[61.08] Álgebra II A

Resumen Teórico

Germán Gual & Iñaki García Mendive

Marzo de 2008

Índice

1. Espacios Vectoriales

$$C_{AB} = \begin{pmatrix} C_B(a_1) & \cdots & C_B(a_n) \\ \downarrow & & \downarrow \end{pmatrix} \tag{1}$$

Siendo A y B bases.

$$Av = v_1 A_1 + \ldots + v_n A_n \tag{2}$$

es una combinación lineal de las columnas $(A_1 \ldots A_n)$ de A.

$$BA = \begin{pmatrix} BA_1 & \cdots & BA_n \\ \downarrow & & \downarrow \end{pmatrix} \tag{3}$$

o sea que $\mathrm{Col}(BA) \subseteq \mathrm{Col}(B)$.

2. Producto Interno

2.1. Axiomas

- $\langle u, v\rangle = \overline{\langle v, u\rangle}$
- $\langle u, v + w\rangle = \langle u, v\rangle + \langle u, w\rangle$
- $\langle \alpha u, \beta v\rangle = \overline{\alpha}\beta \langle u, v\rangle$
- $\langle u, u\rangle \geq 0 \quad \wedge \quad \langle u, u\rangle = 0 \Longleftrightarrow u = 0$

2.2. (Des)igualdades

- $\langle v, v\rangle = \|v\|^2$
- $\cos(\alpha) = \frac{\langle u,v\rangle}{\|u\|\|v\|}$
- $C_B(x) = \begin{bmatrix} \frac{\langle v_1,x\rangle}{\langle v_1,v_1\rangle} \\ \vdots \\ \frac{\langle v_n,x\rangle}{\langle v_n,v_n\rangle} \end{bmatrix}$ siendo $B = \{v_1 \ldots v_n\}$ base

Cauchy–Bunyakovskiĭ–Schwarz $\|\langle u, v\rangle\| \leq \|u\| \, \|v\|$

Triangular $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$

Pitágoras $\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 \qquad$ si $(\langle u, v\rangle = 0)$

del Paralelogramo $\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2\left(\|u\|^2 + \|v\|^2\right)$

2.3. Matriz del Producto Interno

Un P.I. puede definirse en una base $B = \{v_1 \ldots v_n\}$ de la siguiente manera:

$$\langle x, y\rangle = \begin{bmatrix} \overline{x}_1 & \cdots & \overline{x}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \langle v_1, v_1\rangle & \cdots & \langle v_1, v_n\rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle v_n, v_1\rangle & \cdots & \langle v_n, v_n\rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \tag{4}$$

$$= \overline{x}^T G_B \, y \tag{5}$$

$$\left.\begin{array}{rl} G_B \text{ es hermítica:} & G_B = \overline{G_B}^T \\ \text{y definida positiva:} & \overline{x}^T G_B x > 0 \quad \forall x \neq 0 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \text{Es matriz de un P.I.}$$

3. Proyección Ortogonal

$$P_{\mathcal{S}}x = \frac{\langle v_1, x\rangle}{\langle v_1, v_1\rangle} \cdot v_1 + \ldots + \frac{\langle v_1, v_1\rangle}{\langle v_1, v_1\rangle} \cdot v_n \tag{6}$$

con $B = \{v_1 \ldots v_n\}$ una BOG[1]

$$x = P_{\mathcal{S}}x + P_{\mathcal{S}^\perp}x \tag{7}$$

$$\mathrm{d}\left(x, \mathcal{S}\right) = \|P_{\mathcal{S}^\perp}x\| \tag{8}$$

3.1. Gram-Schmidt

Si $B = \{v_1 \ldots v_n\}$ no es una BOG, podemos construir una a partir de ella:

$$\begin{aligned}
w_1 &= v_1 & (9)\\
w_2 &= v_2 - \frac{\langle w_1, v_2\rangle}{\|w_1\|^2} \cdot w_1 & (10)\\
w_3 &= v_3 - \frac{\langle w_1, v_3\rangle}{\|w_1\|^2} \cdot w_1 - \frac{\langle w_2, v_3\rangle}{\|w_2\|^2} \cdot w_2 & (11)\\
&\vdots & (12)\\
w_n &= v_n - \frac{\langle w_1, v_n\rangle}{\|w_1\|^2} \cdot w_1 - \frac{\langle w_2, v_n\rangle}{\|w_2\|^2} \cdot w_2 - \ldots - \frac{\langle w_{n-1}, v_n\rangle}{\|w_{n-1}\|^2} \cdot w_{n-1} & (13)
\end{aligned}$$

Siendo $\{w_1 \ldots w_n\}$ una BOG.

3.2. Matriz de Proyección

Una matriz es de proyección si cumple:

- $P^2 = P$
- $P = \overline{P}^T$

$$Px = P_{\mathcal{S}}x \tag{14}$$

Donde $\mathcal{S} = \mathrm{Col}P$
Con $B = \{v_1 \ldots v_n\}$ una BON de $\mathcal{S}$, y siendo $Q = \begin{bmatrix} v_1 & \cdots & v_n \\ \downarrow & & \downarrow \end{bmatrix}$:

$$P = QQ^T \tag{15}$$

3.3. Reflexión a través de un hiperplano

$$R_{\mathcal{S}}x = x - 2P_{\mathcal{S}^\perp}x = Hx \tag{16}$$

Siendo $\mathcal{S}^\perp = gen\,\{w\}$ y

$$H = I - 2\frac{ww^T}{w^Tw} \tag{17}$$

la matriz de Householder, que cumple:

- $H^2 = I$
- $H = H^T$

[1] Base Ortogonal

3.4. Mínimos Cuadrados

Si $Ax = b$ es incompatible, existe un $\hat{x}$ tal que:

- $A\hat{x} = P_{\mathrm{Col}A} b$
- $A^T A\hat{x} = A^T b$

Nota: Si el rango de $A^T A$ es máximo, el $\hat{x}$ es único.

3.4.1. Propiedades

- $\mathrm{Nul}\left(A^T A\right) = \mathrm{Nul}\left(A\right)$
- $\mathrm{Ran}\left(A^T A\right) = \mathrm{Ran}\left(A\right)$
- $A^{\#} = \left(A^T A\right)^{-1} A^T$
- $A^{\#} A = I$
- $AA^{\#} = P$ (matriz de proyección sobre $\mathrm{Col}\left(A\right)$)
- $\mathrm{Nul}\left(AA^{\#}\right) = \mathrm{Col}\left(A\right)^{\perp}$

3.5. Regresión Lineal

$$\left.\begin{array}{rcl} y_1 & = & mx_1 + b \\ & \vdots & \\ y_n & = & mx_n + b \end{array}\right\} \Longrightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 & 1 \\ \vdots & \\ x_n & 1 \end{bmatrix}}_{\text{“}A\text{”}} \underbrace{\begin{bmatrix} m \\ b \end{bmatrix}}_{\text{“}x\text{”}} = \underbrace{\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}}_{\text{“}b\text{”}}$$

Si no es compatible, entonces $A^T A \begin{bmatrix} \hat{m} \\ \hat{b} \end{bmatrix} = A^T y$

$$\begin{bmatrix} \sum x_i^2 & \sum x_i \\ \sum x_i & n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{m} \\ \hat{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum x_i y_i \\ \sum y_i \end{bmatrix} \tag{18}$$

4. Transformaciones Lineales

- $T(u + v) = T(u) + T(v)$
- $T(kv) = kT(v)$
- $\mathrm{Ker}\left(T\right) = \{v \in \mathbf{V} / \, T(v) = 0_{\mathbf{V}}\}$
- $\mathrm{Im}\left(T\right) = \{w \in \mathbf{W} / \, \exists \; v \in \mathbf{V} \wedge T(v) = w\}$
- $\dim\left(\mathrm{Ker}\left(T\right)\right) + \dim\left(\mathrm{Im}\left(T\right)\right) = \dim\left(\mathbf{V}\right)$
- Si $\{v_1 \ldots v_n\}$ son LI $\Longrightarrow T\left(\{v_1 \ldots v_n\}\right)$ son LI

4.1. Clasificación

- Mono=inyectiva
  - Si $v_1 \neq v_2 \Longrightarrow T(v_1) \neq T(v_2)$
  - $\mathrm{Ker}\left(T\right) = 0_{\mathbf{V}}$
  - $\dim\left(\mathbf{V}\right) \leq \dim\left(\mathbf{W}\right)$

- Epi=sobreyectiva
  - $\mathrm{Im}\,(T) = \mathbf{W}$
  - $\dim\,(\mathbf{W}) \geq \dim\,(\mathbf{V})$
- Iso=biyectiva
  - $\dim\,(\mathbf{V}) = \dim\,(\mathbf{W})$
  - $\exists\ T^{-1}$

4.2. Matriz de una TL

$$[T]_{AB} = \begin{bmatrix} (T\,(a_1))_B & \cdots & (T\,(a_n))_B \\ \downarrow & & \downarrow \end{bmatrix} \tag{19}$$

$$(T\,(v))_B = [T]_{AB} \cdot v_A \tag{20}$$

$$[G \circ T]_{AC} = [G]_{BC}[T]_{AB} \tag{21}$$

- $\mathrm{Ran}\,([T]_{AB}) = \dim\,(\mathrm{Im}\,(T))$
- Si es iso $\Longrightarrow [T^{-1}]_{AB} = ([T]_{AB})^{-1}$
- $\mathrm{Col}\,([T]_{AB}) = (\mathrm{Im}\,(T))_B$

Con λ (constante para toda base B) y v su autovector asociado:

$$T(v) = \lambda\ v$$

$$[T]_{BB}\ v_B = \lambda\ v_B$$

5. Autovalores y Autovectores

$$A\ v = \lambda\ v \tag{22}$$

Donde:

- λ es tal que $\det\,(\lambda I - A) = 0$
- v es tal que: $(\lambda I - A) = \mathbf{0}$
- $\mathrm{Nul}\,(\lambda_k I - A) = \mathcal{S}_{\lambda_k}$

y:

- $X_A(\lambda) = \det\,(\lambda I - A)$ es el Polinomio Característico de A
- λ es raíz de X_A de multiplicidad algebraica ma
- $\dim\,(\mathcal{S}_\lambda)$ es la multiplicidad geométrica mg

5.1. Propiedades

- $mg \leq ma$
- $\lambda = 0 \iff A$ no es inversible
- $\sum \lambda_i = \sum a_{ii}$
- $\det(A) = \prod \lambda_i^{ma_i}$
- A avas distintos corresponden avecs LI
- λ es ava de A y de A^T
- $k\lambda$ ava de kA con v avec
- λ^m ava de A^m con v avec
- $\lambda^m + k$ ava de $A^m + kI$ con v avec
- Si P es un polinomio, entonces $P(\lambda)$ es ava de $P(A)$

5.2. Diagonalizabilidad

A es diagonalizable $\iff$ sus autovectores forman una base. En estas condiciones, $ma = mg$.

$$A = CDC^{-1} \tag{23}$$

Donde:

$$C = \underbrace{\begin{bmatrix} v_1 & \cdots & v_n \\ \downarrow & & \downarrow \end{bmatrix}}_{\text{base de avecs de } A}$$

$$D = \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}}_{\text{avals de } A}$$

5.3. Semejanza

A y B son semejantes si $A = QBQ^{-1}$.
Si $A \sim B$ entonces tienen **los mismos avales con la misma mg y ma**

6. Matrices Unitarias

$$U^{-1} \quad = \quad \overline{U}^T \tag{24}$$

- $\mathrm{Col}(U) = BON$
- $\mathrm{Fil}(U) = BON$
- $|\det(U)| = 1$
- Si U unitaria y V unitaria $\Longrightarrow UV$ unitaria
- $\langle x, y\rangle = \langle Ux, Uy\rangle$ (conserva el PI canónico)
- $|\lambda| = 1$
- Si $\{v_1 \dots v_n\}$ $BON \Longrightarrow U\{v_1 \dots v_n\}$ BON
- Si $[T]_{AB}$ es unitaria rota y/o refleja.
- Si A y B son BON $\Longrightarrow C_{AB}$ es unitaria

7. Matrices Hermíticas

$$A = \overline{A}^T \tag{25}$$

- $\overline{x}^T Ax \in \mathbf{R}$
- aval $\in \mathbf{R}$
- A avales distintos corresponden avecs **ortogonales**
- Si $As \in \mathcal{S} \Longrightarrow As^\perp \in \mathcal{S}^\perp$

7.1. Teorema Espectral

$$A = UD\overline{U}^T \tag{26}$$

$$A = \sum \lambda_i \; v_i \, v_i^T$$

7.2. Formas Cuadráticas

$$Q(x) = x^H Ax \tag{27}$$

$$x^H Rx = k \qquad \text{(restricción)} \tag{28}$$

Para eliminar los términos cruzados:

1. Si la restricción es de la forma $\|x\|^2 = k$, saltar al paso 3. Caso contrario, diagonalizar la matriz R de la restricción:

$$\begin{aligned} x^H Rx &= k \\ x^H UD_R U^H x &= k \\ w^H D_R w &= k \end{aligned} \tag{29}$$

   con $w = U^H x$, $w^H = x^H U$ y por tanto $x = Uw$, $x^H = w^H U^H$

2. Si la restricción ahora queda $\|w\|^2 = k$, saltar al paso 3. Caso contrario, buscar un z tal que $\|z\|^2 = k$, con $w = A_R z$.

3. Con el z buscado, la forma cuadrática $Q(x)$ queda entonces:

$$\begin{aligned} Q(x) &= x^H Ax \\ Q(w) &= w^H U^H AUw \\ Q(z) &= z^H A_R^H U^H AUA_R z \\ Q(z) &= z^H Gz \end{aligned} \tag{30}$$

   con la restricción:

$$\|z\|^2 = k \tag{31}$$

4. Si G resultara diagonal, saltar al paso 5. Caso contrario, podemos diagonalizar $Q(z)$:

$$\begin{aligned} Q(z) &= z^H Gz \qquad (32) \\ Q(z) &= z^H PDP^H z \end{aligned}$$

   y, efectuando un cambio de variable tal que $y = P^H z$ & $y^H = z^H P$, obtener:

$$Q(z) = y^H Dy \tag{33}$$

Nótese que:

$$\begin{aligned}
\|y\|^2 &= y^H y && (34)\\
\|y\|^2 &= z^H P P^H z\\
\|y\|^2 &= z^H z\\
\|y\|^2 &= \|z\|\\
\|y\|^2 &= k && (35)
\end{aligned}$$

5. En estas condiciones, y considerando $\lambda_i = \lambda_M$ el máximo autovalor:

$$\begin{aligned}
Q(y) &= y^H D y\\
Q(y) &= \lambda_1 y_1^2 + \ldots + \lambda_M y_i^2 + \ldots + \lambda_n y_n^2\\
Q(y) &\leq \lambda_M y_1^2 + \ldots + \lambda_M y_i^2 + \ldots + \lambda_M y_n^2\\
Q(y) &\leq \lambda_M \left(y_1^2 + \ldots + y_i^2 + \ldots + y_n^2\right)\\
Q(y) &\leq \lambda_M \|y\|^2\\
Q(y) &\leq \lambda_M k && (36)
\end{aligned}$$

valor que es alcanzado por la función en $y = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$, donde 1 ocupa la posición i.

Asimismo, considerando $\lambda_j = \lambda_m$ el mínimo autovalor:

$$\begin{aligned}
Q(y) &= y^H D y\\
Q(y) &= \lambda_1 y_1^2 + \ldots + \lambda_m y_j^2 + \ldots + \lambda_n y_n^2\\
Q(y) &\geq \lambda_m y_1^2 + \ldots + \lambda_m y_j^2 + \ldots + \lambda_m y_n^2\\
Q(y) &\geq \lambda_m \left(y_1^2 + \ldots + y_j^2 + \ldots + y_n^2\right)\\
Q(y) &\geq \lambda_m \|y\|^2\\
Q(y) &\geq \lambda_m k && (37)
\end{aligned}$$

valor que es alcanzado por la función en $y = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$, donde 1 ocupa la posición j.

7.3. Matrices Definidas e Indefinidas

Una matriz A hermítica es:

Def. positiva	si $ava > 0$	ó bien si $\overline{x}^T A x > 0 \quad \forall\ x \neq 0$
Semidef. positiva	si $ava \geq 0$	ó bien si $\overline{x}^T A x \geq 0 \quad \forall\ x \neq 0$
Indefinida	si $ava \geq 0$ y $ava \leq 0$	ó bien si $\overline{x}^T A x > 0$ y $\overline{x}^T A x < 0$
Semidef. negativa	si $ava \leq 0$	ó bien si $\overline{x}^T A x \leq 0 \quad \forall\ x \neq 0$
Def. negativa	si $ava < 0$	ó bien si $\overline{x}^T A x < 0 \quad \forall\ x \neq 0$

8. DVS

$$A = U\Sigma V^T \tag{38}$$

- A *de* f × c /Ran $(A) = r$
- Σ *de* f × c $/\Sigma = \underbrace{\left[\begin{array}{c|c} D_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right]}_{c}\Big\} f$
- U *de* f × f ortogonal $/U = \left[\ \underbrace{u_1 \dots u_r}_{\text{BON Col}(A)}\ ;\ \underbrace{u_{r+1} \dots u_f}_{\text{BON Col}(A)^{\perp}}\ \right]$
- V *de* c × c ortogonal $/V = \left[\ \underbrace{v_1 \dots v_r}_{\text{BON Fil}(A)}\ ;\ \underbrace{v_{r+1} \dots v_c}_{\text{BON Fil}(A)^{\perp}}\ \right]$

8.1. DVS reducida

$$A = U_r D_r V_r^T \tag{39}$$

- $D_{\mathrm{r}} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sigma_r \end{pmatrix}$ donde $\sigma_1 \dots \sigma_r$ son los valores singulares de A
- U_r *de* f × r ortogonal$/U_r = \left[\ \underbrace{u_1 \dots u_r}_{\text{BON Col}(A)}\ \right]$
- V_r *de* c × r ortogonal$/V_r = \left[\ \underbrace{v_1 \dots v_r}_{\text{BON Fil}(A)}\ \right]$

8.2. Pseudoinversa de Moore-Penrose

$$A^{\dagger} = V\Sigma^{\dagger}U^T \tag{40}$$

$$A^{\dagger} = V_r D_r^{-1} U_r^T \tag{41}$$

- $\Sigma^{\dagger} = \left[\begin{array}{c|c} D_r^{-1} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right]$
- $D_r^{-1} = \begin{pmatrix} {}^1/_{\sigma_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & {}^1/_{\sigma_r} \end{pmatrix}$

8.2.1. Propiedades

- $AA^{\dagger}$ es Matriz de Proyección sobre Col$\,(A)$
- $A^{\dagger}A$ es Matriz de Proyección sobre Fil$\,(A)$
- $AA^{\dagger}A = A$
- Si A es inversible entonces $A^{\dagger} = A^{-1}$

8.2.2. Aplicación a Mínimos Cuadrados

$$\begin{aligned} A\hat{x} &= P_{\mathrm{Col}(A)}b \\ A\hat{x} &= AA^{\dagger}b \qquad (42) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{x} &= \underbrace{A^{\dagger}b}_{\in\ \mathrm{Fil}(A)} + \underbrace{x_{\mathrm{Nul}(A)}}_{\in\ \mathrm{Fil}(A)^{\perp}} \qquad (43) \\ \|\hat{x}\|^2 &= \left\|A^{\dagger}b\right\|^2 + \left\|x_{\mathrm{Nul}(A)}\right\|^2 \\ \|\hat{x}\| &\leq \left\|A^{\dagger}b\right\| \\ A^{\dagger}b &= x^{\dagger} \qquad (44) \end{aligned}$$

Entonces, $x^{\dagger}$ es la solución del problema de mínimos cuadrados *de mínima norma.*

9. Ecuaciones Diferenciales

9.1. Primer Orden

$$y' + p(x)y = f(x) \qquad (45)$$

9.1.1. Homogéneo

$$\begin{aligned} y_h' + p(x)y_h &= 0 \\ y_h' &= -p(x)y_h && \text{Resto } p(x)y_h \\ \frac{y_h'}{y_h} &= -p(x) && \text{Divido por } y_h \\ \int \frac{y_h'}{y_h} &= -\int p(x)\,dx && \text{Integro} \\ \ln y_h &= -\int p(x)\,dx \\ y_h &= e^{-\int p(x)\,dx} \qquad (46) && \text{paso } e \text{ baseando} \end{aligned}$$

9.1.2. Particular

Variación de las Constantes

$$\begin{aligned} y_p &= uy_H \qquad (47) && \text{Propongo, siendo } y_H \text{ un } y_h \text{ particular} \\ y_p' &= u'y_H + uy_H' && \text{Derivo} \\ u'y_H + uy_H' + p(x)uy_H &= f(x) && \text{Reemplazo } y \text{ en (45)} \\ u'y_H + u\cancel{(y_H' + p(x)y_H)} &= f(x) && \text{Factor común } u \\ u'y_H &= f(x) && \text{Lo otro es solución del homogéneo} \\ u' &= \frac{f(x)}{y_H} && \text{Divido por } y_H \\ u &= \int \frac{f(x)}{y_H} = \int \frac{f(x)}{e^{-\int p(x)\,dx}} && \text{Integro} \\ y_p &= y_H \int \frac{f(x)}{y_H} = e^{-\int p(x)\,dx} \int \frac{f(x)}{e^{-\int p(x)\,dx}} && \text{Reemplazo } u \text{ en (47)} \end{aligned}$$

Coeficientes Indeterminados

$$y' + ay = f(x) = \begin{cases} e^{\alpha x} P_n(x) \\ e^{\alpha x} \cos(bx) \\ e^{\alpha x} \operatorname{sen}(bx) \end{cases} \tag{48}$$

$$\begin{array}{rcll}
y_p & = & e^{\alpha x} Q_m(x) & \text{Propongo} \\
y_p' & = & \alpha e^{\alpha x} Q_m(x) + e^{\alpha x} Q_m'(x) & \text{Derivo} \\
\alpha e^{\alpha x} Q_m(x) + e^{\alpha x} Q_m'(x) + a e^{\alpha x} Q_m(x) & = & e^{\alpha x} P_n(x) & \text{Reemplazo en (48)} \\
\cancel{e^{\alpha x}} \Big[\alpha Q_m(x) + Q_m'(x) + a Q_m(x) \Big] & = & \cancel{e^{\alpha x}} P_n(x) & \text{Factor común y cancelo } e^{\alpha x} \\
(\alpha + a)\, Q_m(x) + Q_m'(x) & = & P_n(x) & \text{Factor común } Q_m(x)
\end{array}$$

Si $\alpha + a \neq 0$	Si $\alpha + a = 0$
$m = n$ y busco los coeficientes de $Q_m(x)$	$m = n + 1$ y $Q_m'(x) = P_n(x)$ $Q_m(x) = \int P_n(x)\, dx$

9.2. Segundo Orden

$$y'' + a_1 y' + a_0 y = f(x) \tag{49}$$

9.2.1. Homogéneo

$$\begin{array}{rcll}
\alpha^2 + a_1 \alpha + a_0 & = & 0 & \text{Planteo el polinomio fundamental asociado} \\
\alpha_1 & \& & \alpha_2 & \text{Obtengo sus raíces} \\
z' - \alpha_1 z & = & 0 & \text{Me armo una ED homogénea de 1° orden y la resuelvo} \\
w' - \alpha_2 w & = & z & \text{Me armo una ED no homogénea de 1° orden y la resuelvo} \\
y_h & = & w_h + w_p &
\end{array}$$

9.2.2. Particular

Variación de las Constantes

$$\begin{array}{rcll}
y_p & = & u_1 y_{H1} + u_2 y_{H2} & \text{Propongo} \\
y_p' & = & u_1' y_{H1} + u_1 y_{H1}' + u_2' y_{H2} + u_2 y_{H2}' & \text{Derivo} \\
y_p'' & = & u_1'' y_{H1} + 2u_1' y_{H1}' + u_1 y_{H1}'' + u_2'' y_{H2} + 2u_2' y_{H2}' + u_2 y_{H2}'' & \text{Derivo} \\
f(x) & = & u_1'' y_{H1} + 2u_1' y_{H1}' + u_1 y_{H1}'' + u_2'' y_{H2} + 2u_2' y_{H2}' + u_2 y_{H2}'' + & \text{Reemplazo en (49)} \\
 & & +a_1 \left(u_1' y_{H1} + u_1 y_{H1}' + u_2' y_{H2} + u_2 y_{H2}' \right) + & \\
 & & +a_0 \left(u_1 y_{H1} + u_2 y_{H2} \right) & \\
f(x) & = & u_1 (\cancel{y_{H1}'' + a_1 y_{H1}' + a_0 y_{H1}}) + u_2 (\cancel{y_{H2}'' + a_1 y_{H2}' + a_0 y_{H2}}) + & \text{Factor común } u_1 \text{ y } u_2 \text{ (lo otro es solución del homogéneo)} \\
 & & +u_1' y_{H1} + u_2' y_{H2} + u_1'' y_{H1} + 2u_1' y_{H1}' + u_2'' y_{H2} + 2u_2' y_{H2}' \quad (50) &
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
0 = u_1' y_{H1} + u_2' y_{H2} & \text{Decreto} \\
0 = u_1'' y_{H1} + u_1' y_{H1}' + u_2'' y_{H2} + u_2' y_{H2}' & \text{Derivo}
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcll}
f(x) & = & \cancel{u_1' y_{H1} + u_2' y_{H2}} + \cancel{u_1'' y_{H1}} + \cancel{2} u_1' y_{H1}' + \cancel{u_2'' y_{H2}} + \cancel{2} u_2' y_{H2}' & \text{Reemplazo en (50)}
\end{array}$$

Resulta: $\begin{cases} u_1' y_{H1} + u_2' y_{H2} &= 0 \\ u_1' y_{H1}' + u_2' y_{H2}' &= f(x) \end{cases}$ donde $\begin{cases} u_1' &= \dfrac{-f(x) y_{H2}}{W(y_{H1}, y_{H2})} \\ \\ u_2' &= \dfrac{-f(x) y_{H1}}{W(y_{H1}, y_{H2})} \end{cases}$

Coeficientes Indeterminados

$$\begin{array}{rcll} \text{Propongo} \begin{cases} y_p \\ y_p \end{cases} & \begin{array}{c} = \\ = \end{array} & \begin{array}{l} e^{kx} Q(x) \\ e^{kx} Q(x) x \end{array} & \begin{array}{l} \\ \text{Si } e^{kx} \text{ es raíz de } f(x) \end{array} \\ y_p' & = & \dots & \text{Derivo} \\ y_p'' & = & \dots & \text{Derivo} \\ f(x) & = & \dots & \text{Reemplazo en (49)} \\ & = & & \begin{array}{l} \text{Despejo coeficientes de } Q(x) \\ \text{y/o de } \{\operatorname{sen}(x), \cos(x)\} \end{array} \end{array}$$

9.3. Sistemas

$$Y' = AY + v \tag{51}$$

$$\begin{aligned} Y' &= AY + v \\ Y' &= CDC^{-1}Y + v \\ C^{-1}Y' &= DC^{-1}Y + C^{-1}v \end{aligned}$$

Con $\begin{cases} C^{-1}Y &= Z \\ C^{-1}Y' &= Z' \\ C^{-1}v &= w \end{cases}$ queda:

$$\begin{aligned} Z' &= DZ + w \\ \begin{pmatrix} z_1' \\ z_2' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} z_1' \\ z_2' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} az_1 + w_1 \\ bz_2 + w_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Finalmente, queda:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} z_{h1} \\ z_{h2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z_{p1} \\ z_{p2} \end{pmatrix} \\ Z &= Z_h + Z_p \end{aligned}$$

Donde $\begin{cases} z_1 &= z_{h1} + z_{p1} \\ z_2 &= z_{h2} + z_{p2} \end{cases}$ se encuentran con alguno de los métodos explicados en 9.1.

Con $Y = CZ$ queda:

$$Y = CZ_h + CZ_p \tag{52}$$