FACULTAD DE INGENIERIA-UBA

ALGEBRA II. Segundo cuatrimestre de 2014

EXAMEN INTEGRADOR - 10 de diciembre de 2014 (Primera oportunidad)

TEMA 1

Apellido y nombres:............
Número de padrón: .... Curso:.........

Justifique todas las respuestas. Numere las hojas y firme al final del examen.
El examen se aprueba resolviendo correctamente 3 ejercicios

1.
Sea $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ base de un $\mathbb{R}$-espacio vectorial V.
Sea $f \in L(V)$ tal que $[f]_B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2k^2 - 4k & 4 - 2k - k^2 & 2k \end{bmatrix}$, donde $k \in \mathbb{R}$.

(**a**) Sabiendo que $rg([f]_B - 2I) < 3$, determine para qué valores de $k \in \mathbb{R}$, f resulta diagonalizable.

(**b**) En el caso $k = 0$, siendo $g = f^4 - bf^3 + 2id_V$, determine todos los $b \in \mathbb{R}$ tales que la dimensión de $Nu(g)$ es 1 y para cada caso, halle una base de $Im(g)$.

2.
Sean $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 15 & 2 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 1 & 4i \\ -4i & 1 \end{bmatrix}$.

(**a**) Pruebe que A y B sean semejantes.

(**b**) Halle una matriz simétrica H que sea semejante a A y tal que, para la forma cuadrática $Q(x) = x^T Hx$, sea $Q(12)^T < 0$

3. Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 2 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ con $\alpha, \beta > 0$.
Halle todos los α, β tales que $4 \leq \|Ax\| \leq 12$ para todo x tal que $\|x\| = 2$.

4. Considere la matriz A del ejercicio anterior para $\alpha = 5$ y $\beta = 1$.

(**a**) Encuentre todos los $b \in \mathbb{R}^4$ para los cuales la solución por mínimos cuadrados de norma mínima del sistema $Ax = b$ resulta ser $X^+ = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 9 \end{bmatrix}$.

(**b**) Para los b hallados, encuentre todas las soluciones por cuadrados mínimos de $Ax = b$.

5. Sea A la matriz que representa, respecto de la base canónica de $\mathbb{R}^3$, a la rotación en $\frac{\pi}{4}$ con eje $v = (0\ 0\ 1)^T$. Resuelva el sistema $X' = A^4 X$.

FACULTAD DE INGENIERIA-UBA

ALGEBRA II. Segundo cuatrimestre de 2014

EXAMEN INTEGRADOR - 10 de diciembre de 2014 (Primera oportunidad)

TEMA 2

Apellido y nombres:............
Número de padrón: .... Curso:.........

Justifique todas las respuestas. Numere las hojas y firme al final del examen.
El examen se aprueba resolviendo correctamente 3 ejercicios

1.
Sea $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ base de un $\mathbb{R}$-espacio vectorial V.
Sea $g \in L(V)$ tal que $[g]_B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2k^2 - 4k & 4 - 2k - k^2 & 2k \end{bmatrix}$, donde $k \in \mathbb{R}$.

(**a**) Sabiendo que $rg([g]_B - 2I) < 3$, determine para qué valores de $k \in \mathbb{R}$, g resulta diagonalizable.

(**b**) En el caso $k = 0$, siendo $f = g^4 - bg^3 + 2id_V$, determine todos los $b \in \mathbb{R}$ tales que la dimensión de $Nu(f)$ es 1 y para cada caso, halle una base de $Im(f)$.

2. Sean $A = \begin{bmatrix} 0 & 15 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 1 & 4i \\ -4i & 1 \end{bmatrix}$.

(**a**) Pruebe que A y B sean semejantes.

(**b**) Halle una matriz simétrica H que sea semejante a A y tal que, para la forma cuadrática $Q(x) = x^T Hx$, sea $Q(1 - 2)^T < 0$

3. Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 2 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & \delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ con $\gamma, \delta > 0$

Halle todos los γ, δ tales que $4 \leq \|Ax\| \leq 12$ para todo x tal que $\|x\| = 3$.

4. Considere la matriz A del ejercicio anterior para $\gamma = 5$ y $\delta = 1$.

(**a**) Encuentre todos los $b \in \mathbb{R}^4$ para los cuales la solución por mínimos cuadrados de norma mínima del sistema $Ax = b$ resulta ser $X^+ = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 9 \end{bmatrix}^T$.

(**b**) Para los b hallados, encuentre todas las soluciones por cuadrados mínimos de $Ax = b$.

5. Sea A la matriz que representa, respecto de la base canónica de $\mathbb{R}^3$, a la rotación en $\frac{\pi}{4}$ con eje $v = (0\ 1\ 0)^T$. Resuelva el sistema $X' = A^4 X$.