11-12-13 

① Hallar la solución general de la ecuación diferencial para todo valor de $\alpha \in \mathbb{R}$

$$y'' + (\alpha - 1) y' - \alpha y = e^{-2x}$$

---

Busco solución de la ec. homogénea asociada:

$$y'' + (\alpha-1) y' - \alpha y = 0$$ , propongo $y = k_1 e^{rx}$ $k_1 \in \mathbb{R} \neq 0$

$$y' = k_1 r e^{rx}$$

$$y'' = k_1 r^2 e^{rx}$$

$\therefore$ $k_1 r^2 e^{rx} + (\alpha-1) k_1 r e^{rx} - \alpha k_1 e^{rx} =$

$$= \underbrace{k_1 e^{rx}}_{\neq 0} \underbrace{\left(r^2 + (\alpha-1) r - \alpha\right)} = 0$$

Polinomio característico : $p(r) = \overset{a}{r^2} + \overbrace{(\alpha-1)}^{b} r \overset{c}{-\alpha} = 0$

busco sus raíces: $r = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \dfrac{-(\alpha-1) \pm \sqrt{(\alpha-1)^2 - 4.1.(-\alpha)}}{2.1} =$

$$= \frac{(-\alpha+1) \pm \sqrt{\alpha^2 - 2\alpha + 1 + 4\alpha}}{2} = \frac{(-\alpha+1) \pm \sqrt{\alpha^2 + 2\alpha + 1}}{2} =$$

$$= \frac{(-\alpha+1) \pm \sqrt{(\alpha+1)^2}}{2} = \frac{(-\alpha+1) \pm (\alpha+1)}{2}$$

$$r_1 = \frac{-\alpha + 1 + \alpha + 1}{2} = \frac{2}{2} \rightarrow \boxed{r_1 = 1}$$

$$r_2 = \frac{-\alpha + 1 - \alpha - 1}{2} = \frac{-2\alpha}{2} \rightarrow \boxed{r_2 = -\alpha}$$

tengo, entonces, 3 casos a analizar:

1) $r_1 = r_2 \rightarrow \underline{\alpha = -1}$

2) $r_1 \neq r_2$ con $r_2 = -2 \rightarrow \underline{\alpha = 2}$ (dado que la ec. dif. [illegible] $e^{\overline{-2}x}$)

3) $r_1 \neq r_2$ con $r_2 \neq -2 \rightarrow \underline{\alpha \neq 2} \wedge \underline{\alpha \neq -1} \rightarrow \alpha \in \mathbb{R} - \{-1, 2\}$

cont. 1)

1) $\boxed{\alpha = -1} \rightarrow y'' - 2y' + y = e^{-2x}$ $\rightarrow r_1 = r_2 = 1$

$k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{R}$

$\underline{y_H = k_1 e^x + k_2 x e^x}$ $\rightsquigarrow S_H = \{e^x, xe^x\}$

$y_P = k_3 e^{-2x}$ $y_P \notin S_H$ ✓

$y_P' = -2k_3 e^{-2x}$

$y_P'' = 4k_3 e^{-2x}$

$y_P'' - 2y_P' + y_P = e^{-2x} \rightarrow 4k_3 e^{-2x} - 2(-2k_3 e^{-2x}) + k_3 e^{-2x} = e^{-2x}$

$k_3 \overbrace{e^{-2x}}^{\neq 0} (4 + 4 + 1) = \overbrace{e^{-2x}}^{\neq 0}$

$9k_3 = 1 \rightarrow \boxed{k_3 = \frac{1}{9}}$

$\underline{y_P = \frac{1}{9} e^{-2x}}$

$y_G = y_H + y_P$

$\therefore \boxed{\alpha = -1} \rightarrow \boxed{y_G(x) = k_1 e^x + k_2 x e^x + \frac{1}{9} e^{-2x}}$

$(k_1, k_2, \cancel{k_3} \in \mathbb{R})$

2) $\boxed{\alpha = 2} \rightarrow y'' + y' - 2y = e^{-2x} \rightarrow r_1 = 1 \quad , r_2 = -2$

$k_1, k_2 \in \mathbb{R}$

$\underline{y_H = k_1 e^{x} + k_2 e^{-2x}} \rightarrow S_H = \{e^{x}, e^{-2x}\}$

Soluc. part.

$y_p = k_3 \, x \, e^{-2x} \rightarrow y_p \notin S_H$ ✓ $\quad k_3 \in \mathbb{R}$

$y'_p = k_3 \left(e^{-2x} - 2x e^{-2x}\right) = k_3 e^{-2x}(1 - 2x)$

$y''_p = k_3 \left[-2 e^{-2x} - 2\left(e^{-2x} - 2x e^{-2x}\right)\right] = k_3 e^{-2x}(-4 + 4x)$

$\therefore \; y''_p + y'_p - 2y_p = e^{-2x} : \; k_3 e^{-2x}(-4 + 4x) + k_3 e^{-2x}(1 - 2x) - 2 k_3 x e^{-2x} =$

$= k_3 \overbrace{e^{-2x}}^{\neq 0} (-4 + \cancel{4x} + 1 - \cancel{2x} - \cancel{2x}) = \overbrace{e^{-2x}}^{\neq 0}$

$k_3 (-3) = 1 \rightarrow \boxed{k_3 = -\frac{1}{3}}$

$\rightarrow \underline{y_p = -\frac{1}{3} x e^{-2x}}$

$y_G = y_H + y_p$

$\boxed{\alpha = 2} \rightarrow \boxed{y_G = k_1 e^{x} + k_2 e^{-2x} - \frac{1}{3} x e^{-2x}} \quad (k_1, k_2 \in \mathbb{R})$

ej 1 cont

3) $\boxed{\alpha \neq -1 \ \wedge \ \alpha \neq 2} \rightarrow y'' + (\alpha - 1) y' - \alpha y = e^{-2x}$

$\hookrightarrow r_1 = 1 \ , r_2 = -\alpha$

$(\alpha \in \mathbb{R} , \ \alpha \neq 2)$

$y_H = k_1 \, e^{x} + k_2 \, e^{-\alpha x}$

$k_1, k_2 \in \mathbb{R}$

$\rightarrow S_H = \{ e^{x} , e^{-\alpha x} \}$

Soluc. part.: $y_p = k_3 \, e^{-2x} \rightarrow y_p \notin S_H$ pues $\alpha \neq 2$

$k_3 \in \mathbb{R}$

$y'_p = k_3 (-2 \, e^{-2x})$

$y''_p = k_3 (4 \, e^{-2x})$

$\therefore y'' + (\alpha - 1) y' - \alpha y = e^{-2x} \rightarrow k_3 (4 e^{-2x}) + (\alpha - 1) k_3 (-2 \, e^{-2x}) - \alpha k_3 e^{-2x} = e^{-2x}$

$k_3 \, \overbrace{e^{-2x}}^{\neq 0} (4 - 2\alpha + 2 - \alpha) = \overbrace{e^{-2x}}^{\neq 0}$

$k_3 \, (6 - 3\alpha) = 1 \xrightarrow{\alpha \neq 2 \Rightarrow 6 - 3\alpha \neq 0} \boxed{k_3 = \frac{1}{6 - 3\alpha}}$

$y_p = \frac{1}{6 - 3\alpha} \, e^{-2x}$

$y_G = y_H + y_p$

$\boxed{\alpha \in \mathbb{R} - \{-1, 2\}} \rightarrow \boxed{y_G(x) = k_1 e^{x} + k_2 \, e^{-\alpha x} + \frac{1}{6 - 3\alpha} \, e^{-2x}}$

$k_1, k_2 \in \mathbb{R}$

11-12-13 Hoja 5

② Verdadero o Falso:

(las matrices de los enunciados se suponen cuadradas y complejas)

ⓐ Si $A^2$ es dgz. entonces A es dgz. F

Sea $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \underbrace{A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\lambda = 0 \text{ doble y } \dim(S_0) = 2 \ \rightarrow A^2 \text{ es dgz}}$ $\lambda$ = autovalor

$\lambda = 0$ doble, pero $\dim(S_0) = 1 \rightarrow$ A NO es dgz

ⓑ Si $A \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ tiene determinante nulo y traza no nula, entonces es dgz. V

$\det(A) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 = 0 \rightarrow \lambda_1 = 0 \lor \lambda_2 = 0$

$tr(A) = \lambda_1 + \lambda_2 \neq 0$, supongo $\lambda_1 = 0 \rightarrow \lambda_1 + \lambda_2 \neq 0 \rightarrow \lambda_2 \neq 0$

$\therefore \lambda_1 = 0$, $\lambda_2 \neq 0 \rightarrow$ 2 autovalores $\neq \rightarrow$ A es dgz pues

$\lambda_1 \neq \lambda_2 \rightarrow \underbrace{S_{\lambda_1} \text{ es li con } S_{\lambda_2}}_{\text{forman base de autovectores}}$

ⓒ Si A y B son dgz, entonces A+B es dgz F

Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ , $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ | $A + B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\lambda_1 = 1 \rightarrow S_1 = gen\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$ | $\lambda_1 = 1 \rightarrow S_1 = gen\left\{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$ | $\lambda_1 = 1 \rightarrow$ autovalor doble

$\lambda_2 = 0 \rightarrow S_0 = gen\left\{\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$ | $\lambda_2 = 0 \rightarrow S_0 = gen\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$ | pero $\dim(S_1) = 1$

dgz | dgz | $\therefore$ No es dgz

pues $\underbrace{ma(1)}_{2} \neq \underbrace{mg(1)}_{1}$

$\left.\begin{array}{l}\det(A) = 0 \\ tr(A) \neq 0\end{array}\right\}$ demostrado en b) que es dgz

$\left.\begin{array}{l}\det(B) = 0 \\ tr(B) \neq 0\end{array}\right\} \rightarrow$ dgz (demostrado en b))

③ Dada $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tq. $f(x) = (x_1 - x_2)^2 + 2x_3^2$, calcular los extremos condicionados $\text{Máx}\{f(x) : \|x\| = 2\}$ y $\text{Min}\{f(x) : \|x\| = 2\}$ y los puntos donde $f$ toma esos valores.

---

Desarrollo el cuadrado y lo analizo matricialmente:

$$f(x) = x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 + 2x_3^2 = x^t \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}}_{A} x$$

Como $A$ es una matriz simétrica puedo decir que $f$ es una Función Cuadrática (F.C) y puedo diagonalizarla, obteniendo sus autovalores, para poder realizar un cambio de variable.

$A = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 \end{array}\right]$ la analizo por bloques: $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ y $A_2 = [2]$

$A_1 = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}}$ $\Rightarrow$ $\begin{array}{l} \bullet \det(A) = 0 = \lambda_1 \lambda_2 \to \lambda_1 = 0 \vee \lambda_2 = 0 \\ \bullet\bullet\, tr(A) = 2 = \lambda_1 + \lambda_2 \quad \bullet \text{ y } \bullet\bullet \to \lambda_1 = 0 \to \lambda_2 = 2 \end{array} \Bigg\}$ $S^*_0 = \text{gen}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\} \to v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$S^*_2 = \text{gen}\left\{\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\} \to v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$A_1$ simétrica $\to \lambda_1 \neq \lambda_2 \to S^*_{\lambda_1} \perp S^*_{\lambda_2} \longrightarrow$

$v_1$ autovector de $A$ asoc. a $\lambda = 0$
$v_2$ " " " a $\lambda = 2$

$A_2 = 2 \Rightarrow \lambda = 2 \Rightarrow v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \therefore \lambda = 2$ es autovalor doble de $A$

$v_3$ también es autovector asoc. a $\lambda = 2$

$$S_0 = \text{gen}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}, \quad S_2 = \text{gen}\left\{\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$$

Como $A$ es una matriz simétrica, la puedo diag ortogonalmente, para eso busco una base O.N. de autovectores y su $D$ asoc.

$\underbrace{A = PDP^t}_{D = P^tAP}$ donde $P = \begin{bmatrix} 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ y $D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

hago el cambio de variables con $x = Py$

$$f(x) = x^t A x \overset{x = Py}{=} \tilde{f}(y) = \overbrace{y^t P^t}^{(Py)^t} \underbrace{A}_{D} P y = y^t D y = 2y_1^2 + 2y_2^2$$

$$\|x\| = \|Py\| = \|y\| \Rightarrow \tilde{f}(y) = f(x)$$

ej. 3 cont.

Por la desigualdad de Rayleigh:

$$\underbrace{\|x\|=\|y\|}_{\|x\|^2=\|y\|^2}$$

$$\underbrace{\underbrace{\lambda_{min}}_{0}\ \underbrace{\|y\|^2}_{2^2}}_{0} \leq \tilde{f}(y) \leq \underbrace{\lambda_{máx}}_{2}\ \underbrace{\|y\|^2}_{2^2}$$

$$\tilde{f}(y)=f(x)$$

$$\boxed{0 \leq f(x) \leq 8}$$

$$\max_{\|x\|=2} f(x) = \max_{\|y\|=2} \tilde{f}(y) = 8 \rightarrow \underbrace{y_{máx} = a\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} + b\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\ a^2+b^2=4}$$

$x=Py$

$$\boxed{x_{máx} = a\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} + b\begin{bmatrix}-1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\\0\end{bmatrix},\ a^2+b^2=4}$$

$$\min_{\|x\|=2} f(x) = \min_{\|y\|=2} \tilde{f}(y) = 0 \rightarrow \underbrace{y_{min} = \pm \overset{\|y\|=2}{2}\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}}$$

$$\boxed{x_{min} = \pm 2\begin{bmatrix}1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\\0\end{bmatrix}}$$

(4) Considerando el p.i.c. en $\mathbb{R}^3$, sea $M \in \mathbb{R}^{3\times3}$ la matriz de la reflexión respecto $S = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 + 2x_2 - x_3 = 0\}$ y sea $p = \begin{bmatrix}1\\1\\3\end{bmatrix}$. Calcular la soluc. del sistema $X'(t) = MX(t) + p$ que verifica $X(0) = \begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix}$

---

Busco generadores de $S$ y de $S^\perp$:

$S^\perp = \text{gen}\left\{\begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix}\right\}$ $\qquad S = \text{gen}\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix}\right\}$

Sea $B = \left\{\underset{v_1}{\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}}, \underset{v_2}{\begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix}}, \underset{v_3}{\begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix}}\right\}$ base de $\mathbb{R}^3$ y de autovectores

$T(v_1) = v_1$, $T(v_2) = v_2$, $T(v_3) = -v_3$ $\rightsquigarrow A = [T]_B = \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{bmatrix}$ $\qquad A \sim M$, $A \to [T]_B$, $M \to [T]_E$

Solución del sist. homogéneo asociado:

$$X_H(t) = k_1 e^t \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix} + k_2 e^t \begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix} + k_3 e^{-t}\begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix} \qquad k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{R}$$

$p = \begin{bmatrix}1\\1\\3\end{bmatrix}$, $[p]_B = \begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}_B = \begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}$ coord. de $p$ en base $B$

$p$ está expresado en base canónica

Soluc. part. $x_p = \begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix} \to x'_p = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$ $\rightsquigarrow \begin{cases}x'_1 = x_1 + 2\\ x'_2 = x_2 + 1\\ x'_3 = -x_3 + 0\end{cases} \rightsquigarrow \begin{matrix}x'_1 - x_1 = 2\\ x'_2 - x_2 = 1\\ x'_3 + x_3 = 0\end{matrix} \to \begin{matrix}-a = 2\\ -b = 1\\ c = 0\end{matrix} \to \begin{cases}a = -2\\ b = -1\\ c = 0\end{cases}$

la solución particular en coord. de $B$: $(x_p)_B = \begin{bmatrix}-2\\-1\\0\end{bmatrix} \rightsquigarrow x_p = \begin{bmatrix}-1\\-1\\-3\end{bmatrix}$

$$X_G = X_H + X_p = k_1 e^t \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + k_2 e^t \begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix} + k_3 e^{-t}\begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-1\\-1\\-3\end{bmatrix}$$

4 cont|

hoja 9

$$X_{(0)} = k_1 \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix} + k_3 \begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-1\\-1\\-3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{cases} k_1 - k_2 + k_3 = 2 & (1) \rightarrow k_1 = 2 + k_2 - k_3 \\ k_2 + 2k_3 = 3 & (2) \rightarrow k_2 = 3 - 2k_3 \\ k_1 + k_2 - k_3 = 2 & (3) \rightarrow k_1 = 2 - k_2 + k_3 \end{cases}$$

(2) $k_2 = 3 - 2k_3 \rightarrow k_2 = 3 - 2k_2 \rightarrow 3k_2 = 3 \rightarrow \boxed{k_2 = 1}$

(1) y (3) $2 + k_2 - k_3 = \cancel{2} - k_2 + k_3$

$2k_2 = 2k_3 \rightarrow k_2 = k_3$

$k_2 = k_3$

$\boxed{k_3 = 1}$

$k_1 = 2 + 1 - 1 \rightarrow \boxed{k_1 = 2}$

$\therefore$

$$\boxed{X_{G(t)} = 2e^t \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix} + e^t \begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix} + e^{-t} \begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-1\\-1\\-3\end{bmatrix}}$$

(5) Sea $A = QB$ donde $Q \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ es una matriz ortogonal y

$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$. Calcular los valores singulares de $A^t$ y hallar bases ortonormales de $Fil(A)$ y $Nul(A)$

---

Para buscar valores singulares de $A$, busco autovalores de $A^tA$

Para buscar valores singulares de $A^t$ busco autovalores de $AA^t$

$A.A^t = \underbrace{Q}_{\text{ortogonal}} B \overbrace{B^t Q^t}^{A^t} \rightsquigarrow AA^t \sim BB^t$ por lo tanto tienen los mismos autovalores $\rightarrow$ mismos valores singulares

Busco v.s. de $BB^t$

$B.B^t = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \lambda_1 = 3 \rightsquigarrow S_3 = gen\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$

$tr(BB^t) = \lambda_1 + \lambda_2 = 4 \rightarrow \lambda_2 = 1 \quad S_1 = gen\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}\right\}$

$BB^t$ es simétrica $\rightarrow \lambda_1 \neq \lambda_2 \rightarrow S_{\lambda_1} \perp S_{\lambda_2}$

$\left.\begin{array}{l} \lambda_1 = 3 \rightarrow \sigma_1 = \sqrt{3} \\ \lambda_2 = 1 \rightarrow \sigma_2 = 1 \end{array}\right\}$ $\boxed{\text{Valores singulares de } A^t: \ \sigma_1 = \sqrt{3}, \ \sigma_2 = 1}$

Para hallar BON $Fil(A)$ y BON $Nul(A)$ hago una descomposición en valores singulares de $A$ y para ello necesito trabajar sobre $A^tA$

$A^tA = (QB)^t QB = B^t \underbrace{Q^t Q}_{I} B = B^t B \rightsquigarrow A^tA = B^tB \therefore A$ y $B$ tienen la misma DVS

$A = QB = Q.\underbrace{U\Sigma V^t}_{dvs\ de\ B}$

$B^tB = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{array}{l} \lambda_1 = 3 \\ \lambda_2 = 1 \\ \lambda_3 = 0 \end{array} \quad S_3 = gen\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}\right\}, \ S_1 = gen\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}, \ S_0 = gen\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$

$\therefore \Sigma = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad V = \left[\begin{array}{cc:c} 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \\ -2/\sqrt{6} & 0 & 1/\sqrt{3} \end{array}\right]$

$\underbrace{\qquad\qquad}_{BON(Fil(B))} \quad \underbrace{\qquad}_{BON(Nul(B))}$

Como piden BON Fil(A) y BON(Nul(A)) y esos son datos que puedo extraer de V, no es necesario hallar U (o sea, la DVS completa)

$$A = QB = Q.\ U\ \Sigma\ V^t =$$

$$= Q.U.\begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ \hline 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \end{bmatrix} \begin{matrix} \left.\right\} \text{BON Fil(A)} \\ \left.\right\} \text{BON Nul(A)} \end{matrix}$$

BON Fil(A) = BON Fil(B)
BON Nul(A) = BON Nul(B) } A y B tienen la misma DVS (pues $A^tA = B^tB$)

$$\boxed{\text{BON Fil(A)} = \left\{ \begin{bmatrix} 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ -2/\sqrt{6} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix} \right\}}$$

$$\boxed{\text{BON Nul(A)} = \left\{ \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{bmatrix} \right\}}$$