Transformaciones Lineales

by gira

10/10/2009

1. Definición

Sean V y W dos espacios vectoriales, entonces la función $T : V \to W$ es una transformación lineal si verifica:

$a_1)$ $T(u+v) = T(u) + T(v) \;\; \forall\, u, v \in V$

$a_2)$ $T(\alpha u) = \alpha T(u) \;\; \forall\, u \in V \wedge \forall\, \alpha \in \Bbbk$

Propiedades:

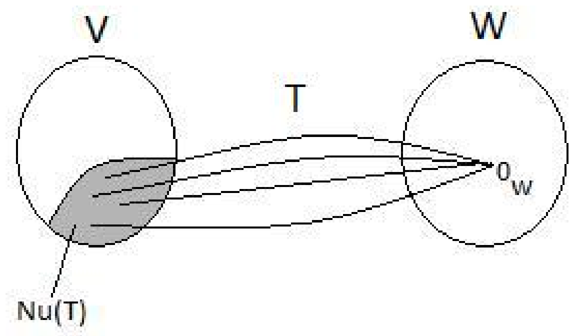
(i) $T(0_V) = 0_W$

(ii) $T\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i T(v_i)$ *(Linealidad)*

2. Núcleo

$Nu(T) = \{v \in V \;/\; T(v) = 0_W\}$

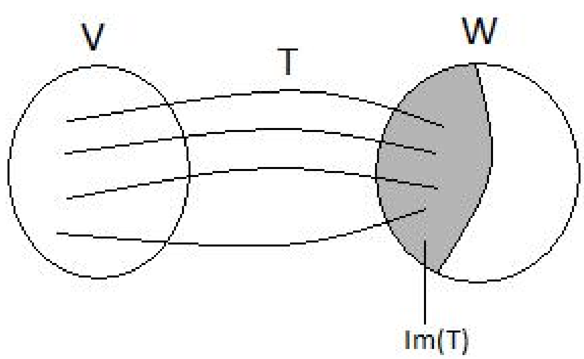
$Nu(T)$ es subespacio de V.



3. Imagen

$\text{Im}(T) = \{w \in W \ / \ w = T(v), \text{ con } v \in V\}$

$\text{Im}(T)$ es subespacio de W.



4. Teorema de la Dimensión

Sea $T : V \to W$, $\dim(V) = n$ (finita), entonces:

$\dim(Nu(T)) + \dim(\text{Im}(T)) = \dim(V) = n$

Propiedades:

Sea $T : V \to W$, TL (otra notación es $T \in \mathcal{L}(V, W)$) :

- Si $\{v_1, v_2, ...v_q\}$ genera $V \Longrightarrow \{T(v_1), T(v_2), ...T(v_q)\}$ genera $\text{Im}(T)$

Obs. 1: $T(v_1), T\left(v_2\right), ...T\left(v_q\right) \in \operatorname{Im}(T)$

Obs. 2: Cualquier $w \in \operatorname{Im}(T)$ puede expresarse como combinación lineal de $T(v_1), T\left(v_2\right), ...T\left(v_q\right)$

- $\{T(v_1), T\left(v_2\right), ...T\left(v_q\right)\}$ es LI $\implies$ $\{v_1, v_2, ...v_q\}$ es LI

5. Clasificación

Sea $T \in \mathcal{L}(V, W)$ TL :

$-$ T es *inyectiva* (monomorfismo) si verifica: $v_1 \neq v_2 \implies T(v_1) \neq T(v_2)$

$-$ T es *sobreyectiva* (epimorfismo) $\iff \operatorname{Im}(T) = W$

$-$ T es *biyectiva* (isomorfismo) $\iff$ T es inyectiva y sobreyectiva

Propiedades:

- T es monomorfismo $\iff$ $Nu(T) = \{0_V\}$
- Si T es monomorfismo $\implies$ $\dim(V) \leq \dim(W)$
- Si T es monomorfismo y $\{v_1, v_2, ...v_q\} \subset V$ es LI $\implies$ $\{T(v_1), T\left(v_2\right), ...T\left(v_q\right)\}$ es LI
- Si T es epiomorfismo $\implies$ $\dim(W) \leq \dim(V)$
- Si T es isomorfismo $\implies$ $\dim(W) = \dim(V)$
- Si V y W son de dimensión **finita** entonces T es isomorfismo $\iff$ $\dim(W) = \dim(V)$
- Si T es isomorfismo $\implies$ $\exists\, T^{-1} : W \to V$ (Transformación Inversa)

6. Transformaciones Matriciales

Una transformación matricial es del tipo: $T : \mathbb{k}^n \to \mathbb{k}^m$, $T(x) = Ax$, $A \in \mathbb{k}^{mxn}$

Veamos un par de propiedades:

- $x \in Nu(T) \iff T(x) = 0 \iff Ax = 0 \iff x \in Nul(A)$
- $y \in \mathrm{Im}(T) \iff T(x) = y \iff Ax = y \iff y \in Col(A)$

De aquí deducimos que para las transformaciones matriciales se cumple que:

$\underline{Nu(T) = Nul(A)}$

$\underline{\mathrm{Im}(T) = Col(A)}$

Ahora, aplicando el *teorema de la dimensión*:

$\underline{\dim(Nul(A)) + \dim(Col(A)) = \dim(\mathbb{k}^n) = n}$

Obs. 1: $\dim(Col(A))$ es el llamado *rango de* $A \implies \dim(Nul(A)) = n - rg(A)$

Obs. 2: n es el número de columnas de A

7. Teorema Fundamental de las Transformaciones Lineales (TFTL)

Sea $B = \{v_1, v_2, ...v_n\}$ base de V y

$w_1, w_2, ..., w_n$ vectores de W (iguales o distintos)

entonces, existe una **única** Transformación Lineal $T : V \to W$ tal que:

$$\left\{\begin{array}{c} T(v_1) = w_1 \\ T(v_2) = w_2 \\ \vdots \\ T(v_n) = w_n \end{array}\right. \qquad \left|\quad \begin{array}{l} \bullet \text{ Existencia de T} \\ \bullet \text{ Linealidad de T} \\ \bullet \text{ Unicidad de T} \end{array}\right.$$

8. Composicion de Transformaciones Lineales

Sean las transformaciones Lineales:

$F : U \to V$

$G : V \to W$

entonces la composición $G \ o \ F : U \to W$ es transformación lineal, tal que

$G \ o \ F \ (u) = G(F(u)) \quad \forall \ u \in U$

Propiedades:

- $Nu(F) \subseteq Nu(G \ o \ F)$
- $Nu(F) = Nu(G \ o \ F) \iff G$ es monomorfismo (inyectiva) $\iff Nu(G) = \{0_V\}$

9. Transformación Inversa

Sea $T : V \to W$ isomorfismo $\Longrightarrow \exists \ T^{-1} : W \to V \ / \ T^{-1}(w) = v \iff T(v) = w$

Propiedades:

- T^{-1} es una TL biyectiva
- $T^{-1} \ o \ T = Id_V \qquad (T^{-1} o T(v) = v)$
- $T \ o \ T^{-1} = Id_W \qquad (T^{-1} o T(w) = w)$

10. Matriz asociada a una Transformación Lineal

Sea $T : V \to W$ TL

$B = \{v_1, v_2, ...v_n\}$ base de V

$B = \{w_1, w_2, ...w_m\}$ base de W

$$[T]_{BB'} = \begin{bmatrix} | & | & | \\ C_{B'}(T(v_1)) & C_{B'}(T(v_2)) ...... & C_{B'}(T(v_n)) \\ | & | & | \end{bmatrix} \in \mathbb{k}^{mxn}$$

es la matriz asociada a T.

$[T]_{BB'} \, , C_B(v) = C_{B'}(T(v))$

$V \xrightarrow{T} W$

$v \xrightarrow{T} T(v) = w$

$C_B(v) \overset{[T]_{BB'}}{\longrightarrow} C_{B'}(T(v)) = C_{B'}(w)$

Propiedades:

• Si T es isomorfismo $\implies \exists\ [T^{-1}]_{BB'} = [T]_{BB'}^{-1}$

• $T : V \to W$ TL,

B base de V

C base de W

$\cdot\ v \in Nu(T) \iff C_B(v) \in Nul([T]_{BC})$

$\cdot\ v \in \operatorname{Im}(T) \iff C_C(T(v)) \in Col([T]_{BC})$

$\cdot\ rg([T]_{BC}) = \dim(\operatorname{Im}(T))$

$\cdot \begin{cases} B' \text{ base de } V \\ C' \text{ base de } W \end{cases} \implies rg([T]_{BC}) = rg([T]_{B'C'})$

• $T : V \to W$ TL,

B y D bases de V

$B\prime$ y $D\prime$ bases de W

$A = [T]_{BB'}$

$M = [T]_{DD'}$

$\implies [T]_{DD'} = \mathbf{C}_{B'D'}\,[T]_{BB'}\,\mathbf{C}_{DB}$

$$\begin{array}{ccc} C_B(v) & \xrightarrow{A} & C_{B'}(T(v)) \\ C_{BD} \uparrow & & \downarrow C_{B'D'} \\ C_D(v) & \xrightarrow{M} & C_{D'}(T(v)) \end{array}$$

(Cuadrito didáctico)