EXAMEN INTEGRADOR - 10 de diciembre de 2014
Esquema de resolución

TEMA 1

1.

Sea $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ base de un $\mathbb{R}$-espacio vectorial V.

Sea $f \in L(V)$ tal que $= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2k^2-4k & 4-2k-k^2 & 2k \end{bmatrix}$, donde $k \in \mathbb{R}$.

(**a**) Sabiendo que $rg([f]_B - 2I) < 3$, determine para qué valores de $k \in \mathbb{R}$, f resulta diagonalizable.

Del dato se sabe que 2 es autovalor de f y a partir, por ejemplo, de la traza y del determinante de la matriz, se pueden hallar los otros autovalores que resultan ser k y $k-2$.

Tanto cuando $k = 2$ o cuando $k = 4$, f tiene un autovalor doble y en ambos casos la multiplicidad geométrica resulta ser 1. Con lo cual f resulta diagonalizable para $k \in \mathbb{R} - \{2, 4\}$.

(**b**) En el caso $k = 0$, siendo $g = f^4 - bf^3 + 2id_V$, determine todos los $b \in \mathbb{R}$ tales que la dimensión de $Nu(g)$ es 1 y para cada caso, halle una base de $Im(g)$.

Cuando $k = 0$ los autovalores de f son $2, 0$ y -2 y los autovectores asociados son $w_1 = v_1 + 2v_2 + 4v_3, w_2 = v_1$ y $w_3 = v_1 - 2v_2 + 4v_3$ respectivamente.

Por lo tanto, los autovalores de g son $18 - 8b$, 2 y $18 + 8b$, en forma correspondiente, con autovectores asociados w_1, w_2 y w_3.

La dimensión de $Nu(g)$ es 1 cuando $18 - 8b = 0$ o cuando $18 + 8b = 0$. En ambos casos, la $Im(g)$ está generada por los autovectores de g asociados a autovalores no nulos.

Por ejemplo, en el primer caso, $Im(g) = gen\{w_2, w_3\}$.

2.

Sean $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 15 & 2 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 1 & 4i \\ -4i & 1 \end{bmatrix}$.

(**a**) Pruebe que A y B sean semejantes.

Basta considerar que ambas matrices resultan ser semejantes a $D = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$.

(**b**) Halle una matriz simétrica H que sea semejante a A y tal que, para la forma cuadrática $Q(x) = x^T Hx$, sea $Q(1\ 2)^T < 0$

Para definir H simétrica semjante a A se puede considerar $H = MDM^T$con $M^T = M^{-1}$. Como se pide $Q(1\ 2)^T < 0$ se puede elegir que $(1\ 2)^T$ sea autovector asociado al autovalor -3 y considerar $M = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.

3. Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 2 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ con $\alpha, \beta > 0$.

Halle todos los α, β tales que $4 \leq \|Ax\| \leq 12$ para todo x tal que $\|x\| = 2$.

$A = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 2 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3\sqrt{2}\alpha & 0 \\ 0 & 3\sqrt{2}\beta \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ es una DVS reducida de A a partir de la cual los valores singulares de A resultan ser $3\sqrt{2}\alpha$ y $3\sqrt{2}\beta$. Se puede considerar el caso $\alpha > \beta$ para que el máximo valor singular sea $3\sqrt{2}\alpha$ y el mínimo valor singular (no nulo) sea $3\sqrt{2}\beta$.

Como $rg(A) = 2$, si $4 \leq \|Ax\| \leq 12$ para todo x tal que $\|x\| = 2$, se puede determinar el valor de α a partir de $12 \geq 2$.máximo valor singular de A.

El valor de β depende de cada x que se considere.

4. Considere la matriz A del ejercicio anterior para $\alpha = 5$ y $\beta = 1$.

(**a**) Encuentre todos los $b \in \mathbb{R}^4$ para los cuales la solución por mínimos cuadrados de norma mínima del sistema $Ax = b$ resulta ser $X^+ = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 9 \end{bmatrix}$.

Se debe resolver el sistema $A^+ b = X^+$ siendo $A^+ = \frac{1}{18} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$.

(**b**) Para los b hallados, encuentre todas las soluciones por cuadrados mínimos de $Ax = b$.

Se sabe que todas las soluciones por cuadrados mínimos pueden ser descriptas por $\tilde{x} = X^+ + w$ con $w \in Nu(A)$. En este caso, $Nu(A) = gen\{(0\ 1\ 0)^T\}$.

5. Sea A la matriz que representa, respecto de la base canónica de $\mathbb{R}^3$, a la rotación en $\frac{\pi}{4}$ con eje $v = (0\ 0\ 1)^T$. Resuelva el sistema $X' = A^4 X$.

Como A representa, respecto de la base canónica de $\mathbb{R}^3$, a la rotación en $\frac{\pi}{4}$ con eje $v = (0\ 0\ 1)^T$, A^4 representa, en la misma base, a la simetría respecto de la recta generada por v. Luego

$X(t) = c_1 e^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 e^{-t} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_3 e^{t} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.