FACULTAD DE INGENIERIA-UBA

ALGEBRA II. Primer cuatrimestre de 2013

EXAMEN PARCIAL - 15 de junio de 2013(Segunda oportunidad)

TEMA 1

Apellido y nombres:............
Número de padrón: .... Curso:.........

Justifique todas las respuestas. Numere las hojas y firme al final del examen.
El examen se aprueba resolviendo correctamente 3 ejercicios

1.

(**a**) Probar que existe una única transformación lineal $f : P_2 \to \mathbb{R}^3$ tal que:

$$f(1+t) = (3\ 1\ 0)^T, \qquad f(t+t^2) = (1\ 2\ 1)^T, \qquad f(t) = (2\ 1\ 0)^T.$$

Calcular $f(5+6t-3t^2)$

(**b**) Probar que la transformación lineal definida en el item anterior es biyectiva y calcular la matriz de f^{-1} respecto de las bases canónicas de $\mathbb{R}^3$ y P_2.

2. Consideremos el producto interno canónico en $\mathbb{R}^n$.

(**a**) Hallar la matriz de proyección sobre $Fil(A)$ para una matriz $A \in \mathbb{R}^{2\times 3}$ tal que
$$A^T A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(**b**) Hallar la matriz de proyección $P \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ que verifica $P(1\ 2\ -1\ 2)^T = (2\ 1\ 0\ 1)^T$ y $P(-1\ 1\ 1\ -1)^T = (-1\ 0\ 1\ 0)^T$.

3. Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ tal que $Fil(A)^\perp = \{x \in \mathbb{R}^3 /\ x_1 + x_2 - x_3 = 0;\ 2x_1 + x_3 = 0\}$. Sabiendo que $P_{Col(A)}(1\ 0\ 1)^t = 3col_1 + 2col_2 - col_3$ (donde col_i indica la i-ésima columna de A), hallar las soluciones por cuadrados mínimos de $Ax = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

4. Consideremos en P_2 el producto interno $(p,q) = p(0)q(0) + p(1)q(1) + p(-1)q(-1)$ y la transformación lineal $T : P_2 \to P_2$ dada por

$$(T(p))(t) = (p(0) - p'(0))(t^2+1).$$

Dado $q(t) = 3t+1$, hallar todos los $p \in P_2$ para los cuales la distancia entre $T(p)$ y q es mínima.

5. Sean $\mathbb{V}$ un espacio vectorial real con producto interno $(\cdot,\cdot)$ y $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ una base de $\mathbb{V}$ tal que $\{v_1, v_1 - v_2, v_1 + v_2 - v_3\}$ es una base ortonormal de $\mathbb{V}$. Dado $S = gen\{v_1, v_1 + v_3\}$, hallar todos los $v \in \mathbb{V}$ tales que $\|P_{S^\perp}(v)\| = \|v\| = 1$.

FACULTAD DE INGENIERIA-UBA

ALGEBRA II. Primer cuatrimestre de 2013

EXAMEN PARCIAL - 15 de junio de 2013(Segunda oportunidad)

TEMA 2

Apellido y nombres:............
Número de padrón: .... Curso:.........

Justifique todas las respuestas. Numere las hojas y firme al final del examen.
El examen se aprueba resolviendo correctamente 3 ejercicios

1.

(**a**) Probar que existe una única transformación lineal $f : P_2 \to \mathbb{R}^3$ tal que:

$$f(1+t^2) = (1\ 3\ 0)^T, \qquad f(t+t^2) = (2\ 1\ 1)^T, \qquad f(t^2) = (1\ 2\ 0)^T.$$

Calcular $f(3-5t+4t^2)$

(**b**) Probar que la transformación lineal definida en el item anterior es biyectiva y calcular la matriz de f^{-1} respecto de las bases canónicas de $\mathbb{R}^3$ y P_2.

2. Consideremos el producto interno canónico en $\mathbb{R}^n$.

(**a**) Hallar la matriz de proyección sobre $Fil(A)$ para una matriz $A \in \mathbb{R}^{2\times 3}$ tal que

$$A^T A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(**b**) Hallar la matriz de proyección $P \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ que verifica $P(-1\ 0\ 1\ 2)^T = (-1\ -1\ 1\ 1)^T$ y $P(3\ 0\ -1\ 0)^T = (2\ 1\ 0\ -1)^T$.

3. Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ tal que $Fil(A)^\perp = \{x \in \mathbb{R}^3 / \ x_1 - x_2 + x_3 = 0;\ x_1 + 2x_2 = 0\}$. Sabiendo que $P_{Col(A)}(0\ 1\ 1)^t = 5col_1 - col_2 + 4col_3$ (donde col_i indica la i-ésima columna de A), hallar las soluciones por cuadrados mínimos de $Ax = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

4. Consideremos en P_2 el producto interno $(p,q) = p(0)q(0) + p(1)q(1) + p(-1)q(-1)$ y la transformación lineal $T : P_2 \to P_2$ dada por

$$(T(p))(t) = (p(1) - p'(1))(t^2+1).$$

Dado $q(t) = t+3$, hallar todos los $p \in P_2$ para los cuales la distancia entre $T(p)$ y q es mínima.

5. Sean $\mathbb{V}$ un espacio vectorial real con producto interno $(\cdot,\cdot)$ y $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ una base de $\mathbb{V}$ tal que $\{v_2, v_2 - v_3, v_2 + v_3 - v_1\}$ es una base ortonormal de $\mathbb{V}$. Dado $S = gen\{v_2, v_1 + v_2\}$, hallar todos los $v \in \mathbb{V}$ tales que $\|P_{S^\perp}(v)\| = \|v\| = 1$.