

Algebra II: Resumen Teórico

Diego Martín Nieto Cid

7 de julio de 2009

Índice

1. Espacios vectoriales	2
1.1. Subespacios	2
1.2. Combinación Lineal	2
1.3. Independencia Lineal	2
1.4. Base	2
1.5. Coordenadas	2
1.6. Matriz de cambio de base	3
2. Wronskiano	3
3. Producto interno	3
3.1. Definición	3
3.2. Desigualdad de Schwarz	3
3.3. Desigualdad triangular	3
3.4. Teorema de Pitágoras	3
3.5. Igualdad del paralelogramo	4
3.6. Propiedades varias	4
4. Proyección ortogonal	4
4.1. Definición	5
4.2. Gram-Schmidt	5
4.3. Matriz de proyección	5
5. Cuadrados minimos	5
5.1. Regresión lineal	6
6. Transformaciones lineales	6
6.1. Definición	6
6.2. Teorema de las transformaciones lineales	7
6.3. Clasificación	7
6.4. Matriz de la transformación	7
7. Ecuaciones diferenciales	7
7.1. Lineales de primer orden	7
7.1.1. Generales	7
7.1.2. A coeficientes constantes	8
7.1.3. Principio de superposición	8
7.1.4. Problemas a valores iniciales	8
7.1.5. Sistemas de ecuaciones	9
7.2. Lineales de segundo orden a coeficientes constantes	10
7.2.1. Solución homogenea	10
7.2.2. Solución particular	10
7.2.3. Problemas a valores iniciales	11
8. Autovectores y Autovalores	11
9. Diagonalización	11
9.1. Semejanza	12
9.2. Aplicación a transformaciones lineales	12

10. Matrices unitarias y ortogonales	12
11. Matrices simétricas y hermíticas	13
12. Teorema espectral	13
13. Formas cuadráticas	13
13.1. Clasificación	13
13.2. Optimización	14
14. Descomposición en valores singulares (DVS)	15
14.1. DVS Reducida	15
14.2. Observaciones	15
14.3. Pseudo inversa de Moore-Penrose	15
14.4. Propiedades	16
15. Observaciones de la práctica	16

1. Espacios vectoriales

1.1. Subespacios

Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial y $\mathbb{S} \subset \mathbb{V}$, $\mathbb{S}$ es subespacio si y sólo si

- $0_{\mathbb{V}} \in \mathbb{S}$
- $u + v \in \mathbb{S} \quad \forall u, v \in \mathbb{S}$
- $\lambda u \in \mathbb{S} \quad \forall u \in \mathbb{S}; \forall \lambda \in \mathbb{K}$

1.2. Combinación Lineal

Sea el conjunto $\{v_1, \dots, v_n\} \subset \mathbb{V}$ y $w \in \mathbb{V}$, w es combinación lineal de $\{v_1, \dots, v_n\}$ si existen $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tales que $w = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$.

1.3. Independencia Lineal

El conjunto $\{v_1, \dots, v_n\} \subset \mathbb{V}$ es linealmente independiente si y sólo si

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i = 0 \Leftrightarrow \lambda_i = 0 \quad \forall i$$

1.4. Base

El conjunto $\{v_1, \dots, v_n\} \subset \mathbb{V}$ es una base de $\mathbb{V}$ si y sólo si

- $\{v_1, \dots, v_n\}$ genera $\mathbb{V}$.
- $\{v_1, \dots, v_n\}$ es linealmente independiente.

Además $\dim(\mathbb{V}) = n$.

1.5. Coordenadas

Sea $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base de $\mathbb{V}$ y $v \in \mathbb{V}$ se denomina coordenadas al conjunto $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ / $v = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i$.

Se define la siguiente función:

$$c_B : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{K}^n$$

$$c_B(v) = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$

Propiedades:

- $c_B(v) = 0_{\mathbb{K}^n} \Leftrightarrow v = 0_{\mathbb{V}}$
- $c_B(v + u) = c_B(v) + c_B(u)$
- $c_B(\lambda v) = \lambda c_B(v)$
- $\{v_1, \dots, v_n\}$ L.I. $\Leftrightarrow \{c_B(v_1), \dots, c_B(v_n)\}$ L.I.

1.6. Matriz de cambio de base

Sean $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ y $B' = \{w_1, \dots, w_n\}$ bases de $\mathbb{V}$.

$$\begin{aligned} C_{BB'} &= \begin{bmatrix} c_{B'}(v_1) & \dots & c_{B'}(v_n) \end{bmatrix} \quad \text{cambio de base } B \text{ a } B' \\ C_{B'B} &= \begin{bmatrix} c_B(w_1) & \dots & c_B(w_n) \end{bmatrix} = [C_{BB'}]^{-1} \quad \text{cambio de base } B' \text{ a } B \end{aligned}$$

2. Wronskiano

Sean $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{C}^1$

$$W(\varphi_1, \varphi_2, x_0) = \begin{vmatrix} \varphi_1(x_0) & \varphi_2(x_0) \\ \varphi_1'(x_0) & \varphi_2'(x_0) \end{vmatrix}$$

Si $\exists x_0 / W(\varphi_1, \varphi_2, x_0) \neq 0 \implies \{\varphi_1, \varphi_2\}$ L.I.

3. Producto interno

3.1. Definición

Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{R}$ espacio vectorial, $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{R}$ es producto interno si

- $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$
- $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$
- $\langle x, x \rangle \geq 0 \quad \wedge \quad \langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0_{\mathbb{V}}$

Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{C}$ espacio vectorial, $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{C}$ es producto interno si

- $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$
- $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \overline{\alpha} \langle x, z \rangle + \overline{\beta} \langle y, z \rangle \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}$
- $\langle x, x \rangle \geq 0 \quad \wedge \quad \langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0_{\mathbb{V}}$

3.2. Desigualdad de Schwarz

$$\langle \cdot, \cdot \rangle \text{ P.I.} \implies |\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$$

3.3. Desigualdad triangular

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

3.4. Teorema de Pitágoras

$$u \perp v \implies \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

3.5. Igualdad del paralelogramo

$$\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

3.6. Propiedades varias

- $x^T y$ producto canónico en $\mathbb{R}^n$
- $\bar{x}^T y$ producto canónico en $\mathbb{C}^n$
- $\|x\|^2 = \langle x, x \rangle$
- $d(x, y) = \|x - y\|$ (distancia de x a y)
- $x \perp y \iff \langle x, y \rangle = 0$
- $\alpha / \cos(\alpha) = \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\|\|y\|}$ (ángulo subtendido entre x e y)
- $\{v_1, \dots, v_n\}$ es un conjunto ortogonal si $\langle v_i, v_j \rangle = 0 \quad \forall i \neq j$
- $\{v_1, \dots, v_n\}$ es un conjunto ortonormal si es ortogonal y $\langle v_i, v_i \rangle = 1 \quad \forall i$
- Si $\{v_1, \dots, v_n\}$ es un conjunto ortogonal $\iff$ es L.I.
- Sea $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ base de $\mathbb{V}$, $x \in \mathbb{V}$, $y \in \mathbb{V}$ y $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es **P.I.** entonces

$$\langle x, y \rangle = c_B(x) G c_B(y)$$

donde $G = \begin{bmatrix} \langle v_1, v_1 \rangle & \dots & \langle v_1, v_n \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle v_n, v_1 \rangle & \dots & \langle v_n, v_n \rangle \end{bmatrix}$ simétrica en $\mathbb{R}$, hermítica en $\mathbb{C}$ y definida positiva.

4. Proyección ortogonal

Complemento ortogonal: Sea $\mathbb{S} \subset \mathbb{V}$, el complemento ortogonal, $\mathbb{S}^\perp$, es el conjunto

$$\mathbb{S}^\perp = \{v \in \mathbb{V} / \langle v, s \rangle = 0 \quad \forall s \in \mathbb{S}\}$$

- $\mathbb{S}^\perp$ es subespacio.
- Si $\mathbb{S} = \mathbb{V}$ entonces $\mathbb{S}^\perp = \{0_{\mathbb{V}}\}$
- $\mathbb{S}^{\perp\perp} = \mathbb{S}$
- $\mathbb{V} = \mathbb{S} \oplus \mathbb{S}^\perp$

4.1. Definición

Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial con P.I., $\mathbb{S} \subset \mathbb{V}$, $x \in \mathbb{V}$ y $x' \in \mathbb{V}$.
 $x' = \text{proy}_{\mathbb{S}} x \iff x' \in \mathbb{S} \wedge x - x' \in \mathbb{S}^\perp$.

- Si $\exists \text{proy}_{\mathbb{S}} x = x' \implies x'$ es único.
- $d(x, x') \leq d(x, s) \quad \forall s \in \mathbb{S}$
- Sea $B = \{v_1, \dots, v_k\}$ una base ortogonal de $\mathbb{S}$.

$$\text{proy}_{\mathbb{S}} x = \sum_{i=1}^k \alpha_i v_i \quad \text{donde } \alpha_i = \frac{\langle v_i, x \rangle}{\langle v_i, v_i \rangle}$$

- $\text{proy}_{\mathbb{S}} x = 0_{\mathbb{V}} \iff x \in \mathbb{S}^\perp$
- Si $x \in \mathbb{S} \implies \text{proy}_{\mathbb{S}} x = x$
- Si $x \in \mathbb{V}$ entonces $x = \text{proy}_{\mathbb{S}} x + \text{proy}_{\mathbb{S}^\perp} x$
- $x - \text{proy}_{\mathbb{S}} x = \text{proy}_{\mathbb{S}^\perp} x$

4.2. Gram-Schmidt

Sea $\mathbb{S} \subset \mathbb{V}$ y $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ base de $\mathbb{S} \implies \exists B' = \{u_1, \dots, u_n\}$ base ortogonal de $\mathbb{S}$ donde:

- $u_1 = v_1$
- $u_i = v_i - \text{proy}_{\mathbb{S}_{i-1}} v_i$; $\mathbb{S}_{i-1} = \text{gen} \{u_1, \dots, u_{i-1}\}$; $2 \leq i \leq n$

4.3. Matriz de proyección

Una matriz P de proyección verifica

1. $P = P^T$
2. $P^2 = P$
3. $Px = \text{proy}_{\text{col}(P)} x$

Sea $\mathbb{S} \subset \mathbb{R}^n$ con el P.I. canónico y $B = v_1, \dots, v_k$ base ortonormal de $\mathbb{S}$.
Si $Q = [v_1 \dots v_k]$ entonces $P = QQ^T$ proyecta sobre $\mathbb{S}$.

5. Cuadrados minimos

Sea $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

Si $b \in \text{col}(A)$ entonces $Ax = b$ es compatible.

Si $b \notin \text{col}(A)$ es posible encontrar x_0 / $Ax_0 = \text{proy}_{\text{col}(A)} b$.

La solución del sistema $Ax = b$ por cuadrados mínimos cumple

$$A^T Ax = A^T b \quad \text{Ecuaciones normales}$$

Observaciones:

- $Nul(A) = Nul(A^T)$
- $rango(A^T A) = rango(A)$
- Si $rango(A) = n$ entonces $A^\# = (A^T A)^{-1} A^T$, denominada pseudo-inversa de A , es tal que

$$A^\# A = I$$

$$A A^\# = \text{matriz de proyección}$$

5.1. Regresión lineal

Dado el conjunto de puntos $\{(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)\}$ la recta que mejor ajusta a los puntos es

$$y = mx + b$$

donde

$$\begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^n x_i \\ \sum_{i=1}^n x_i & \sum_{i=1}^n x_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b \\ m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n y_i \\ \sum_{i=1}^n x_i y_i \end{bmatrix}$$

6. Transformaciones lineales

6.1. Definición

Sean $\mathbb{V}$ y $\mathbb{W}$ $\mathbb{K}$ espacios vectoriales. Una función $T : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}$ es una transformación lineal si para $v_1, v_2 \in \mathbb{V}$ y $\lambda \in \mathbb{K}$ se verifican

- $T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2)$
- $T(\lambda v_1) = \lambda T(v_1)$

Observaciones:

- $T(0_{\mathbb{V}}) = 0_{\mathbb{W}} \quad \forall T.L.$
- Sean $T : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}$ y $G : \mathbb{W} \rightarrow \mathbb{U}$, la composición $G \circ T : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{U}$ es una transformación lineal.
- $Nu(T) = \{v \in \mathbb{V} / T(v) = 0_{\mathbb{W}}\}$ subespacio de $\mathbb{V}$
- $Im(T) = \{w \in \mathbb{W} / w = T(v) \text{ para algún } v \in \mathbb{V}\}$ subespacio de $\mathbb{W}$

Propiedades:

- $\{T(v_1), \dots, T(v_n)\} \text{ L.I.} \implies \{v_1, \dots, v_n\} \text{ L.I.}$
- $dim(Nu(T)) + dim(Im(T)) = dim(\mathbb{V})$

6.2. Teorema de las transformaciones lineales

Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial, $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ **base** de $\mathbb{V}$ y dado el conjunto $\{w_1, \dots, w_n\} \subset \mathbb{W}$, $\exists !$ T.L. $T : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W} / T(v_i) = w_i \quad \forall i$.

6.3. Clasificación

- Monomorfismo: T inyectiva; $v_1 \neq v_2 \implies T(v_1) \neq T(v_2)$
- Epimorfismo: T sobreyectiva; $Im(T) = \mathbb{W}$
- Isomorfismo: T biyectiva

Propiedades:

- T es monomorfismo $\iff Nu(T) = \{0_{\mathbb{V}}\}$
- T es monomorfismo $\implies dim(\mathbb{V}) \leq dim(\mathbb{W})$
- T es epimorfismo $\implies dim(\mathbb{W}) \leq dim(\mathbb{V})$
- T es isomorfismo $\implies dim(\mathbb{V}) = dim(\mathbb{W})$
- T es isomorfismo $\implies \exists T^{-1} : \mathbb{W} \rightarrow \mathbb{V}$ T.L.
- T es isomorfismo y $\{v_1, \dots, v_n\}$ base de $\mathbb{V} \implies \{T(v_1), \dots, T(v_n)\}$ base de $\mathbb{W}$

6.4. Matriz de la transformación

Sean $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ base de $\mathbb{V}$ y $B' = \{w_1, \dots, w_n\}$ base de $\mathbb{W}$.

$$[T]_{BB'} = \begin{bmatrix} c_{B'}(T(v_1)) & \dots & c_{B'}(T(v_n)) \end{bmatrix}$$

$$c_{B'}(T(v)) = [T]_{BB'} c_B(v)$$

Observaciones:

- $rango([T]_{BB'}) = dim(Im(T))$
- Las columnas de $[T]_{BB'}$ son las **coordenadas** de los generadores de $Im(T)$.
- Si T es isomorfismo $\implies \exists [T^{-1}]_{B'B} = [T]_{BB'}^{-1}$

7. Ecuaciones diferenciales

7.1. Lineales de primer orden

7.1.1. Generales

$$y' + a(t)y = b(t) \quad \begin{array}{l} y \in C^1 \\ a(t), b(t) \in \mathcal{C} \end{array}$$

Si $b(t) = 0$, la ecuación es homogénea.

Todas las soluciones de la ecuación se pueden escribir $y = y_H + y_P$ donde y_P es una solución de la ecuación e y_H son las soluciones de la ecuación homogénea.

$$\begin{aligned}y_P &= e^{-\lambda(t)} B(t) \\y_H &= K e^{-\lambda(t)} \\y &= K e^{-\lambda(t)} + e^{-\lambda(t)} B(t)\end{aligned}$$

siendo

$$\begin{aligned}\lambda(t) &= \int a(t) \\B(t) &= \int e^{\lambda(t)} b(t)\end{aligned}$$

7.1.2. A coeficientes constantes

- Método de los coeficientes indeterminados (sólo si $b(t) = e^{kt} P_m(t)$)

Si $a = -k$:

$$y_P = e^{-at} P_{m+1}$$

donde $gr(P_{m+1}) = gr(P_m) + 1$.

Si $a \neq -k$:

$$y_P = e^{kt} Q_m(t)$$

donde $gr(Q_{m+1}) = gr(P_m)$.

Luego reemplazando y_P en la ecuación diferencial se obtienen los coeficientes de P_{m+1} o Q_m .

7.1.3. Principio de superposición

$$\begin{array}{lcl}y_1 & / & y_1' + ay_1 = b_1(t) \\y_1 & / & y_2' + ay_2 = b_2(t)\end{array}$$

Sumando se obtiene:

$$(y_1 + y_2)' + a(y_1 + y_2) = b_1(t) + b_2(t)$$

Entonces $y_1 + y_2$ es solución de $y' + ay = b_1(t) + b_2(t)$.

7.1.4. Problemas a valores iniciales

$$\begin{cases} y' + a(t)y &= b(t) \\ y(t_0) &= y_0 \end{cases}$$

1. Se obtiene y_G .
2. Reemplazando t por t_0 resulta $y_G(t_0) = y_0$, de donde se obtiene el valor de K .

7.1.5. Sistemas de ecuaciones

El sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= \sum_{i=1}^n x_i \cdot \alpha_{i1} \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= \sum_{i=1}^n x_i \cdot \alpha_{in} \end{cases}$$

puede interpretarse matricialmente como

$$\dot{x} = Ax$$

donde

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \cdots & \alpha_{nn} \end{bmatrix}$$
$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix}$$
$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Si A es diagonalizable, $A = QDQ^{-1}$ con

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$$
$$Q = \begin{bmatrix} v_1 & \cdots & v_n \end{bmatrix}$$

Sea $y = Q^{-1}x$, $\dot{y} = Q^{-1}\dot{x}$:

$$\dot{y} = Q^{-1}\dot{x} = Q^{-1}QDQ^{-1}x = Dy$$

quedando el sistema en y :

$$\begin{cases} \dot{y}_1 &= \lambda_1 y_1 \\ &\vdots \\ \dot{y}_n &= \lambda_n y_n \end{cases}$$

que tiene solución inmediata

$$y = \begin{bmatrix} k_1 e^{\lambda_1 t} \\ \vdots \\ k_n e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}$$

y $x = Qy$.

7.2. Lineales de segundo orden a coeficientes constantes

$$y'' + ay' + by = c(t)$$

7.2.1. Solución homogénea

$P(x) = x^2 + ax + b$ — polinomio característico de la ecuación

Sean λ_1 y λ_2 las raíces de $P(x)$.

- Si $\lambda_1 \neq \lambda_2$ $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$

$$S_H = \text{gen} \{e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}\}$$

- Si $\lambda_1 = \lambda_2$ $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$

$$S_H = \text{gen} \{te^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_1 t}\}$$

- Si $\lambda_1 = \overline{\lambda_2}$ $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$
 $\lambda_1 = \alpha + i\beta$
 $\lambda_2 = \alpha - i\beta$

$$S_H = \text{gen} \{e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}\}$$

Empleando una combinación lineal adecuada de estos generadores es posible obtener la siguiente solución:

$$S_H = \text{gen} \{e^{\alpha t} \cos \beta t, e^{\alpha t} \sin \beta t\}$$

7.2.2. Solución particular

- Coeficientes indeterminados($c(t) = P_m e^{kt}$)

$$y_P = e^{kt} Q(t)$$

$$\text{donde } gr(Q(t)) = \begin{cases} gr(P_m) & \text{si } \lambda_1 \neq \lambda_2 \neq k \\ gr(P_m) + 1 & \text{si } \lambda_1 = k \neq \lambda_2 \vee \lambda_2 = k \neq \lambda_1 \\ gr(P_m) + 3 & \text{si } \lambda_1 = \lambda_2 = k \end{cases}$$

- Método de variación de las constantes

$$y_H = K_1 \phi_1 + K_2 \phi_2$$

$$y_P = c_1(t) \phi_1 + c_2(t) \phi_2$$

$$\begin{cases} c_1' \phi_1 + c_2' \phi_2 & = & 0 \\ c_1' \phi_1' + c_2' \phi_2' & = & c(t) \end{cases}$$

Resolviendo el sistema por regla de Cramer:

$$c_1' = \frac{-c(t) \phi_2(t)}{W(\phi_1, \phi_2)}$$

$$c_2' = \frac{-c(t) \phi_1(t)}{W(\phi_1, \phi_2)}$$

De donde se obtienen c_1 y c_2 por integración de sus respectivas derivadas.

7.2.3. Problemas a valores iniciales

$$\begin{cases} y'' + ay' + by = c(t) \\ y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = y_1 \end{cases}$$

1. $y_G = y_P + K_1\phi_1 + K_2\phi_2$
2. Reemplazando t por t_0 resulta $y_G(t_0) = y_0$ y $y_G'(t_0) = y_1$, de donde se obtiene el valor de K_1 y K_2 .

8. Autovectores y Autovalores

$v \neq 0$, $v \in K^n$ es autovector de $A \in K^{n \times n}$ si $\exists \lambda \in K / Av = \lambda v$ Y se dice que λ es el autovalor de A asociado al autovector v .

Polinomio Característico: $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$

P_A tiene grado n y sus raíces son los autovalores de A .

$S_\lambda = \text{Nul}(A - \lambda I)$: autoespacio de A asociado a λ (generado por autovectores asociados a λ)

Multiplicidad algebraica: (m.a.) multiplicidad de λ como raíz de P_A

Multiplicidad geométrica: (m.g.) dimensión de S_λ

Observaciones:

- Si $\lambda = 0$ es autovalor de $A \Rightarrow A$ es singular.
- Si A es triangular superior o inferior o diagonal $\Rightarrow$ Los elementos de la diagonal son los autovalores de A .
- $\text{tr} A = \sum^n \lambda_i$
- $\det A = \prod^n \lambda_i^{k_i}$ donde k_i es m.a. de λ_i
- Si $\lambda_i \neq \lambda_j \Rightarrow \{v_i, v_j\}$ L.I.
- Sea $P: K^{n \times n} \rightarrow K^{n \times n}$ y $p: K \rightarrow K$

$$P(A) = \sum a_i A^i \quad y \quad p(x) = \sum a_i x^i$$

Si λ es autovalor de A asociado a $v \Rightarrow p(\lambda)$ es autovalor de $P(A)$ asociado a v .

- $P_A(\lambda) = P_{A^T}(\lambda) \quad \therefore$ autovalores de $A =$ autovalores de A^T . Además, si λ es autovalor de A de m.g. $k \Rightarrow \lambda$ es autovalor de A^T de m.g. k .

9. Diagonalización

A es diagonalizable $\Leftrightarrow A = PDP^{-1} \Leftrightarrow \exists$ base de K^n formada por autovectores de A Siendo:

$$P = [v_1 \quad \cdots \quad v_n] \quad v_1 \cdots v_n \text{ autovectores de } A$$

$$D = I \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix} \quad \lambda_1 \cdots \lambda_n \text{ autovalores de } A$$

9.1. Semejanza

A es semejante a B , y se lo nota $A \sim B$, si y solo si $\exists Q$ tal que $A = QBQ^{-1}$.

Sean A, B , semejantes y B, C , semejantes, entonces:

- $P_A(\lambda) = P_B(\lambda)$
- $\dim(S_{\lambda_i, A}) = \dim(s_{\lambda_i, B})$
- $Av_i = \lambda_i v_i \Leftrightarrow B(Q^{-1}v_i) = \lambda_i(Q^{-1}v_i)$
- $v_i \cdots v_k$ L.I. $\Leftrightarrow Q^{-1}v_i \cdots Q^{-1}v_k$ L.I.
- $A \sim C$ (relación transitiva)

Si A diagonalizable $\Rightarrow A \sim D$. (donde D es la matriz diagonal de autovalores.)

9.2. Aplicación a transformaciones lineales

$v \neq 0$ es autovector de la transformación $T : V \rightarrow V$, si $T(v) = \lambda v$

$$B = \{v_1 \cdots v_n\} \quad \text{base de autovectores} \Rightarrow [T]_B = I \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix}$$

v es autovector de T asociado a $\lambda \Leftrightarrow c_{B'}(v)$ es autovector de $[T]_{B'}$ asociado a λ para cualquier base B' .

Observaciones:

- $[T]_{BB} \sim [T]_{B'B'}$
- T es diagonalizable si existe B base de autovectores de T .

10. Matrices unitarias y ortogonales

(Con producto interno canónico.)

$$\left. \begin{array}{l} U \text{ es unitaria si } U^{-1} = U^H = \bar{U}^T \\ P \text{ es ortogonal si } P^{-1} = P^T \end{array} \right\} \Leftrightarrow \begin{array}{l} \text{sus columnas} \\ \text{son una BON} \end{array}$$

Si P es ortogonal $\Rightarrow P$ es unitaria.

Propiedades:

- $|\det(U)| = 1$
- U, V , unitarias $\Rightarrow UV$, unitaria.
- U , unitaria $\Rightarrow (u, v) = (Uu, Uv)$.
Se dice que U conserva el producto interno". $\therefore$ conserva norma y ángulo.
- Si λ , autovalor de U , unitaria $\Rightarrow |\lambda| = 1$.
- Si $B = \{v_1 \cdots v_n\}$ BON de C^n y $B' = \{w_1 \cdots w_n\}$ BON de $C^n \Rightarrow C_{BB'}$, unitaria.

11. Matrices simétricas y hermíticas

$A \in R^{n \times n}$ es simétrica si $A^T = A$
 $A \in C^{n \times n}$ es hermítica si $A^H = A = \bar{A}^T$
 A es simétrica $\Rightarrow A$ es hermítica.
Propiedades:

- A , hermítica $\Rightarrow \bar{x}^T A x \in R \forall x \in C^n$
- Si λ es autovalor de A , hermítica $\Rightarrow \lambda \in R$
- Si A es hermítica y $\lambda_i \neq \lambda_j$ autovalores de $A \Rightarrow v_i \perp v_j$
- Si $S \subset C^n$ es invariante por $A \Rightarrow S^\perp$ es invariante por A .

12. Teorema espectral

A es simétrica si y solo si $\exists P$ ortogonal tal que $A = P D P^T$.
 A es hermítica si y solo si $\exists U$ unitaria tal que $A = U D U^T$.

13. Formas cuadráticas

$$F(x) = x^T A x \text{ con } A \text{ simétrica}$$

Las formas cuadráticas más sencillas resultan cuando A es diagonal:

- Elipses: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
- Hipérbolos: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

Si A no es diagonal resultan elipses o hipérbolos rotadas respecto de los ejes cartesianos: $x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2$

Empleando el siguiente cambio de variable se logra obtener una expresión sencilla respecto de los ejes apropiados:

$$x^T A x = c$$

$$x^T P D P^T x = c \quad A = P D P^T$$

Sea $y = P^T x$, $y^T = x^T P$:

$$x^T A x = y^T D y = c$$

Faltan 3 gráficos

13.1. Clasificación

$Q(x) = x^T A x$ A simétrica

- Definida positiva si: $x^T A x > 0 \forall x \neq 0$
- Definida negativa si: $x^T A x < 0 \forall x \neq 0$
- Semi-definida positiva si: $x^T A x \geq 0 \forall x$

- Semi-definida negativa si: $x^T Ax < 0 \forall x \leq 0$
- Indefinida si: $\exists x_1, x_2$ tal que $x_1^T Ax_1 > 0$ y $x_2^T Ax_2 < 0$

$Q(x)$ definida positiva $\Leftrightarrow \lambda_i > 0 \forall i$, con λ_i autovalores de A .

13.2. Optimización

$Q(x) = x^T Ax$ con restricción $\|x\|_2 = 1$

$$\begin{array}{cc} \max_{\|x\|_2=1} Q(x) & \text{o} & \min_{\|x\|_2=1} Q(x) \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} \max_{\|x\|_2=1} Q(x) & = \lambda_{\max} \quad Q(x) = \lambda_{\max} \Leftrightarrow x = v \text{ (autovector)} \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} \min_{\|x\|_2=1} Q(x) & = \lambda_{\min} \quad Q(x) = \lambda_{\min} \Leftrightarrow x = v \text{ (autovector)} \end{array}$$

Si la restricción es $\|x\|_2 = k$, expresando x como $\|x\|_2 \hat{v}$ con $\hat{v} = \frac{x}{\|x\|_2}$ resulta:

$$x^T Ax = \|x\|_2^2 \hat{v}^T A \hat{v}$$

siendo $\lambda_{\min} \leq \hat{v}^T A \hat{v} \leq \lambda_{\max}$

$$\Rightarrow \|x\|_2^2 \lambda_{\min} \leq x^T Ax \leq \|x\|_2^2 \lambda_{\max}$$

Si la restricción es $x^T Bx = 1$:

(si fuera $x^T Cx = k \rightarrow x^T Bx = 1 \wedge B = \frac{C}{k}$)

$$B = SDS^T \text{ con } D = I \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix}$$

$$\text{Sea } D = D_1 D_1 \text{ con } D_1 = I \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1} \\ \vdots \\ \sqrt{\lambda_n} \end{bmatrix} \Rightarrow x^T Bx = x^T S D_1 D_1 S^T x = 1$$

Al introducirse la variable z : $z = D_1 S^T x$, la restricción se convierte, en z , a $\|z\|_2 = 1$. Ya que:

$$\begin{aligned} x^T &= z^T D_1 S^T & \wedge & & x &= S D_1^{-1} z \\ \Rightarrow x^T Bx &= z^T D_1 S^T S D_1^{-1} z = z^T z \end{aligned}$$

Sustituyendo en la forma cuadrática se reduce el problema a la restricción $\|z\|_2 = 1$:

$$Q(x) = x^T Ax \longrightarrow Q(z) = z^T C z$$

siendo $C = D_1^{-1} S^T A S D_1^{-1} \wedge x = S D_1^{-1} z$.

14. Descomposición en valores singulares (DVS)

Propiedad: si $A \in R^{m \times n} \Rightarrow A^T A \in R^{n \times n}$ es simétrica y semi-definida positiva.

Se llama valor singular de A a $\sigma = \sqrt{\lambda}$, siendo λ autovalor de $A^T A$.

Si $A \in R^{m \times n}$, $rg(A) = r \Rightarrow \exists U$ y V tal que $A = U \Sigma V^T$, donde

$$\Sigma \in R^{m \times n}, \quad \Sigma = \left[\begin{array}{ccc|c} \sigma_1 & & & 0 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & \sigma_r & \\ \hline 0 & \dots & & 0 \end{array} \right]$$

con $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r > 0$: valores singulares de A .

$$U \in R^{m \times m}, \text{ ortogonal} \quad U = [\mu_1 \dots \mu_r \mu_{r+1} \dots \mu_n]$$

con $\mu_i = \frac{A v_i}{\sigma_i} \forall i \in \{1 \dots r\}$ y $\{\mu_{r+1} \dots \mu_n\}$ tal que $\{\mu_1 \dots \mu_n\}$ es BON de R^m y v_i autovector de $A^T A$ asociado a λ_i .

$$V \in R^{n \times n}, \text{ ortogonal} \quad V = [v_1 \dots v_n]$$

14.1. DVS Reducida

$$A = U_r \Sigma_r V_r^T$$

con

$$U_r = [\mu_1 \dots \mu_r]$$

$$\Sigma_r = I \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \vdots \\ \sigma_r \end{bmatrix}$$

$$V_r = [v_1 \dots v_r]$$

14.2. Observaciones

- $\{v_1 \dots v_r\}$ BON $Fil(A)$
- $\{v_{r+1} \dots v_n\}$ BON $Nul(A)$
- $\{\mu_1 \dots \mu_r\}$ BON $Col(A)$
- $\{\mu_{r+1} \dots \mu_n\}$ BON $[Col(A)]^\perp$

14.3. Pseudo inversa de Moore-Penrose

Sea $A = U_r \Sigma_r V_r^T$, se define $A^\dagger = V_r \Sigma_r^\dagger U_r^T$ o $A^\dagger = V \Sigma^\dagger U^T$ donde

$$\Sigma^\dagger = \left[\begin{array}{c|c} \Sigma^{-1} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right]$$

14.4. Propiedades

- $U_r U_r^T =$ Matriz de proyección sobre $Col(A)$
- $U_r^T U_r = I_{r \times r}$
- $V_r V_r^T =$ Matriz de proyección sobre $Fil(A)$
- $AA^\dagger = U_r U_r^T$
- $A^\dagger A = V_r V_r^T$
- $A(A^\dagger A) = A$
- $A^\dagger AA^\dagger = A^\dagger$
- $A \in R^{m \times n}$, $rg(A) = n \Rightarrow A^\dagger = A^\#$ ($A^\# = (A^T A)^{-1} A$)
- $A \in R^{n \times n}$, no singular $\Rightarrow A^\dagger = A^{-1}$
- Relación con mínimos cuadrados:
 $Ax = b$ incompleto $\Rightarrow A\hat{x} = proy_{Col(A)} b$
 $AA^\dagger$ es la matriz de proyección $\Rightarrow A\hat{x} = AA^\dagger b$
 $\Rightarrow x^\dagger = A^\dagger b$ es solución del problema de cuadrados mínimos de menor norma y todas las soluciones se escriben $\hat{x} = x^\dagger + x_n$, con $x_n \in Nul(A)$.

15. Observaciones de la práctica

- $\|P_S v\| \leq \|v\| \quad \forall v$
- $P_S v = v \quad \forall v \in S$
- Householder (ver figura 1). $H = I - \frac{2}{w^T w} w w^T$
- Sea $P \in \mathcal{R}^{n \times n}$ la matriz de proyección sobre S , $I - P$ es matriz de proyección sobre $S^\perp$.
- $A \in \mathcal{R}^{n \times n}$, $rg(A) = k$, $k < n \Rightarrow 0$ es autovalor de m.g. $n - k$.
- Sea λ autovalor de A , $r\lambda$ es autovalor de rA .
- Sea λ autovalor de A y $k \in \mathcal{N}$, λ^k es autovalor de A^k .
- Sea λ autovalor de A , λ^{-1} es autovalor de A^{-1} .
- Sea λ autovalor de A , $\lambda + r$ es autovalor de $A + rI$.
- Sea λ autovalor de A , $r\lambda$ es autovalor de rA .
- Si $A \in \mathcal{R}^{n \times n}$ posee n autovalores distintos entonces A es diagonalizable.
- Si $A^2 = A$ y $x \in Col(A)$, $Ax = x$.
- Sea $T(x) = Px$ con $P \in \mathcal{R}^{n \times n}$ y ortogonal. Si S es invariante por T , $T(S) = S$ y $T(S^\perp) = S^\perp$.

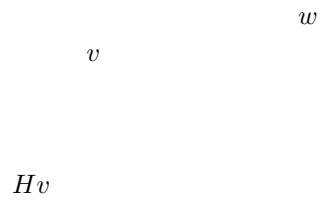


Figura 1: Matriz de Householder.

- $x^H Q y = (x, y)$, con $Q \in C^{n \times n}$ hermitica, define un productoo interno
 $\Leftrightarrow Q$ es definida positiva.
- $A \in R^{n \times n}$, $|det(A)| = \prod \sigma_i$.
- $A \sim B \Rightarrow A$ tiene los mismos valores singulares que B .