior de confianza* para θ, de nivel β.
- el intervalo aleatorio $I(\mathbf{X}) = [\theta_1(\mathbf{X}), \theta_2(\mathbf{X})]$, cuyos extremos son las soluciones respectivas de las ecuaciones $Q(\mathbf{X}, \theta) = q_{\frac{1-\beta}{2}}$ y $Q(\mathbf{X}, \theta) = q_{\frac{1+\beta}{2}}$, es un *intervalo "bilateral" de confianza* para θ, de nivel β.

Ejemplo 1.7 (Intensidad de la distribución exponencial)**.** Sea $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ una muestra aleatoria de una variable aleatoria $X \sim \text{Exp}(\lambda)$, $\lambda > 0$.

El estimador de máxima verosimilitud para λ es $1/\bar{X}$, donde $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$. Sabemos que la suma $n\bar{X} = \sum_{i=1}^n X_i$ tiene distribución $\Gamma(n, \lambda)$.

Como la distribución de $n\bar{X}$ depende de λ, $n\bar{X}$ no es un pivote para λ. Sin embargo, podemos liberarnos de λ utilizando un cambio de variables lineal de la forma $Q = an\bar{X}$, donde a es positivo y elegido adecuadamente para nuestros propósitos. Si $a > 0$ y $Q = an\bar{X}$, entonces $Q \sim \Gamma\left(n, \frac{\lambda}{a}\right)$. Poniendo $a = 2\lambda$, resulta que $Q = 2\lambda n\bar{X} \sim \Gamma\left(n, \frac{1}{2}\right) = \chi^2_{2n}$. (*Recordar que* $\Gamma\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}\right) = \chi^2_n$.)

Por lo tanto,

$$Q(\mathbf{X}, \lambda) = 2\lambda n\bar{X} = 2\lambda\sum_{i=1}^n X_i \sim \chi^2_{2n}$$

es un pivote para λ.

Construyendo una cota superior de confianza. Dado $\beta \in (0,1)$, para construir una cota superior de confianza para λ, de nivel β, primero observamos que el pivote $Q(\mathbf{X}, \lambda) = 2\lambda n\bar{X}$ es una función continua y decreciente en λ. Debido a que

$$2\lambda n\bar{X} = \chi^2_\beta \iff \lambda = \frac{\chi^2_\beta}{2n\bar{X}}$$

resulta que

$$\lambda_2(\mathbf{X}) = \frac{\chi^2_\beta}{2\sum_{i=1}^n X_i}$$

es una cota superior de confianza para λ de nivel β.

Ilustración. Consideremos ahora las siguientes 10 observaciones

$$0.5380,\ 0.4470,\ 0.2398,\ 0.5365,\ 0.0061,$$
$$0.3165,\ 0.0086,\ 0.0064,\ 0.1995,\ 0.9008.$$

En tal caso tenemos $\sum_{i=1}^{10} = 3.1992$. Tomando $\beta = 0.975$, tenemos de la tabla de la distribución χ^2_{20} que $\chi^2_{20,0.975} = 34.17$, entonces $\lambda_2(\mathbf{x}) = 5.34$ es una cota superior de confianza para λ de nivel $\beta = 0.975$. □

2. Muestras de Poblaciones Normales

En esta sección estudiaremos la distribución de probabilidades de los estimadores de máxima verosimilitud para la media y la varianza de poblaciones normales. La técnica de análisis se basa en la construcción de pivotes para los parámetros desconocidos. Usando esos pivotes mostraremos como construir intervalos de confianza en los distintos escenarios posibles que se pueden presentar.

Notación. En todo lo que sigue usaremos la siguiente notación: para cada $\gamma \in (0, 1)$, z_γ será el único número real tal que $\Phi(z_\gamma) = \gamma$. Gráficamente, a izquierda del punto z_γ el área bajo la campana de Gauss es igual a γ.

Nota Bene. De la simetría de la campana de Gauss, se deduce que para cada $\beta \in (0, 1)$ vale que $z_{(1-\beta)/2} = -z_{(1+\beta)/2}$. Por lo tanto, para $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$ vale que

$$\mathbb{P}\left(-z_{(1+\beta)/2} \leq Z \leq z_{(1+\beta)/2}\right) = \Phi\left(z_{(1+\beta)/2}\right) - \Phi\left(-z_{(1+\beta)/2}\right) = \frac{1+\beta}{2} - \frac{1-\beta}{2} = \beta.$$

2.1. Media y varianza desconocidas

Sea $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ una muestra aleatoria de una variable aleatoria $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, con media μ y varianza desconocidas. *Los estimadores de máxima verosimilitud para la media y la varianza, basados en* $\mathbf{X}$*, son, respectivamente,*

$$\hat{\mu}_{mv}(\mathbf{X}) = \bar{X}, \qquad \widehat{\sigma^2}_{mv}(\mathbf{X}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2. \tag{5}$$

2.1.1. Teorema llave

Teorema 2.1 (Llave)**.** *Sea* $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ *una muestra aleatoria de una distribución* $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$*. Valen las siguientes afirmaciones:*

(a) $Z = \frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{\sigma}$ *tiene distribución* $\mathcal{N}(0, 1)$*.*

(b) $U = \frac{n-1}{\sigma^2}S^2 = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$ *tiene distribución* χ^2_{n-1}*.*

(c) Z *y* U *son variables aleatorias independientes.*

Nota Bene. El calificativo de "llave" para el Teorema 2.1 está puesto para destacar que sus resultados son la clave fundamental en la construcción de intervalos de confianza y de reglas de decisión sobre hipótesis estadísticas para distribuciones normales. La prueba de este Teorema puede verse en el Apéndice.

Corolario 2.2 (Pivotes para la media y la varianza)**.** Sea $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ una muestra aleatoria de una distribución $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Sean $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ y $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$. Vale que

(a)

$$Q(\mathbf{X}, \sigma^2) = \frac{(n-1)}{\sigma^2}S^2 \tag{6}$$

es un pivote para la varianza σ^2 y su distribución es una chi cuadrado con $n-1$ grados de libertad (en símbolos, $Q(\mathbf{X}, \sigma^2) \sim \chi^2_{n-1}$).

(b)

$$Q(\mathbf{X}, \mu) = \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{S} \tag{7}$$

es un pivote para la media μ y su distribución es una t de Student con $n-1$ grados de libertad (en símbolos, $Q(\mathbf{X}, \mu) \sim t_{n-1}$).

Demostración.

(a) Inmediato de la afirmación (b) del Teorema 2.1.

(b) La afirmación (a) del Teorema 2.1 indica que $Z = \sqrt{n}(\bar{X}-\mu)/\sigma \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Pero como σ^2 es un parámetro desconocido, la transformación $\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)/\sigma$ es inútil por sí sola para construir un pivote. Sin embargo, la afirmación (c) del Teorema 2.1 muestra que este problema se puede resolver reemplazando la desconocida σ^2 por su estimación insesgada S^2. Concretamente, tenemos que

$$Q(\mathbf{X}, \mu) = \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{S} = \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)/\sigma}{S/\sigma} = \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)/\sigma}{\sqrt{S^2/\sigma^2}} = \frac{Z}{\sqrt{U/(n-1)}},$$

donde $Z = \sqrt{n}(\bar{X} - \mu)/\sigma \sim \mathcal{N}(0, 1)$ y $U = \frac{(n-1)}{\sigma^2}S^2 \sim \chi^2_{n-1}$ son variables aleatorias independientes. En consecuencia, $Q(\mathbf{X}, \mu) \sim t_{n-1}$. $\square$

2.1.2. Cotas e intervalos de confianza para la varianza

Notar que el pivote para la varianza $Q(\mathbf{X}, \sigma^2)$ definido en (6) goza de las propiedades enunciadas en la sección 1.1.1 para pivotes decrecientes:

- la función de distribución de $Q(\mathbf{X}, \sigma^2)$ es continua y estrictamente creciente;
- para cada $\mathbf{x}$, la función $Q(\mathbf{x}, \sigma^2)$ es continua y monótona decreciente respecto de σ^2.

En consecuencia, las cotas e intervalos de confianza para la varianza se pueden construir usando el resolviendo la ecuación $Q(\mathbf{X}, \sigma^2) = \chi^2_{n-1,\gamma}$, donde $chi^2_{n-1,\gamma}$ designa el cuantil-γ de la distribución chi cuadrado con $n-1$ grados de libertad.

Observando que

$$Q(\mathbf{X}, \sigma^2) = \chi^2_{n-1,\gamma} \iff \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \chi^2_{n-1,\gamma} \iff \sigma^2 = \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{n-1,\gamma}}, \tag{8}$$

se deduce que, para cada $\beta \in (0, 1)$,

1.
$$\sigma^2_1(\mathbf{X}) = \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{n-1,\beta}}$$

es una cota inferior de confianza de nivel β para σ^2;

2.

$$\sigma_2^2(\mathbf{X}) = \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{n-1,\,1-\beta}}$$

es una cota superior de confianza de nivel β para σ^2;

3.

$$I(\mathbf{X}) = \left[\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{n-1,\,(1+\beta)/2}},\ \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{n-1,\,(1-\beta)/2}}\right]$$

es un intervalo de confianza de nivel β para σ^2. $\square$

2.1.3. Cotas e intervalos de confianza para la media

Notar que el pivote para la media $Q(\mathbf{X}, \mu)$ definido en (7) goza de las propiedades enunciadas en la sección 1.1.1 para pivotes decrecientes:

- la función de distribución de $Q(\mathbf{X}, \mu)$ es continua y estrictamente creciente;
- para cada $\mathbf{x}$, la función $Q(\mathbf{x}, \mu)$ es continua y monótona decreciente respecto de μ.

En consecuencia, las cotas e intervalos de confianza para la varianza se pueden construir usando el resolviendo la ecuación $Q(\mathbf{X}, \mu) = t_{n-1,\,\gamma}$, donde $t_{n-1,\,\gamma}$ designa el cuantil-γ de la distribución t de Student con $n-1$ grados de libertad.

Observando que

$$Q(\mathbf{X}, \mu) = t_{n-1,\,\gamma} \iff \frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{S} = t_{n-1,\,\gamma} \iff \mu = \bar{X} - \frac{S}{\sqrt{n}} t_{n-1,\,\gamma}, \tag{9}$$

y usando que que la densidad de la distribución t_{n-1} es simétrica respecto del origen (i.e, $t_{n-1,\,1-\gamma} = -t_{n-1,\,\gamma}$), tenemos que, para cada $\beta \in (0.5, 1)$,

1.

$$\mu_1(\mathbf{X}) = \bar{X} - \frac{S}{\sqrt{n}} t_{n-1,\,\beta}$$

es una cota inferior de confianza de nivel β para μ;

2.

$$\mu_2(\mathbf{X}) = \bar{X} - \frac{S}{\sqrt{n}} t_{n-1,\,1-\beta} = \bar{X} + \frac{S}{\sqrt{n}} t_{n-1,\,\beta}$$

es una cota superior de confianza de nivel β para μ;

3.

$$I(\mathbf{X}) = \left[\bar{X} - \frac{S}{\sqrt{n}} t_{n-1,\,(1+\beta)/2},\ \bar{X} + \frac{S}{\sqrt{n}} t_{n-1,\,(1+\beta)/2}\right]$$

es un intervalo de confianza de nivel β para μ. $\square$

2.1.4. Ejemplo

Para fijar ideas vamos a construir intervalos de confianza de nivel $\beta = 0.95$ para la media y la varianza de una variable normal $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, basados en una muestra aleatoria de volumen $n = 8$ que arrojó los resultados siguientes: $9, 14, 10, 12, 7, 13, 11, 12$.

El problema se resuelve recurriendo a las tablas de las distribuciones χ^2 y t y haciendo algunas cuentas.

Como $n = 8$ consultamos las tablas de χ^2_7 y de t_7. Para el nivel $\beta = 0.95$ tenemos que $(1+\beta)/2 = 0.975$ y $(1-\beta)/2 = 0.025$. De acuerdo con las tablas $\chi^2_{7,\,0.975} = 16.0127$, $\chi^2_{7,\,0.025} = 1.6898$ y $t_{7,\,0.975} = 2.3646$. Por otra parte, $\bar{X} = 11$, $S^2 = 36/7 = 5.1428$ y $S = 2.2677$.

Algunas cuentas más (y un poco de paciencia) permiten rematar este asunto. Salvo errores de cuentas, $I_1 = [2.248,\ 21.304]$ es un intervalo de confianza de nivel 0.95 para la varianza, mientras que $I_2 = [9.104,\ 12.895]$ es un intervalo de confianza de nivel 0.95 para la media. $\square$

2.2. Media de la normal con varianza conocida

Sea $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ una muestra aleatoria de una variable aleatoria $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, con varianza σ^2 conocida. En el Ejemplo 1.4 mostramos que

$$Q(\mathbf{X}, \mu) = \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

es un pivote para la media μ.

Como el pivote para la media goza de las propiedades enunciadas en la sección 1.1.1 para pivotes decrecientes,

- la función de distribución de $Q(\mathbf{X}, \mu)$ es continua y estrictamente creciente,
- para cada $\mathbf{x}$, la función $Q(\mathbf{x}, \mu)$ es continua y monótona decreciente respecto de μ,

las cotas e intervalos de confianza para la media se pueden construir resolviendo la ecuación $Q(\mathbf{X}, \mu) = z_\gamma$, donde z_γ designa el cuantil-γ de la distribución normal estándar $\mathcal{N}(0, 1)$.

Observando que

$$Q(\mathbf{X}, \mu) = z_\gamma \iff \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{\sigma} = z_\gamma \iff \mu = \bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_\gamma,$$

y usando que que la densidad de la distribución $\mathcal{N}(0, 1)$ es simétrica respecto del origen (i.e, $z_{1-\gamma} = -z_\gamma$), tenemos que, para cada $\beta \in (0.5, 1)$,

1. $$\mu_1(\mathbf{X}) = \bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_\beta$$
   es una cota inferior de confianza de nivel β para μ;
2. $$\mu_2(\mathbf{X}) = \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_\beta$$
   es una cota superior de confianza de nivel β para μ;
3. $$I(\mathbf{X}) = \left[\bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{(1+\beta)/2},\ \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{(1+\beta)/2}\right]$$
   es un intervalo de confianza de nivel β para μ. $\square$

2.3. Varianza de la normal con media conocida

Sea $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ una muestra aleatoria de una variable aleatoria $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, con media μ conocida. *El estimador de máxima verosimilitud para* σ^2 *es*

$$\widehat{\sigma^2}_{mv}(\mathbf{X}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2.$$

Para construir un pivote para la varianza observamos que

$$\frac{n}{\sigma^2}\widehat{\sigma^2}_{mv}(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i - \mu}{\sigma}\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} Z_i^2,$$

donde $Z_i = \frac{X_i - \mu}{\sigma}$ son variables independientes cada una con distribución normal estándar $\mathcal{N}(0,1)$. En otras palabras, la distribución de la variable aleatoria $\frac{n}{\sigma^2}\widehat{\sigma^2}_{mv}(\mathbf{X})$ coincide con la distribución de una suma de la forma $\sum_{i=1}^{n} Z_i^2$, donde las Z_i son $\mathcal{N}(0,1)$ independientes. Por lo tanto,

$$Q(\mathbf{X}, \sigma^2) = \frac{n\widehat{\sigma^2}_{mv}(\mathbf{X})}{\sigma^2} \sim \chi_n^2$$

es un *pivote* para σ^2.

Como el pivote para la varianza $Q(\mathbf{X}, \sigma^2)$ goza de las propiedades enunciadas en la sección 1.1.1 para pivotes decrecientes,

- la función de distribución de $Q(\mathbf{X}, \sigma^2)$ es continua y estrictamente creciente,
- para cada $\mathbf{x}$, la función $Q(\mathbf{x}, \sigma^2)$ es continua y monótona decreciente respecto de σ^2,

las cotas e intervalos de confianza para la varianza se pueden construir resolviendo la ecuación $Q(\mathbf{X}, \sigma^2) = \chi^2_{n,\gamma}$, donde $\chi^2_{n,\gamma}$ designa el cuantil-γ de la distribución chi cuadrado con n grados de libertad.

Observando que

$$Q(\mathbf{X}, \sigma^2) = \chi^2_{n,\gamma} \iff \frac{n\widehat{\sigma^2}_{mv}(\mathbf{X})}{\sigma^2} = \chi^2_{n,\gamma} \iff \sigma^2 = \frac{n\widehat{\sigma^2}_{mv}(\mathbf{X})}{\chi^2_{n-1,\gamma}},$$

se deduce que, para cada $\beta \in (0,1)$,

1. $$\sigma_1^2(\mathbf{X}) = \frac{n\widehat{\sigma^2}_{mv}(\mathbf{X})}{\chi^2_{n,\beta}}$$

   es una cota inferior de confianza de nivel β para σ^2;

2. $$\sigma_2^2(\mathbf{X}) = \frac{n\widehat{\sigma^2}_{mv}(\mathbf{X})}{\chi^2_{n,1-\beta}}$$

   es una cota superior de confianza de nivel β para σ^2;

3. $$I(\mathbf{X}) = \left[\frac{n\widehat{\sigma^2}_{mv}(\mathbf{X})}{\chi^2_{n,(1+\beta)/2}}, \frac{n\widehat{\sigma^2}_{mv}(\mathbf{X})}{\chi^2_{n,(1-\beta)/2}}\right]$$

   es un intervalo de confianza de nivel β para σ^2. □

3. Intervalos aproximados para ensayos Bernoulli

Sea $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ una muestra aleatoria de una variable aleatoria $X \sim \text{Bernoulli}(p)$, donde $n >> 1$. *El estimador de máxima verosimilitud para p es*

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i.$$

Para construir un pivote para la varianza observamos que de acuerdo con el Teorema central del límite la distribución aproximada de $\sum_{i=1}^{n} X_i$ es una normal $\mathcal{N}(np, np(1-p))$ y en consecuencia

$$Q(\mathbf{X}, p) = \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - p)}{\sqrt{p(1-p)}} \sim \mathcal{N}(0,1)$$

es un pivote asintótico para p.

Usando métodos analíticos se puede mostrar que $Q(\mathbf{X}, p)$ es una función continua y decreciente en $p \in (0,1)$. Como el pivote asintótico para p goza de las propiedades enunciadas en la sección 1.1.1 para pivotes decrecientes, las cotas e intervalos de confianza para p se pueden construir resolviendo la ecuación $Q(\mathbf{X}, p) = z_\gamma$, donde z_γ designa el cuantil-γ de la distribución normal estándar $\mathcal{N}(0,1)$.

Para resolver la ecuación $Q(\mathbf{X}, p) = z$ se elevan ambos miembros al cuadrado y se obtiene una ecuación cuadrática en p cuya solución es

$$p = \frac{z^2 + 2n\bar{X}}{2z^2 + 2n} \pm \frac{z\sqrt{z^2 + 4n\bar{X}(1-\bar{X})}}{2z^2 + 2n}$$

Usando que la densidad de la distribución $\mathcal{N}(0,1)$ es simétrica respecto del origen tenemos que, para cada $\beta \in (0.5, 1)$,

1.
$$p_1(\mathbf{X}) = \frac{z_\beta^2 + 2n\bar{X}}{2z_\beta^2 + 2n} - \frac{z_\beta\sqrt{z_\beta^2 + 4n\bar{X}(1-\bar{X})}}{2z_\beta^2 + 2n}$$

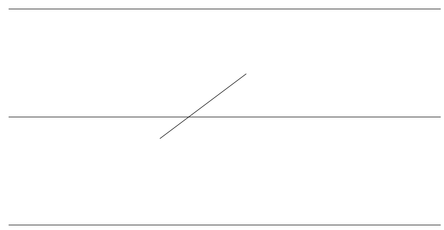
   es una cota inferior de confianza de nivel β para p;

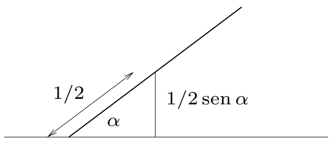
2.
$$p_2(\mathbf{X}) = \frac{z_\beta^2 + 2n\bar{X}}{2z_\beta^2 + 2n} + \frac{z_\beta\sqrt{z_\beta^2 + 4n\bar{X}(1-\bar{X})}}{2z_\beta^2 + 2n}$$

   es una cota superior de confianza de nivel β para p;

3.
$$I(\mathbf{X}) = \left[\frac{z_{(1+\beta)/2}^2 + 2n\bar{X}}{2z_{(1+\beta)/2}^2 + 2n} \pm \frac{z_{(1+\beta)/2}\sqrt{z_{(1+\beta)/2}^2 + 4n\bar{X}(1-\bar{X})}}{2z_{(1+\beta)/2}^2 + 2n}\right] \tag{10}$$

   donde $[a \pm b] = [a - b, a + b]$, es un intervalo de confianza de nivel β para p. $\square$





Ejemplo 3.1 (Las agujas de Buffon)**.** Se arroja al azar una aguja de longitud 1 sobre un plano dividido por rectas paralelas separadas por una distancia igual a 2.

Si localizamos la aguja mediante la distancia ρ de su centro a la recta más cercana y el ángulo agudo α entre la recta y la aguja, el espacio muestral es el rectángulo $0 \leq \rho \leq 1$ y $0 \leq \alpha \leq \pi/2$. El evento *"la aguja interesecta la recta"* ocurre cuando $\rho \leq \frac{1}{2} \operatorname{sen} \alpha$ y su probabilidad es

$$p = \frac{\int_0^{\pi/2} \frac{1}{2} \operatorname{sen} \alpha d\alpha}{\pi/2} = \frac{1}{\pi}.$$

Con el objeto de estimar π se propone construir un intervalo de confianza de nivel $\beta = 0.95$ para p, basado en los resultados de realizar el experimentos de Buffon con $n = 100$ agujas.

Poniendo en (10) $n = 100$ y $z_{(1+\beta)/2} = z_{0.975} = 1.96$ se obtiene que

$$\begin{aligned} I(\mathbf{X}) &= \left[\frac{1.96^2 + 200\bar{X}}{2(1.96)^2 + 200} \pm \frac{1.96\sqrt{1.96^2 + 400\bar{X}(1-\bar{X})}}{2(1.96)^2 + 200}\right] \\ &= \left[\frac{3.8416 + 200\bar{X}}{207.6832} \pm \frac{1.96\sqrt{3.8416 + 400\bar{X}(1-\bar{X})}}{207.6832}\right] \end{aligned}$$

Al realizar el experimento se observó que 28 de las 100 agujas intersectaron alguna recta. Con ese dato el estimador de máxima verosimilitud para p es $\bar{X} = 0.28$ y en consecuencia se obtiene el siguiente intervalo de confianza para p

$$\begin{aligned} I(\mathbf{X}) &= \left[\frac{3.8416 + 200(0.28)}{207.6832} \pm \frac{1.96\sqrt{3.8416 + 400(0.28)(1-0.28)}}{207.6832}\right] \\ &= [0.28814 \pm 0.08674] = [0.20140, 0.37488]. \end{aligned}$$

De donde se obtiene la siguiente estimación: $2.66 \leq \pi \leq 4.96$. □

Nota Bene. Notando que la longitud del intervalo de confianza de nivel $\beta > 1/2$ para p se puede acotar de la siguiente forma

$$|I(\mathbf{X})| = \frac{z_{(1+\beta)/2}\sqrt{z^2_{(1+\beta)/2} + 4n\bar{X}(1-\bar{X})}}{z^2_{(1+\beta)/2} + n} \leq \frac{z_{(1+\beta)/2}\sqrt{z^2_{(1+\beta)/2} + n}}{z^2_{(1+\beta)/2} + n} < \frac{z_{(1+\beta)/2}}{\sqrt{n}},$$

se puede mostrar que para garantizar que $|I(\mathbf{X})| < \epsilon$, donde ϵ es positivo y "pequeño" basta tomar $n \geq \left(z_{(1+\beta)/2}/\epsilon\right)^2$. □

Ejemplo 3.2 (Las agujas de Buffon (continuación))**.** ¿Cuántas agujas deben arrojarse si se desea estimar π utilizando un intervalo de confianza para p, de nivel 0.95, cuyo margen de error sea 0.01? De acuerdo con la observación anterior basta tomar $n \geq (1.96/0.01)^2 = 38416$.

Simulando 38416 veces el experimento de Buffon obtuvimos 12222 éxitos. Con ese dato el estimador de máxima verosimilitud para p es 0.31814... y el intervalo para p es

$$I(\mathbf{X}) = [0.31350, 0.32282] .$$

De donde se obtiene la siguiente estimación: $3.09766 \leq \pi \leq 3.18969$. □

4. Comparación de dos muestras normales

Supongamos que $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_m)$ es una muestra aleatoria de tamaño m de una distribución normal $\mathcal{N}(\mu_X, \sigma_X^2)$, y que $\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_n)$ es una muestra aleatoria de tamaño n de una distribución normal $\mathcal{N}(\mu_Y, \sigma_Y^2)$. Más aún, supongamos que las muestras $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$ son independientes. Usualmente los parámetros μ_X, μ_Y, σ_X^2 y σ_Y^2 son desconocidos.

4.1. Cotas e intervalos de confianza para la diferencia de medias

Queremos estimar $\Delta = \mu_X - \mu_Y$.

4.1.1. Varianzas conocidas

Para construir un pivote para la diferencia de medias, Δ, cuando las varianzas σ_X^2 y σ_Y^2 son conocidas, observamos que el estimador de máxima verosimilitud para $\Delta = \mu_X - \mu_Y$ es $\bar{X} - \bar{Y}$ y que

$$\bar{X} - \bar{Y} \sim \mathcal{N}\left(\Delta, \frac{\sigma_X^2}{m} + \frac{\sigma_Y^2}{n}\right) \tag{11}$$

En consecuencia,

$$Q(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \Delta) = \frac{\bar{X} - \bar{Y} - \Delta}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{m} + \frac{\sigma_Y^2}{n}}} \sim \mathcal{N}(0, 1), \tag{12}$$

es un pivote para la diferencia de medias Δ.

Como el pivote para la diferencia de medias, $Q(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \Delta)$, goza de las propiedades enunciadas en la sección 1.1.1 las cotas e intervalos de confianza para Δ se pueden construir resolviendo la ecuación $Q(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \Delta) = z_\gamma$, donde z_γ designa el cuantil-γ de la distribución $\mathcal{N}(0, 1)$. □

4.1.2. Varianzas desconocidas.

Supongamos ahora que las varianzas σ_X^2 y σ_Y^2 son desconocidas. Hay dos posibilidades: las varianzas son iguales o las varianzas son distintas.

Caso 1: Varianzas iguales. Supongamos que $\sigma_X^2 = \sigma_Y^2 = \sigma^2$. En tal caso

$$Z = \frac{\bar{X} - \bar{Y} - \Delta}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{m} + \frac{\sigma^2}{n}}} = \frac{\bar{X} - \bar{Y} - \Delta}{\sqrt{\sigma^2}\sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}} \sim \mathcal{N}(0, 1).$$

La varianza desconocida σ^2 se puede estimar ponderando "adecuadamente" los estimadores de varianza $S_X^2 = \frac{1}{m-1}\sum(X_i - \bar{X})^2$ y $S_Y^2 = \frac{1}{n-1}\sum(Y_j - \bar{Y})^2$,

$$S_P^2 := \frac{m-1}{m+n-2}S_X^2 + \frac{n-1}{m+n-2}S_Y^2 = \frac{(m-1)S_X^2 + (n-1)S_Y^2}{m+n-2}.$$

Se puede mostrar que

$$U := \frac{(n+m-2)}{\sigma^2}S_P^2 = \frac{(m-1)S_X^2 + (n-1)S_Y^2}{\sigma^2} \sim \chi_{n+m-2}.$$

Como las variables Z y U son independientes, se obtiene que

$$T = \frac{Z}{\sqrt{U/(m+n-2)}} = \frac{\bar{X} - \bar{Y} - \Delta}{\sqrt{S_P^2}\sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}} \sim t_{m+n-2}$$

Por lo tanto,

$$Q(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \Delta) = \frac{\bar{X} - \bar{Y} - \Delta}{\sqrt{S_P^2}\sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}} \tag{13}$$

es un pivote para la diferencia de medias Δ. Debido a que el pivote goza de las propiedades enunciadas en la sección 1.1.1, las cotas e intervalos de confianza para Δ se pueden construir resolviendo la ecuación $Q(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \Delta) = t_{m+n-2,\,\gamma}$, donde $t_{m+n-2\,\gamma}$ designa el cuantil-γ de la distribución t de Student con $m+n-2$ grados de libertad. $\square$

Caso 2: Varianzas distintas. En varios manuales de Estadística (el de Walpole, por ejemplo) se afirma que la distribución de la variable

$$Q(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \Delta) = \frac{\bar{X} - \bar{Y} - \Delta}{\sqrt{\frac{S_X^2}{m} + \frac{S_Y^2}{n}}}$$

es una t de Student con ν grados de libertad, donde

$$\nu = \frac{\left(\frac{S_X^2}{m} + \frac{S_Y^2}{n}\right)^2}{\frac{\left(\frac{S_X^2}{m}\right)^2}{m-1} + \frac{\left(\frac{S_Y^2}{n}\right)^2}{n-1}}$$

Es de suponer que este "misterioso" valor de ν es el resultado de alguna controversia entre Estadísticos profesionales con suficiente experiencia para traducir semejante jeroglífico. Sin embargo,ninguno de los manuales se ocupa de revelar este misterio. $\square$

4.2. Cotas e intervalos de confianza para el cociente de varianzas.

Queremos estimar el cociente de las varianzas $R = \sigma_X^2/\sigma_Y^2$.

Si las medias μ_X y μ_Y son desconocidas, las varianzas σ_X^2 y σ_Y^2 se pueden estimar mediante sus estimadores insesgados $S_X^2 = \frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^m (X_i - \bar{X})^2$ y $S_Y^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^n (Y_j - \bar{Y})^2$.

Debido a que las variables

$$U := \frac{(m-1)}{\sigma_X^2} S_X^2 \sim \chi^2_{m-1} \qquad \text{y} \qquad V := \frac{(n-1)}{\sigma_Y^2} S_Y^2 \sim \chi^2_{n-1}$$

son independientes, tenemos que el cociente

$$\frac{U/(m-1)}{V/(n-1)} = \frac{S_X^2/\sigma_X^2}{S_Y^2/\sigma_Y^2} = \frac{1}{R}\left(\frac{S_X^2}{S_Y^2}\right)$$

se distribuye como una F de Fisher con $m-1$ y $n-1$ grados de libertad.

Por lo tanto,

$$Q(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, R) = \frac{1}{R}\left(\frac{S_X^2}{S_Y^2}\right) \sim F_{m-1,\,n-1}$$

es un pivote para el cociente de varianzas $R = \sigma_X^2/\sigma_Y^2$. Debido a que el pivote goza de las propiedades enunciadas en la sección 1.1.1, las cotas e intervalos de confianza para R se pueden construir resolviendo la ecuación $Q(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, R) = F_{m-1,n-1,\,\gamma}$, donde $F_{m-1,n-1\,\gamma}$ designa el cuantil-γ de la distribución F de Fisher con $m-1$ y $n-1$ grados de libertad. □

5. Comparación de dos muestras

5.1. Planteo general

Supongamos que tenemos dos muestras aleatorias independientes $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_m)$ e $\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_n)$ con distribuciones dependientes de los parámetros ξ y η, respectivamente. Queremos estimar la diferencia

$$\Delta = \xi - \eta.$$

En lo que sigue mostraremos que, bajo ciertas hipótesis, podemos construir cotas e intervalos de confianza (aproximados) basados en el comportamiento de la diferencia $\hat{\xi}_m - \hat{\eta}_n$, donde $\hat{\xi}_m = \hat{\xi}(\mathbf{X})$ y $\hat{\eta}_n = \hat{\eta}(\mathbf{Y})$ son estimadores de los parámetros ξ y η, respectivamente.

En todo lo que sigue vamos a suponer que los estimadores $\hat{\xi}_m$ y $\hat{\eta}_n$ tienen la propiedad de normalidad asintótica. Esto es,

$$\begin{aligned} \sqrt{m}(\hat{\xi}_m - \xi) &\to \mathcal{N}(0, \sigma^2) \qquad && \text{cuando } m \to \infty, \\ \sqrt{n}(\hat{\eta}_n - \eta) &\to \mathcal{N}(0, \tau^2) \qquad && \text{cuando } n \to \infty, \end{aligned}$$

donde σ^2 y τ^2 pueden depender de ξ y η, respectivamente. Sea $N = m + n$ y supongamos que para algún $0 < \rho < 1$,

$$\frac{m}{N} \to \rho, \quad \frac{n}{M} \to 1 - \rho \qquad \text{cuando } m \text{ y } n \to \infty,$$

de modo que, cuando $N \to \infty$ tenemos

$$\sqrt{N}(\hat{\xi}_m - \xi) \to \mathcal{N}\left(0, \frac{\sigma^2}{\rho}\right) \qquad \text{y} \qquad \sqrt{N}(\hat{\eta}_n - \eta) \to \mathcal{N}\left(0, \frac{\tau^2}{1-\rho}\right).$$

Entonces, vale que

$$\sqrt{N}\left[(\hat{\xi}_m - \xi) - (\hat{\eta}_n - \eta)\right] \to \mathcal{N}\left(0, \frac{\sigma^2}{\rho} + \frac{\tau^2}{1-\rho}\right)$$

o, equivalentemente, que

$$\frac{(\hat{\xi}_m - \hat{\eta}_n) - \Delta}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{m} + \frac{\tau^2}{n}}} \to \mathcal{N}(0, 1) \tag{14}$$

Si σ^2 y τ^2 son conocidas, de (14) resulta que

$$Q(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \Delta) = \frac{(\hat{\xi}_m - \hat{\eta}_n) - \Delta}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{m} + \frac{\tau^2}{n}}} \tag{15}$$

es un pivote (aproximado) para la diferencia Δ.

Si σ^2 y τ^2 son desconocidas y $\widehat{\sigma^2}$ y $\widehat{\tau^2}$ son estimadores consistentes para σ^2 y τ^2, se puede demostrar que la relación (14) conserva su validez cuando σ^2 y τ^2 se reemplazan por $\widehat{\sigma^2}$ y $\widehat{\tau^2}$, respectivamente y entonces

$$Q(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \Delta) = \frac{(\hat{\xi}_m - \hat{\eta}_n) - \Delta}{\sqrt{\frac{\widehat{\sigma^2}}{m} + \frac{\widehat{\tau^2}}{n}}} \tag{16}$$

es un pivote (aproximado) para la diferencia Δ.

Para mayores detalles se puede consultar el libro Lehmann, E. L. (1999) *Elements of Large-Sample Theory*. Springer, New York.

Nota Bene. Notar que el argumento anterior proporciona un método general de naturaleza asintótica. En otras palabras, en la práctica los resultados que se obtienen son aproximados. Dependiendo de los casos particulares existen diversos refinamientos que permiten mejorar esta primera aproximación.

5.2. Problema de dos muestras binomiales

Sean $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_m)$ e $\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_n)$ dos muestras aleatorias independientes de dos variables aleatorias X e Y con distribución Bernoulli de parámetros p_X y p_Y, respectivamente. Queremos estimar la diferencia

$$\Delta = p_X = p_Y$$

Para construir cotas e intervalos de confianza usaremos los estimadores de máxima verosimilitud para las probabilidades p_X y p_Y

$$\hat{p}_X = \bar{X} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} X_i, \qquad \hat{p}_Y = \bar{Y} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} Y_j,$$

Vamos a suponer que los volúmenes de las muestras, m y n, son suficientemente grandes y que ninguna de las dos variables está sobre representada (i.e. m y n son del mismo orden de magnitud).

Debido a que los estimadores $\bar{X}$ y $\bar{Y}$ son consistentes para las p_X y p_Y, resulta que los estimadores $\bar{X}(1-\bar{X})$ y $\bar{Y}(1-\bar{Y})$ son consistentes para las varianzas $p_X(1-p_X)$ y $p_Y(1-p_Y)$, respectivamente. Por lo tanto,

$$Q(\mathbf{X},\mathbf{Y},\Delta) = \frac{\bar{X}-\bar{Y}-\Delta}{\sqrt{\frac{1}{m}\bar{X}(1-\bar{X})+\frac{1}{n}\bar{Y}(1-\bar{Y})}} \tag{17}$$

es un pivote (aproximado) para Δ. □

Ejemplo 5.1. Se toma una muestra aleatoria de 180 argentinos y resulta que 30 están desocupados. Se toma otra muestra aleatoria de 200 uruguayos y resulta que 25 están desocupados. ¿Hay evidencia suficiente para afirmar que la tasa de desocupación de la población Argentina es superior a la del Uruguay?

Solución. La población desocupada de la Argentina puede modelarse con una variable aleatoria $X \sim$ Bernoulli(p_X) y la del Uruguay con una variable aleatoria $Y \sim$ Bernoulli(p_Y).

Para resolver el problema utilizaremos una cota inferior de nivel de significación $\beta = 0.95$ para la diferencia $\Delta = p_X - p_Y$ basada en dos muestras aleatorias independientes $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$ de volúmenes $m = 180$ y $n = 200$, respectivamente.

En vista de que el pivote definido en (17) goza de las propiedades enunciadas en la sección 1.1.1, la cota inferior de nivel $\beta = 0.95$ para Δ se obtiene resolviendo la ecuación $Q(\mathbf{X},\mathbf{Y},\Delta) = z_{0.95}$.

Observando que

$$\begin{aligned} Q(\mathbf{X},\mathbf{Y},\Delta) = z_{0.95} \quad &\iff \quad \frac{\bar{X}-\bar{Y}-\Delta}{\sqrt{\frac{1}{180}\bar{X}(1-\bar{X})+\frac{1}{200}\bar{Y}(1-\bar{Y})}} = 1.64 \\ &\iff \quad \Delta = \bar{X}-\bar{Y}-1.64\sqrt{\frac{1}{180}\bar{X}(1-\bar{X})+\frac{1}{200}\bar{Y}(1-\bar{Y})} \end{aligned}$$

De cuerdo con los datos observados, $\bar{X} = \frac{30}{180} = \frac{1}{6}$ y $\bar{Y} = \frac{25}{200} = \frac{1}{8}$. Por lo tanto, la cota inferior para Δ adopta la forma

$$\Delta(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \frac{1}{6} - \frac{1}{8} - 1.64\sqrt{\frac{1}{180}\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)+\frac{1}{200}\left(\frac{1}{8}\right)\left(\frac{7}{8}\right)} = -0.0178...$$

De este modo se obtiene la siguiente estimación $p_X - p_Y > -0.0178$ y de allí no se puede concluir que $p_X > p_Y$. □

6. Apéndice: Demostración del Teorema llave

6.1. Preliminares de Análisis y Álgebra

En la prueba del Teorema 2.1 se usarán algunas nociones de Álgebra Líneal[1] y el Teorema de cambio de variables para la integral múltiple[2].

Teorema 6.1 (Cambio de variables en la integral múltiple)**.** *Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función integrable. Sea $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $g = (g_1, \ldots, g_n)$ una aplicación biyectiva, cuyas componentes tienen derivadas parciales de primer orden continuas. Esto es, para todo $1 \leq i, j \leq n$, las funciones $\frac{\partial}{\partial y_j} g_i(\mathbf{y})$ son continuas. Si el Jacobiano de g es diferente de cero en casi todo punto, entonces,*

$$\int_A f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_{g^{-1}(A)} f(g(\mathbf{y})) |J_g(\mathbf{y})| d\mathbf{y},$$

para todo conjunto abierto $A \subset \mathbb{R}^n$, donde $J_g(\mathbf{y}) = \det \left(\left(\frac{\partial g_i(\mathbf{y})}{\partial y_j} \right)_{i,j} \right)$.

El siguiente resultado, que caracteriza la distribución de un cambio de variables aleatorias, es una consecuencia inmediata del Teorema 6.1.

Corolario 6.2. *Sea $\mathbf{X}$ un vector aleatorio n-dimensional con función densidad de probabilidad $f_{\underline{X}}(\mathbf{x})$. Sea $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una aplicación que satisface las hipótesis del Teorema 6.1. Entonces, el vector aleatorio $\mathbf{Y} = \varphi(\mathbf{X})$ tiene función densidad de probabilidad $f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y})$ de la forma:*

$$f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}) = f_{\mathbf{X}}(\varphi^{-1}(\mathbf{y})) |J_{\varphi^{-1}}(\mathbf{y})|.$$

Demostración. Cualquiera sea el conjunto abierto A se tiene que

$$\mathbb{P}(\mathbf{Y} \in A) \;=\; \mathbb{P}(\varphi(\mathbf{X}) \in A) = \mathbb{P}(\mathbf{X} \in \varphi^{-1}(A)) = \int_{\varphi^{-1}(A)} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

Aplicando el Teorema 6.1 para $g = \varphi^{-1}$ se obtiene

$$\int_{\varphi^{-1}(A)} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_A f_{\mathbf{X}}(\varphi^{-1}(\mathbf{y})) |J_{\varphi^{-1}}(\mathbf{y})| d\mathbf{y}.$$

Por ende

$$\mathbb{P}(\mathbf{Y} \in A) = \int_A f_{\mathbf{X}}(\varphi^{-1}(\mathbf{y})) |J_{\varphi^{-1}}(\mathbf{y})| d\mathbf{y}.$$

Por lo tanto, el vector aleatorio $\mathbf{Y}$ tiene función densidad de probabilidad de la forma $f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}) = f_{\mathbf{X}}(\varphi^{-1}(\mathbf{y})) |J_{\varphi^{-1}}(\mathbf{y})|$. □

[1] La noción de base ortonormal respecto del producto interno canónico en $\mathbb{R}^n$ y la noción de matriz ortogonal. Si lo desea, aunque no es del todo cierto, puede pensar que las matrices ortogonales corresponden a rotaciones espaciales.

[2] **Sobre la nomenclatura:** Los vectores de $\mathbb{R}^n$ se piensan como vectores columna y se notarán en negrita $\mathbf{x} = [x_1 \ldots x_n]^T$.

6.2. Lema previo

Observación 6.3. *Sea* $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ *una muestra aleatoria de una distribución* $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$*. Por independencia, la distribución conjunta de las variables* $X_1, \dots, X_n$ *tiene función densidad de probabilidad de la forma*

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= \prod_{i_1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} x_i^2\right) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}\sigma^n} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}\sigma^n} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}||\mathbf{x}||_2^2\right). \end{aligned}$$

De la observación anterior es claro que la distribución conjunta de las variables $X_1, \dots, X_n$ es invariante por rotaciones. Más concretamente vale el siguiente resultado:

Lema 6.4 (Isotropía)**.** *Sea* $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ *una muestra aleatoria de una variable* $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ *y sea* $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ *una matriz ortogonal, i.e.* $B^T B = BB^T = I_n$*. Si* $\underline{X} = [X_1 \dots X_n]^T$*, entonces* $\underline{Y} = [Y_1 \dots Y_n]^T = B\underline{X}$ *tiene la misma distribución conjunta que* $\underline{X}$*. En particular las variables aleatorias* $Y_1, \dots, Y_n$ *son independientes y son todas* $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$*.*

Demostración. Es consecuencia inmediata del Teorema de cambio de variables para $\mathbf{y} = g(\mathbf{x}) = B\mathbf{x}$. Debido a que B es una matriz ortogonal, $g^{-1}(\mathbf{y}) = B^T\mathbf{y}$ y $J_{g^{-1}}(\mathbf{y}) = \det\left(B^T\right) = \pm 1$

$$\begin{aligned} f_{\underline{Y}}(\mathbf{y}) &= f_{\underline{X}}(B^T\mathbf{y})|\det(B^T)| = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}\sigma^n} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}||B^T\mathbf{y}||_2^2\right) |\det(B^T)| \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}\sigma^n} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}||\mathbf{y}||_2^2\right). \end{aligned}$$

En la última igualdad usamos que $||B^T\mathbf{y}||_2 = ||\mathbf{y}||_2$ debido a que las transformaciones ortogonales preservan longitudes. □

6.3. Demostración del Teorema.

Sin perder generalidad se puede suponer que $\mu = 0$. Sea $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ una base ortonormal de $\mathbb{R}^n$, donde $b_1 = \frac{1}{\sqrt{n}}[1 \dots 1]^T$. Sea $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ la matriz ortogonal cuya i-ésima fila es b_i^T. De acuerdo con el Lema 6.4 el vector aleatorio $\underline{Y} = [Y_1 \dots Y_n]^T = B\underline{X}$ tiene la misma distribución que $\underline{X}$.

En primer lugar, observamos que

$$Y_1 = b_1^T \underline{X} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} X_i = \sqrt{n}(\bar{X}).$$

En segundo lugar,

$$\sum_{i=1}^{n} Y_i^2 = \underline{Y}^T \underline{Y} = (B\underline{X})^T B\underline{X} = \underline{X}^T B^T B\underline{X} = \underline{X}^T \underline{X} = \sum_{i=1}^{n} X_i^2.$$

En consecuencia,

$$\sum_{i=2}^{n} Y_i^2 = \sum_{i=1}^{n} X_i^2 - Y_1^2 = \sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n\bar{X}^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \bar{X}\right)^2 .$$

Las variables $Y_1, \dots, Y_n$ son independientes. Como $\sqrt{n}(\bar{X})$ depende de Y_1, mientras que $\sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \bar{X}\right)^2$ depende de $Y_2, \dots, Y_n$, resulta que $\bar{X}$ y S^2 son independientes (lo que prueba la parte (c)). Además, $\sqrt{n}(\bar{X}) = Y_1 \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$, por lo tanto $Z = \frac{\sqrt{n}(\bar{X})}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0,1)$ (lo que prueba la parte (a)). La parte (b) se deduce de que

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \bar{X}\right)^2 = \sum_{i=2}^{n} \left(\frac{Y_i}{\sigma}\right)^2 \sim \chi^2_{n-1},$$

pues las $n-1$ variables $Y_2/\sigma, \dots, Y_n/\sigma$ son independientes y con distribución $\mathcal{N}(0,1)$. □

7. Bibliografía consultada

Para redactar estas notas se consultaron los siguientes libros:

1. Bolfarine, H., Sandoval, M. C.: Introdução à Inferência Estatística. SBM, Rio de Janeiro. (2001).

2. Borovkov, A. A.: Estadística matemática. Mir, Moscú. (1984).

3. Cramer, H.: Métodos matemáticos de estadística. Aguilar, Madrid. (1970).

4. Hoel P. G.: Introducción a la estadística matemática. Ariel, Barcelona. (1980).

5. Lehmann, E. L.: Elements of Large-Sample Theory. Springer, New York. (1999)

6. Maronna R.: Probabilidad y Estadística Elementales para Estudiantes de Ciencias. Editorial Exacta, La Plata. (1995).

7. Meyer, P. L.: Introductory Probability and Statistical Applications. Addison-Wesley, Massachusetts. (1972).

8. Walpole, R. E.: Probabilidad y estadística para ingenieros, 6a. ed., Prentice Hall, México. (1998)