FACULTAD DE INGENIERÍA - UBA ÁLGEBRA II *Segundo cuatrimestre 2008*

EXAMEN INTEGRADOR - TEMA 1
17 de diciembre 2008

EJERCICIO 1:

(a) Sea V el espacio vectorial real de las funciones $f:(-\infty,0)\cup(0,+\infty)\to\Re$ de clase C^∞ y sea $T:V\to V$ la transformación lineal dada por $T(f)(t)=tf'(t)-f(t)$. Determinar $f\in V$ tal que $T(f)=h$ y $f(1)=0$, donde $h(t)=t^3e^{-t^2}$. ¿Es única?

(b) Sea V el espacio vectorial real de las funciones $f:\Re\to\Re$ de clase C^∞ y 2π-periódicas. Sea $D:V\to V$ la transformación lineal dada por $D(f)=f'$. Determinar (si existen) autovalores y autovectores de D y de $D\circ D$.

EJERCICIO 2: Dados un entero positivo cualquiera n y una matriz tal que $A^2=I$ (= matriz identidad de orden n), sean $S=\{x\in\Re^n : Ax-x=0\}$ y $S'=\{x\in\Re^n : Ax+x=0\}$. Probar que $\Re^n=S\oplus S'$ y que A es diagonalizable en $\Re$.

EJERCICIO 3: Sea $P\in\Re^{2\times 2}$ la matriz de la proyección sobre $S=\{x\in\Re^2 : 2x_1+x_2=0\}$ y sea $A=\begin{bmatrix}6 & -2\\ -2 & 9\end{bmatrix}$. Determinar, si existen, $Max\{\|Px\|^2 : (Ax,x)=1\}$ y $Min\{\|Px\|^2 : (Ax,x)=1\}$ y los puntos donde se alcanzan estos valores.

EJERCICIO 4: Determinar todos los valores reales de r para los cuales todas las soluciones $X(t)=\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}$ del sistema $\begin{cases}x_1'(t)=r\,x_1(t)-2x_2(t)\\ x_2'(t)=2x_1(t)+r\,x_2(t)\end{cases}$ son acotadas, es decir: existe una constante K tal que $\forall\, t\in\Re : \|X(t)\|\le K$.

EJERCICIO 5: Sean $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & 1 & -2\\ 2 & -2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4 & 3\\ -3 & 4\end{bmatrix}$, con $\alpha\in\Re$, y $b=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\end{bmatrix}^t$. Halle, si existe, $\alpha\in(0,+\infty)$ para el cual $\hat{x}=\begin{bmatrix}\frac{4}{15} & \frac{1}{5}\end{bmatrix}^t$ es la solución de $Ax=b$ por cuadrados mínimos más próxima al origen.