***FACULTAD DE INGENIERÍA - UBA*** ÁLGEBRA II *Segundo cuatrimestre 2013*

**RESOLUCIÓN EXAMEN INTEGRADOR - TEMA 2**

11 de diciembre 2013

***Aclaración: El alumno debe tener presente que siempre hay más de una forma correcta de resolver un ejercicio. Las resoluciones aquí presentadas son algunas de las tantas posibles.***

-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

**EJERCICIO 1:** Hallar la solución general de la ecuación diferencial para todo valor de  .

**RESOLUCIÓN 1:**

****



La solución de la homogénea asociada es:

 

Siendo  dos constantes arbitrarias.

La solución particular:



-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

**EJERCICIO 2:** Verdadero o falso:

(Las matrices de los enunciados se suponen cuadradas y complejas)

**(a)** Si  es diagonalizable, entonces *A* es diagonalizable.

**(b)** Si  tiene determinante nulo y traza no nula, entonces es diagonalizable.

**(c)** Si *A* y *B* son diagonalizables, entonces *A+B* es diagonalizable.

**RESOLUCIÓN:**

**(a) Falso:** la matriz  no es diagonalizable (su único autovalor es 0, con multiplicidad algebraica 2; si fuera diagonalizable, sería nula) y  es diagonal. Otro contraejemplo: 

**(b) Verdadero:** El determinante de *A* es el producto de sus autovalores y la traza la suma de los mismos. Por lo tanto uno de los autovalores de *A* es nulo y el otro es no nulo. Entonces, *A* tiene dos autovalores distintos.

**(c) Falso:**  y  son diagonalizables y sin embargo la suma  no es diagonalizable. *Comprobaciones*: *A* tiene dos autovalores distintos (0 y 1) y por lo tanto es diagonalizable; la diagonalizabilidad de *B* no requiere demasiados comentarios …; que *A + B* no es diagonalizable es consecuencia de que su único autovalor es 0 con multiplicidad algebraica 2, por lo tanto si fuera diagonalizable sería la matriz nula.

**----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------**

**EJERCICIO 3:** Dada  tal que , calcular los extremos condicionados  y  y los puntos donde *f* toma estos valores.

**RESOLUCIÓN 3**: Dado que , la matriz simétrica asociada a esta forma cuadrática dada es  . Los autovalores y correspondientes autovectores se calculan fácilmente:

,  , 

Por lo tanto, el subespacio propio de *A* asociado al autovalor 2 tiene dimensión 2 y admite como base ortonormal  , ; el subespacio propio de *A* asociado al autovalor 0 tiene dimensión 1 y está generado por el versor . Por lo tanto, las desigualdades de Rayleigh son en este caso  y se tiene:

 y este valor *f* lo alcanza en los infinitos vectores

  , 

 y este valor *f* lo alcanza en los vectores

  , .

***Observación* 1**: Es obvio que para todo  se verifica que . Además, también es obvio que  sii , es decir sii *x* es de la forma

 

para algún *a* real. De éstos vectores, los de norma 2 son exactamente  y .

***Observación* 2** (Otra forma de resolución): Expresando  en términos de la base ortonormal  , , , es decir: , se tiene por un lado que  (pues la base es ortonormal), y por otro lado

 

Por lo tanto, si :

(1)  y es = 8 sii *c* = 0, es decir si , donde .

(2)  y es = 0 sii , donde .

----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

**EJERCICIO 4**: Considerando el producto interno canónico en , sea  la matriz de la reflexión respecto  y sea . Calcular la solución del sistema  que verifica *.*

**RESOLUCIÓN**: El complemento ortogonal de *S* está generado por  y *S* está generado por  y . Por lo tanto, *Mu = -u*, *Mv = v*  y *Mw = w*. Por otra parte:. Ahora, dado , se tiene entonces



para algunas constantes *a*, *b* y *c*. Ahora,

 .

Por lo tanto, la (único) solución buscada es

 

**----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------**

**EJERCICIO 5**: Sea *A = QB*, donde  es una matriz ortogonal y . Calcular los valores singulares de  y hallar bases ortonormales de *Fil*(*A*) y *Nul*(*A*).

**RESOLUCIÓN 5**: Los valores singulares de  son las raíces positivas de los autovalores de . Puesto que *Q* es ortogonal (), los autovalores de  son los mismos autovalores de la matriz , es decir, las raíces de . Entonces, los valores singulares de  son . Respecto de *Nul*(*A*), por ser *Q* inversible es *Nul*(*A*) = *Nul*(*B*) y resulta inmediatamente que  . Finalmente, puesto que , resulta .

-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------