MATEMÁTICA DISCRETA

Índice

Unidad 1: Lógica y teoría de conjuntos

1. Definiciones

Lógica: estudio de las formas correctas de pensar o razonar.
Proposición: afirmación que es verdadera o falsa, pero no ambas.
Proposición primitiva: proposición que no se puede descomponer en otras dos o más proposiciones. Siempre son afirmativas.
Proposición compuesta: proposición formada por dos o más proposiciones relacionadas mediante conectivas lógicas.
Tablas de verdad:

p	q	$\neg p$ (NOT)	$p \wedge q$ (AND)	$p \vee q$ (OR)	$p \veebar q$ (XOR)	$p \rightarrow q$ (IF)	$p \leftrightarrow q$ (IIF)	$p \downarrow q$ (NOR)	$p \mid q$ (NAND)
V	V	F	V	V	F	V	V	F	F
V	F	F	F	V	V	F	F	F	V
F	V	V	F	V	V	V	F	F	V
F	F	V	F	F	F	V	V	V	V

Nota: n proposiciones $\rightarrow 2^n$ líneas de tabla.

Negación: no, nunca, jamás, no es cierto que.
Conjunción: y, e, pero, como, aunque, sin embargo, mientras.
Disyunción: o, a menos que.
Disyunción excluyente: o bien.
Implicación: cuando, siempre que.
Doble implicación: si y sólo si (sii), cuando y solo cuando.

$\{\mid\}$ y $\{\downarrow\}$ son los únicos conjuntos adecuados de un solo conectivo diádico.

"$p \Rightarrow q$"	"$p \Leftrightarrow q$"
• Si p, entonces q. • p implica q. • p solo si q. • p es el antecedente, q es el consecuente. • q es necesario para p. • p es suficiente para q.	• p es necesario y suficiente para q. • p si y solo si q.

Tautología: proposición que es verdadera siempre.
Contradicción: proposición que es falsa siempre.
Contingencia: proposición que puede ser verdadera o falsa, dependiendo de los valores de las proposiciones que la componen.

- $p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$
- $p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$
- $(p \veebar q) \equiv (p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q)$
- $a \rightarrow (b \wedge c) \equiv (a \rightarrow b) \wedge (a \rightarrow c)$
- $(p \vee q) \rightarrow t \equiv (p \rightarrow t) \vee (q \rightarrow t)$

2. Leyes de la lógica

1) Ley de la doble negación	$\neg\neg p \equiv p$
2) Ley de conmutatividad	a) $p \vee q \equiv q \vee p$ b) $p \wedge q \equiv q \wedge p$
3) Ley de asociatividad	a) $p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$

	b) $p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$
4) Ley de distributividad	a) $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ c) $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
5) Ley de idempotencia	a) $p \vee p \equiv p$ b) $p \wedge p \equiv p$
6) Ley del elemento neutro	a) $p \vee F_0 \equiv p$ b) $p \wedge T_0 \equiv p$
7) Leyes de De Morgan	a) $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$ b) $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$
8) Ley del inverso	a) $p \vee \neg p \equiv T_0$ b) $p \wedge \neg p \equiv F_0$
9) Ley de dominancia	a) $p \vee T_0 \equiv T_0$ b) $p \wedge F_0 \equiv F_0$
10)Ley de absorción	a) $p \vee (p \wedge q) \equiv p$ b) $p \wedge (p \vee q) \equiv p$

Dual de S: Sea S una proposición. Si S *no contiene* conectivas lógicas distintas de $\wedge$ y $\vee$ entonces el dual de S (S^d), se obtiene de reemplazar en S todos los $\wedge$ ($\vee$) por $\vee$ ($\wedge$) y todas las T_0 (F_0) por F_0 (T_0).
Sean s y t dos proposiciones tales que $s \equiv t$, entonces $s^d \equiv t^d$.

- ✓ *Recíproca:* $(q \to p)$ es la recíproca de $(p \to q)$
- ✓ *Contra-recíproca:* $(\neg q \to \neg p)$ es la contra-recíproca de $(p \to q)$
- ✓ *Inversa:* $(\neg p \to \neg q)$ es la inversa de $(p \to q)$

3. Reglas de inferencia

Modus ponens o Modus ponendo ponens	$p \to q$ p $\therefore q$
Modus tollens o Modus tollendo tollens	$p \to q$ $\neg q$ $\therefore \neg p$

4. Lógica de predicados

Función proposicional: expresión que contiene una o más variables que al ser sustituidas por elementos del universo dan origen a una proposición.
Universo: Son las ciertas opciones "permisibles" que podré reemplazar por la variable.
Cuantificador universal: proposición que es verdadera para todos los valores de x en el universo.

$$\forall x\,(P(x)) \Rightarrow \cdots\ P(-1) \wedge P(0) \wedge P(1) \wedge \ldots$$

Cuantificador existencial: proposición en que existe un elemento x del universo tal que la función proposicional es verdadera.

$$\exists x\,(P(x)) \Rightarrow \cdots\ P(-1) \vee P(0) \vee P(1) \vee \ldots$$

- ✓ $\exists x\,[p(x) \wedge q(x)] \Rightarrow \exists x\, p(x) \wedge \exists x\, q(x)$
- ✓ $\exists x\,[p(x) \vee q(x)] \Leftrightarrow \exists x\, p(x) \vee \exists x\, q(x)$
- ✓ $\forall x\,[p(x) \wedge q(x)] \Leftrightarrow \forall x\, p(x) \wedge \forall x\, q(x)$
- ✓ $\forall x\, p(x) \vee \forall x\, q(x) \Rightarrow \forall x\,[p(x) \vee q(x)]$
- ✓ $\exists x\,[p(x) \wedge q(x)] \neq \exists x\, p(x) \wedge q(x)$

Negación de proposiciones cuantificadas:

- $\neg[\forall x\, p(x)] \equiv \exists x\, \neg p(x)$
- $\neg[\exists x\, p(x)] \equiv \forall x\, \neg p(x)$

5. Teoría de conjuntos

Conjunto de partes: dado un conjunto A, p(A) es el conjunto formado por todos los subconjuntos de A, incluídos A y $\emptyset$. Si A tiene n elementos, p(A) tendrá 2^n elementos. *Ejemplo*:
$A = \{1,2,3\}$

$P(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$

$A = \{x : x \in A\}$
$P(A) = \{ S : S \subset A\}$
$S \subset A \iff \forall x \in S: x \in A$

Pertenencia: un elemento “pertenece” a un conjunto.
Inclusión: un conjunto está “incluido” en un conjunto.

Operaciones entre conjuntos:
Unión: $A \cup B = \{x \in U: x \in A \vee x \in B\}$
Intersección: $A \cap B = \{x \in U: x \in A \wedge x \in B\}$
Diferencia: $A - B = \{x \in U: x \in A \wedge x \notin B\}$
Diferencia simétrica: $A \vartriangle B = \{x \in U: x \in A \cup B \wedge x \notin A \cap B\}$
Complemento: $\bar{A} = \{x \in U: x \notin A\}$

Leyes del álgebra de conjuntos: Para cualquier A, B $\subseteq$ U:

Leyes conmutativas	$A \cap B = B \cap A$ $A \cup B = B \cup A$
Leyes asociativas	$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
Leyes distributivas	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
Leyes de idempotencia	$A \cup A = A$ $A \cap A = A$
Leyes de identidad	$A \cup \emptyset = A$ $A \cup U = U$ $A \cap \emptyset = \emptyset$ $A \cap U = A$
Complementación doble	$\bar{\bar{A}} = A$
Leyes del complemento	$A \cup \bar{A} = U$ $A \cap \bar{A} = \emptyset$
Leyes de De Morgan	$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$ $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

Unidad 2: Inducción matemática

1. *Métodos para demostrar la verdad de una implicación*

1) Método directo: V → V
2) Método indirecto:
   a) Por el contrarrecíproco: F ← F
   b) Por el absurdo: supongo el antecedente verdadero y el consecuente falso y busco llegar a una contradicción de proposiciones.

2. *Inducción matemática*

$$\left.\begin{array}{ll} \text{I)} & P(1) \\ \text{II)} & P(h) \rightarrow P(h+1) \end{array}\right\} \boxed{\forall x\, (x \in N \rightarrow P(x))}$$

Unidad 3: Relaciones de recurrencia

Orden de una relación: mayor subíndice – menor subíndice.

1. Ecuaciones de recurrencia homogéneas

Sea la ecuación $a_n + c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} = 0$ (*). Resolverla significa:

I) Hallar las raíces de la ecuación característica de (*): $r^2 + c_1 r + c_2 = 0$

II) Utilizar los teoremas siguientes para hallar la solución.

Teorema 1: si t_n y s_n son soluciones de la ecuación (*), entonces $r_n = At_n + Bs_n$ también es solución de (*) $\forall A, B \in \mathbb{R}$.
Teorema 2: si r_0 es raíz de la ecuación característica, entonces r_0^n es solución de (*).
Teorema 3: si r_1 y r_2 $(r_1 \neq r_2)$ son soluciones de la ecuación característica, entonces $s_n = Ar_1^n + Br_2^n$ es solución de (*)y $\forall a_0, a_1 \in \mathbb{R}\ \exists A, B \in \mathbb{R}$: $\begin{cases} s_0 = a_0 \\ s_1 = a_1 \end{cases}$
Teorema 4: si $r_0 (r_0 \neq 0)$ es raíz doble de la ecuación característica, entonces $s_n = nr_0^n$ es solución de (*).
Teorema 5: si $r_0 (r_0 \neq 0)$ es raíz doble de la ecuación característica, entonces $s_n = Ar_0^n + Bnr_0^n$ es solución de (*) y $\forall a_0, a_1 \in \mathbb{R}\ \exists A, B \in \mathbb{R}$: $\begin{cases} s_0 = a_0 \\ s_1 = a_1 \end{cases}$

2. Ecuaciones de recurrencia no homogéneas

Sea la ecuación $a_n + c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k} = f(n)$ (*), con $f(n) \neq 0$. Resolverla significa:

I) Resolver la ecuación homogénea asociada y obtener a_n^H.

II) Hallar *una* solución particular de la ecuación (*), a_n^P.

III) La solución general será: $a_n = a_n^H + a_n^P$

Nota: en la solución particular propuesta *no* debe haber sumandos que aparecen en la solución de la ecuación homogénea.

$\mathrm{f(n)}$	$\mathrm{a_n^P}$ propuesta
ka^n (*a* no es raíz de la ecuación característica)	ka^n
ka^n (*a* es raíz de multiplicidad *t* de la ecuación característica)	$kn^t a^n$
Polinomio de grado *k* y 1 no es raíz de la ecuación característica	Polinomio genérico de grado *k*
Polinomio de grado *k* y 1 es raíz de multiplicidad *t* de la ecuación característica	Polinomio genérico de grado *k* multiplicado por n^t
$\mathrm{A.sin\,(a_n)}$ ó $\mathrm{B.cos\,(a_n)}$	$\mathrm{C.sen(a_n) + D.cos(a_n)}$

Caso especial 1: $a_n + c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k} = f_1(n) + f_2(n)$

I) Proponer una solución a_n^{P1} para $a_n + c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k} = f_1(n)$

II) Proponer una solución a_n^{P2} para $a_n + c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k} = f_2(n)$

III) La solución será $a_n^{P1} + a_n^{P2}$.

Caso especial 2: $a_n + c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k} = f_1(n).f_2(n)$

I) Proponer una solución a_n^{P1} para $a_n + c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k} = f_1(n)$

II) Proponer una solución a_n^{P2} para $a_n + c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k} = f_2(n)$

III) La solución será $a_n^{P1}.a_n^{P2}$. Luego, comparar con la solución del homogéneo y arreglar si es necesario.

3. Sucesiones importantes

Interés	***Fibonacci***	***Torres de Hanoi***	***Desarreglos***
$a_n = 1{,}12.a_{n-1}$	$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$	$h_n = 2h_{n-1} + 1$	$d_n = (n-1).(d_{n-1} + d_{n-2})$

Unidad 4: Relaciones

Producto cartesiano: $A \times B = \{(x,y): x \in A \ \wedge y \in B\}$

Relación n-aria: dado un conjunto A se llama relación R en conjunto A ⟺ R ⊆ A×A. Una relación se puede definir por extensión (mencionando todos sus elementos) o por comprensión (dando una característica de los elementos).

Relación 'R': Siendo x∈A, y∈A, decimos que xRy ⟺ (x,y)∈R.

Relación inversa: dada $R \subseteq A \times B$, la relación inversa R^{-1} es tal que: $R^{-1} = \{(x,y): (y,x) \in R\}$

> Repaso de funciones
>
> Sean A y B dos conjuntos. Una relación es función si:
>
> ∄a ∈ A / f(a) = b_0 ∧ f(a) = b_1 (b_0, b_1 ∈ B $b_0 \neq b_1$) (No existe elemento del dominio que tenga dos imágenes)
>
> Sea $f: A \rightarrow B$ función, a ∈ A, b ∈ B:
>
> - f es inyectiva ⇔ $a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$ (Para puntos distintos del dominio, distintas imágenes)
> - f es sobreyectiva ⇔ ∀ b ∈ B, ∃ a ∈ A / f(a) = b (La imagen de A es todo B)
> - f es biyectiva ⇔ f es inyectiva y sobreyectiva (Si es biyectiva existe la inversa)

1. Propiedades de las relaciones

Sea R una relación en el conjunto A.

1) R es *reflexiva* ⟺∀ x ∈A: xRx
2) R es *simétrica* ⟺ ∀ x,y ∈A : (xRy → yRx)
3) R es *transitiva* ⟺ ∀ x,y,z ∈A : (xRy ∧ yRz) → xRz
4) R es *antisimétrica* ⟺ ∀ x,y ∈A : (xRy ∧ yRx → x=y)

Nota: Todo elemento cumple las tres primeras consigo mismo. Cuidado con la 4º: no simétrica ≠ antisimétrica.

2. Matriz de una relación

Sea R una relación en un conjunto *finito* A. La misma puede representarse matricialmente por:

$M(R) \in \{0,1\}^{n\times n}$ siendo *n*=|*A*| definida por $a_{ij} = \begin{cases} 1 \ si \ a_i R a_j \\ 0 \ si \ a_i \not R a_j \end{cases}$

Relación de orden entre matrices booleanas: $C \leq D \iff c_{ij} \leq d_{ij} \ \forall i,j : 1 \leq i,j \leq n$. Es decir, una matriz C es menor a D si D tiene al menos los mismos 1 en las mismas posiciones que C.

Sea *I* la matriz identidad de *n x n*. Entonces:

- R es *reflexiva* ⟺ $I \leq M(R)$
- R es *simétrica* ⟺ $M(R) = M(R)^T$
- R es *antisimétrica* ⟺ $M(R). M(R)^T \leq I$ (el producto se entiende posición por posición)
- R es *transitiva* ⟺ $M^2(R) \leq M(R)$

3. Relaciones de equivalencia y de orden

Relación de equivalencia (~)	**Relación de orden (≤)**
- Reflexividad	- Reflexividad
- Simetría	- Antisimetría
- Transitividad	- Transitividad

✓ Orden total: ∀ x,y ∈ A : (x*R*y ∨ y*R*x). En el diagrama de Hasse se ve una línea recta.

✓ Orden parcial: ∃ x,y ∈ A : (x$\not R$y ∧ y$\not R$x)

(Si no es orden total, es orden parcial.)

Clase de equivalencia: sea R una *relación de equivalencia* en A. Se llama clase de equivalencia de un $a \in A$, al conjunto $\bar{a} = [a] = cl[a] = \{x \in A : xRa\}$

Teorema: sea R una relación de equivalencia en A. Se verifica:

- $\forall a \in A: [a] \subseteq A$
- $\forall a \in A: [a] \neq \emptyset$
- $\forall a, b \in A: aRb \iff [a] = [b]$
- $[a_i] \cap [a_j] = \emptyset \ (i \neq j)$
- $\cup [a_i] = A$

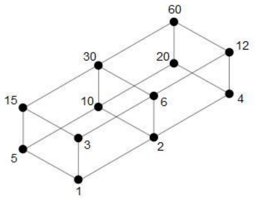
Conjunto cociente: $A \mid R = \{[a]: a \in A\}$. El conjunto cociente es una partición de A.

Partición: $P = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ es una partición del conjunto A si y solo si:

1) $A_i \neq \emptyset \ \forall i: 1 \leq i \leq n$
2) $A_i \subseteq A \ \forall i: 1 \leq i \leq n$
3) $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A$
4) $A_i \cap A_j = \emptyset, \forall i \neq j, 1 \leq j \leq n$

Congruencia módulo n: En $\mathbb{Z}$, y para $n \in$ □, se define la relación $aRb \iff n|a - b \iff a - b = nk \ (k \in$ □$)$

Diagrama de Hasse: representación gráfica simplificada de un conjunto (finito) ordenado parcialmente. Con ellos se eliminan los lazos de reflexividad y los atajos de transitividad. Si dos elementos están relacionados, digamos **aRb**, entonces dibujamos **b** a un nivel superior de **a**.
Ejemplo: sea el conjunto *A* = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60} (todos los divisores de 60). Este conjunto está ordenado parcialmente por la relación de divisibilidad. Su diagrama de Hasse puede ser representado como sigue.



4. Elementos particulares

Sea R una relación de orden en A:

Maximal: x_0 es *maximal* de A $\iff \nexists x \in A : x_0Rx$ (x_0 no se relaciona con nadie).
Minimal: x_0 es *minimal* de A $\iff \nexists x \in A : xRx_0$ (No hay elementos que se relacionen con el x_0.)

Sea X un subconjunto de A:

Cota Superior: $x_0 \in A$ es *Cota Superior* de X $\iff \forall x \in X : xRx_0$.
Cota Inferior: $x_0 \in A$ es *Cota Inferior* de X $\iff \forall x \in X : x_0Rx$.

Supremo: $s \in A$ es el *Supremo* de X $\iff$ s es la *menor* de todas los cotas superiores $\iff \forall x \in X : xRs$.
Ínfimo: $i \in A$ es *Ínfimo* de X $\iff$ i es la *mayor* de todas las cotas inferiores $\iff \forall x \in X : iRx$.

Máximo: $M \in A$ es *Máximo* de X $\iff$ M es supremo de X y $M \in X$.
Mínimo: $m \in A$ es *Mínimo* de X $\iff$ m es ínfimo de X y $m \in X$.

Unidad 5: Álgebras de Boole

1. Definiciones y axiomas

Álgebra de Boole: Sea K ($|K| \geq 2$) un conjunto no vacío que contiene dos elementos especiales, 0 (cero o elemento neutro) y 1 (uno o elemento unidad) sobre el cual definimos las operaciones cerradas +, • y el complemento. Entonces β=(K, 0, 1, +, •, $\neg$) es un Álgebra de Boole si cumple las siguientes condiciones:

A1) Axioma de conmutatividad	$x + y = y + x$ $x.y = y.x$
A2) Axioma de asociatividad	$(x + y) + z = x + (y + z) = x + y + z$ $(x.y).z = x.(y.z) = x.y.z$
A3) Axioma de la doble distributividad	$x.(y + z) = x.y + x.z$ $x + (y.z) = (x + y).(x + z)$
A4) Axioma de existencia de elementos neutros	$x + 0 = x$ $x.1 = x$
A5) Axioma de existencia de complementos	$x + \bar{x} = 1$ $x.\,\bar{x} = 0$

Expresión dual: se obtiene cambiando todos los +(•) por • (+) y los 0(1) por 1(0).
Principio de dualidad: en toda álgebra de Boole, si una expresión es válida, su expresión dual también lo es.

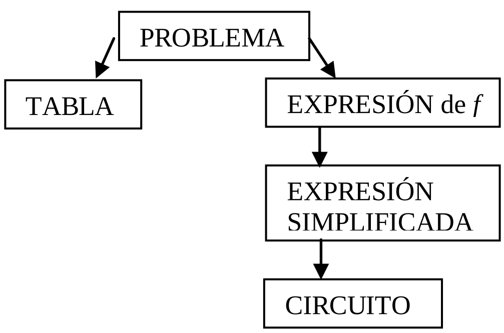
1) Ley del doble complemento:	$\bar{\bar{x}} = x$
2) Leyes de Morgan:	a) $\overline{x + y} = \bar{x}.\bar{y}$ b) $\overline{x.y} = \bar{x} + \bar{y}$
3) Leyes conmutativas:	a) $x + y = y + x$ b) $x.y = y.x$
4) Leyes asociativas:	a) $x + (y + z) = (x + y) + z$ b) $x.(y.z) = (x.y).z$
5) Leyes distributivas:	a) $x + (y.z) = (x + y).(x + z)$ b) $x.(y + z) = xy + xz$
6) Leyes de idempotencia:	a) $x + x = x$ b) $x.x = x$
7) Leyes de identidad:	a) $x + 0 = x$ b) $x.1 = x$
8) Leyes de inversos:	a) $x + \bar{x} = 1$ b) $x.\bar{x} = 0$
9) Leyes de acotación:	a) $x + 1 = 1$ b) $x.0 = 0$
10) Leyes de absorción:	a) $x + xy = x$ $\quad$ $x + \bar{x}y = x + y$ b) $x.(x + y) = x$ $\quad$ $x.(\bar{x} + y) = x.y$

Observación:
$\wedge \equiv \bullet \equiv \cap$
$\vee \equiv + \equiv \cup$

Permitido	Prohibido
✓ $x + y = 0 \rightarrow (x = 0) \wedge (y = 0)$ ✓ $x.y = 1 \rightarrow (x = 1) \wedge (y = 1)$ ✓ $x + \bar{y} = z + \bar{y} \wedge x + y = z + y \rightarrow x = z$ ✓ $x + \bar{y} = x.y \rightarrow x = y$	▪ $x.y = 0 \rightarrow (x = 0) \vee (y = 0)$ ▪ $x + y = y + z \rightarrow x = z$

2. Funciones booleanas

Función booleana: $f : \{0,1\}^n = \{0,1\} \times \{0,1\} \times \ldots \times \{0,1\} \rightarrow \{0,1\}$. Dadas n variables, existen 2^{2^n} funciones booleanas posibles.



MINITERMINOS	MAXITERMINOS
m = x.y.z	M = x + y + z
Forma canónica, normal, normal disyuntiva SP: suma booleana de minitérminos.	Forma canónica, normal, normal conjuntiva PS: producto booleano de maxitérminos.
f(x,y,z) ≡ suma de los minitérminos que dan 1	f(x,y,z) ≡ producto de los maxitérminos que dan 0
Codificación: $x \to 1$, $\bar{x} \to 0$	Codificación: $x \to 0$, $\bar{x} \to 1$

Observación:
La suma de los minitérminos de una función es equivalente al producto de los maxitérminos que no aparecen en la SP.

Σ m(0, 1, 3, 5, 7) = Π M(2, 4, 6)

Observación:

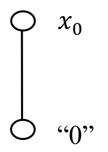
f(x,y,z) = Σ m(0, 1, 3, 5, 7)

$\overline{f(x,y,z)}$ = Π M(0, 1, 3, 5, 7)

Orden en un álgebra de Boole: sea β = (K,+,·,0,1,-) un álgebra de Boole. En K se define:

$$\forall a, b \in K: aRb \Leftrightarrow a \leq b \Leftrightarrow a.b = a \Leftrightarrow a + b = b \Leftrightarrow a.\bar{b} = 0$$

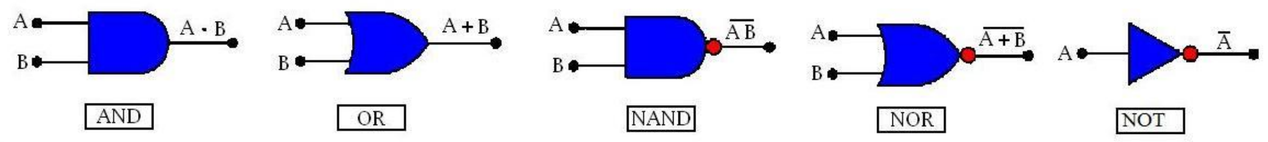
Teorema: $\forall x \in K: 0 \leq x \leq 1$. Todo álgebra de Boole está acotada.



Átomo de un álgebra de Boole: $x_0 \in B$ ($x_0 \neq 0$) es un *átomo* de B $\Leftrightarrow$ $\forall y \in B: (y \leq x_0 \longrightarrow y = 0 \vee y = x_0)$

Nota: Si B tiene *n* átomos $\Rightarrow$ B tiene 2^n elementos.

Circuitos lógicos:



3. Propiedades de los átomos

1) x_0 átomo $\Rightarrow \forall y \in B: (y.x_0 = 0 \vee y.x_0 = x_0)$ (El producto de cualquier elemento de B con un átomo es 0 o es el átomo)
2) x_0, x_1 átomos distintos $\Rightarrow x_0.x_1 = 0$ (Si hay dos átomos distintos el producto entre ellos es 0)
3) Sean $x_1, x_2, \ldots, x_n$ átomos de B $\wedge\, x \in B: (x.x_i = 0 \;\; \forall i: 1 \leq i \leq n \Rightarrow x = 0)$ (Si hay un x que multiplicado por cada uno de los átomos da 0, x es el 0)

Teorema: sean $x_1, x_2, \ldots, x_n$ los átomos de B. Entonces $\forall x \in B\; \exists c_1, c_2, \ldots, c_n \in \{0,1\}$ tales que $x = c_1x_1 + \cdots + c_nx_n$.
Teorema: $\sum_{x_i \in A} x_i = 1$, con x_i átomo de B.

Nota: Si *n* es la cantidad de variables de f, el número máximo de términos es 2^n.

Mapa de Karnaugh (Para simplificar una función booleana)
Se colorean los cuadrados de los minitérminos correspondientes y luego se escribe cada término, teniendo en cuenta que si un cuadrado tiene un vecino (abajo, arriba, derecha o izquierda) este último no se escribe.

xy\zw	**00**	**01**	**11**	**10**
00	0	1	3	2
01	4	5	7	6
11	12	13	15	14
10	8	9	11	10

f = $\sum$ m(1, 3, 9, 11, 14, 6)

f = $(w.\bar{y} + z.\bar{w}.y)$

4. Isomorfismos entre álgebras de Boole

Isomorfismo entre dos álgebras de Boole: sean $B_1 = (K_1, +_1, \bullet_1, 0_1, 1_1, \overline{}_1)$ y $B_2 = (K_2, +_2, \bullet_2, 0_2, 1_2, \overline{}_2)$ dos álgebras de Boole. Se dice que B_1 y B_2 ($\#B_1 = \#B_2$) son isomorfos $\Leftrightarrow \exists\ \mathbf{f}: \mathbf{K_1} \to \mathbf{K_2}$ biyectiva tal que:

$$\begin{cases} \mathbf{f}(\mathbf{x} +_1 \mathbf{y}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}) +_2 \mathbf{f}(\mathbf{y}) \\ \mathbf{f}(\mathbf{x} ._1 \mathbf{y}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}) ._2 \mathbf{f}(\mathbf{y}) \\ \mathbf{f}(\overline{\mathbf{x}}^1) = \overline{\mathbf{f}(\mathbf{x})}^2 \end{cases}$$

El número de isomorfismos posibles es $(\#\mathbf{B_1})!$

Propiedades:

1) $f(0_1) = 0_2$
2) $f(1_1) = 1_2$
3) f(átomo B_1) = átomo B_2
4) $x\ R_1\ y \to f(x)\ R_2\ f(y)$

Unidad 6: Teoría de grafos

1. Definiciones de grafos y digrafos

Grafo no orientado: terna G = (V,A,δ) que representa una relación entre un conjunto finito de Vértices ($V \neq \emptyset$) y otro conjunto finito de Aristas (A), y δ es la función de incidencia.
$\delta: A \to X(V)$, siendo $X(V) = \{X: X \subseteq V \wedge |X| = 1 \text{ o } 2\}$.

$$\text{Si } \delta(a) = \{u,v\} \text{ entonces } \begin{cases} \text{u y v son extremos de a} \\ \text{u y v son vértices adyacentes} \\ \text{a es incidente en u y v} \end{cases}$$

Grafo orientado / digrafo*:* terna D = {V,A,φ) con $V \neq \emptyset$ que representa una relación entre un conjunto finito de Vértices y otro conjunto finito de Aristas, y φ es la función de incidencia.
$\varphi: A \to V \times V$.

$$\text{Si } \varphi(a) = (v,w) \text{ entonces } \begin{cases} \text{v es extremo inicial y w es extremo final de a} \\ \text{v y w son vértices adyacentes} \\ \text{a incide positivamente en w y negativamente en v} \end{cases}$$

2. Aristas, vértices, caminos y grafos

Aristas

Aristas adyacentes: aristas que tienen un solo extremo en común.
Arista paralelas o múltiples: $a_1, a_2 \in A$ son aristas paralelas $\Leftrightarrow \varphi(a_1) = \varphi(a_2)$. Es decir, sii φ no es inyectiva.
Lazo o bucle: arista que une un vértice con sí mismo.
Arista incidente: Se dice que "*e* es incidente en *v*" si *v* esta en uno de los vértices de la arista *e*.
Extremo (para digrafos): Un extremo es inicial(final) si es el primer(ultimo) vértice de la arista.
Aristas paralelas (para digrafos): Si E.I(a) = E.I(b) $\wedge$ E.F(a) = E.F(b) en otro caso son anti paralelas.
Puente: Es la arista que al sacarla el grafo deja de ser conexo.

Vértices

Vértices adyacentes: Se dice que "v y w son adyacentes" si existe una arista entre los dos vértices.
✓ Un vértice es adyacente a sí mismo si tiene lazo.
Grado de un vértice: gr(v) es la cantidad de aristas que inciden en él. Los lazos cuentan doble.
✓ Se dice que un vértice es 'par' o 'impar' según lo sea su grado.
✓ $\boxed{\sum_{v \in V} gr(v) = 2|A|}$
✓ La cantidad de vértices de grado impar es un número par.
✓ Si gr(v) = 0, v es un vértice aislado.
Grado positvo (para digrafos): $gr^+(v)$ es la cantidad de veces que se usa el vértice como extremo final.

Grado negativo (para digrafos): $gr^-(v)$ es la cantidad de veces que se usa el vértice como extremo inicial.
- ✓ $\Sigma gr^-(v) = \Sigma gr^+(v) = \#A$
- ✓ $gr_{total}(v) = gr^+(v) + gr^-(v)$
- ✓ $gr_{neto}(v) = gr^+(v) - gr^-(v)$
- ✓ El lazo cuenta como arista incidente positiva y negativamente en el vértice.

Vértice de aristas múltiples: Es aquel que tiene más de un arista.

Caminos

Para $v_x, v_y \in V$, se dice que hay un camino en G de v_x a v_y si existe una sucesión finita no vacía de aristas distintas que contengan a v_x y v_y en su primer y último término. Así: $\{v_x,v_1\},\{v_2,v_3\},\ldots,\{v_n,v_y\}$

Longitud del camino: número de aristas de un camino.

Circuito o camino cerrado: camino en el cual $v_0 = v_n$.

Camino simple: camino que no repite vértices.

- ✓ $\forall v, w \in V\ (v \neq w)$: ($\exists$ camino de v a w $\vee$ $\exists$ camino simple de v a w)

Circuito simple: circuito que no repite vértices salvo el primer y último vértice.

Ciclo: circuito simple que no repite aristas.

- ✓ Circuito simple de longitud ≥ 3 en grafos (≥ 2 en digrafos) es un ciclo.

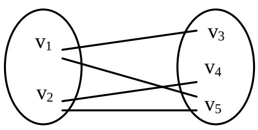
Vértices accesibles: Son aquellos entre los que existe un camino.

- ✓ Todo vértices es accesible a sí mismo.

> *Nota:* Si $\forall v \in V\ gr(v) \geq 2 \Rightarrow$ el grafo tiene un circuito.

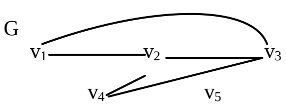
Grafos

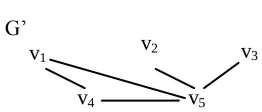
Orden de un grafo: Es su número de vértices.
Grafo acíclico: grafo que no tiene ciclos.
Grafo conexo: grafo tal que dados 2 vértices distintos es posible encontrar un camino entre ellos.
Grafo simple: grafo que carece de aristas paralelas y lazos.
Grafo regular: Aquel con el mismo grado en todos los vértices.
Grafo k-regular: $G=(V,A,\varphi)$ es k-regular $\Leftrightarrow \forall v \in V: gr(v) = k$
Grafo bipartito: Es aquel con cuyos vértices pueden formarse dos conjuntos disjuntos de modo que no haya adyacencias entre vértices pertenecientes al mismo conjunto.



Grafo bipartito regular (es completo): se denota $K_{m,n}$ donde m, n son la cantidad de vértices de cada conjunto.
Grafo completo: grafo simple con mayor cantidad de aristas. Todos están conectados con todos.
Propiedades:
- ✓ Un grafo completo con *n* vértices se denota K_n.
- ✓ $\forall v \in V,\ gr(v) = \#V - 1$.
- ✓ Si $\#V = n \rightarrow \#A_{K_n} = \frac{n(n-1)}{2}$
- ✓ Si G(V,A) es completo $\Rightarrow$ G es regular (No vale la recíproca)
- ✓ Dos grafos completos con mismo #V son isomorfos.

Grafo complemento: Es el grafo G' que tiene conectados los vértices no conectados de G y desconectados los vértices conectados de G.





✓ G ∪ G' = Grafo completo.
✓ Si dos grafos son complementarios, sus isomorfos también.
✓ Sea $gr_G(v) = k \Rightarrow gr_{G'}(v) = \#V - k - 1$.

Grafo plano: Aquel que admite una representación bidimensional sin que se crucen sus aristas.
Grafo ponderado: Es el grafo en cual cada arista tiene asignado un n° real positivo llamado peso.
Digrafo: Grafo con todas sus aristas dirigidas. Por tanto, los pares de vértices que definen las aristas, son pares ordenados.
Digrafo conexo: Si su grafo asociado es conexo.
Digrafo fuertemente conexo: $\forall v \in V$ $\exists$ camino que me permite llegar a cualquier otro vértice.
Digrafo k-regular: $D=(V,A,\varphi)$ es k-regular $\Leftrightarrow \forall v \in V: gr^+(v) = gr^-(v) = k$

Subgrafo de G: Dado G = (V, A), G' = (V', A') es subgrafo de G si $V' \subseteq V \wedge A' \subseteq A$
Grafo parcial de G: Dado G = (V, A), G' = (V', A') es grafo parcial de G si $V' \subseteq V \wedge A' \subseteq A$
Multigrafo: Grafo que tiene alguna arista múltiple.
✓ Un multigrafo se transforma en grafo añadiendo un vértice en mitad de cada arista múltiple.
Pseudografo: Grafo con algún lazo.

3. Grafos de Euler

Grafo de Euler: grafo en el cual se puede encontrar un ciclo o un camino de Euler.

- Camino de Euler: camino que pasa por todas las aristas exactamente una vez.
- Circuito de Euler: circuito que pasa por todas las aristas exactamente una vez.

Teorema de Euler:

- Para grafos conexos:
  - G tiene un Camino de Euler ⇔ G tiene exactamente 2 vértices de grado impar.
  - G tiene un Circuito de Euler ⇔ G tiene exactamente 0 vértices de grado impar.

- Para digrafos:
  - G tiene un Camino de Euler ⇔ $\exists\, u,w \in V\ (u \neq w) \begin{cases} gr^-(u) = gr^+(u) + 1 \\ gr^+(w) = gr^-(w) + 1 \\ gr^+(v) = gr^-(v) \ \forall v \in V \end{cases}$
  - G tiene un Circuito de Euler ⇔ $\forall v \in V\ gr^+(v) = gr^-(v)$

Grafo de Hamilton: grafo en el cual es posible hallar un camino o circuito de Hamilton.

- Camino de Hamilton: Es un camino que no repite vértices. (Puede no pasar por todas las aristas)
- Circuito de Hamilton: Es un circuito que no repite vértices. (Puede no pasar por todas las aristas)

Teorema de Ore: Si un grafo es conexo con $\#V \geq 3$ y $\forall v, w \in V: gr(v) + gr(w) \geq \#V \Rightarrow$ G es Grafo Hamiltoniano.

Teorema de Dirac: un grafo *simple* con $\#V \geq 3$ es Hamiltoniano si $\forall v \in V: gr(v) \geq \frac{\#V}{2}$

4. Isomorfismos de grafos

Dados G=(V, A) y G'=(V',A'), se denomina *isomorfismo de G a G'* a la aplicación biyectiva f tal que para a,b $\in$ V, $\{a,b\} \in A \Leftrightarrow$ se cumple $\{f(a),f(b)\} \in A'$. Es decir, la aplicación que relaciona biyectivamente pares de vértices de A con pares de vértices de A', de modo que los vértices conectados siguen estándolo.
✓ #V = #V' y #A = #A'
✓ Se cumple que $\delta(a)=\delta(f(a))$
✓ Si dos grafos son isomorfos, sus complementarios también.
✓ G y G' tienen igual cantidad de vértices aislados.

- ✓ G y G' tienen igual cantidad de lazos o bucles.
- ✓ Se mantienen los caminos.
- ✓ Se mantienen los ciclos.
- ✓ Si dos grafos complementarios son isomorfos se los llama auto complementarios.
- ✓ Dos grafos simples G_1 y G_2 son isomorfos $\Leftrightarrow$ para cierto orden de sus vértices las M_A son iguales.

Automorfismo: Es un isomorfismo en sí mismo. f(a) = a.

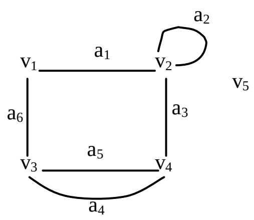
5. Representación de grafos por matrices

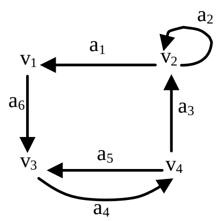
Matriz de conexión: dados G=(V,A,φ) con $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ y $A = \{a_1, \dots, a_m\}$. Se define la siguiente relación: $\forall\, v, w \in V: vRw \Leftrightarrow (v = w \;\vee \exists$ un camino de v a w$)$.

$$M_C(G) = [b_{ij}]_{nxn} = \begin{cases} 1 & \text{si } vRw \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Matriz de adyacencia: sea un grafo G=(V,A, φ) con $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ y $A = \{a_1, \dots, a_m\}$. Se define la matriz de adyacencia de G a una matriz booleana de $n \times n$ tal que:

$$M_A(G) = m_{ij} \text{ tal que } m_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } v_i \text{ es adyacente a } v_j \\ 0 & \text{si } v_i \text{ NO es adyacente a } v_j \end{cases}$$





	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
v_1	0	1	1	0	0
v_2	1	1	0	1	0
v_3	1	0	0	2	0
v_4	0	1	2	0	0
v_5	0	0	0	0	0

$\rightarrow gr(v_1)$

$\downarrow gr(v_1)$

$\boxed{gr(v_i) = \Sigma a_{ij} + 2.a_{ii}\ (i \neq j)}$

- ✓ a_{ij} = cantidad de aristas entre v_i y v_j.
- ✓ Simétrica.
- ✓ La diagonal principal de A^2 muestra los grados de cada vértice.

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
v_1	0	0	1	0	0
v_2	1	1	0	0	0
v_3	0	0	0	1	0
v_4	0	1	1	0	0
v_5	0	0	0	0	0

$\rightarrow gr^-(v1)$

$\downarrow gr^+(v1)$

- ✓ a_{ij} = cantidad de aristas con E.I en v_i y E.F en v_j
- ✓ No necesariamente simétrica.

Propiedad: en la matriz $M_A(G)^k$, cada coeficiente a_{ij} indica la cantidad de caminos de longitud *k* que hay entre v_i y v_j.

Matriz de incidencia: sea un grafo G=(V,A, φ) con $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ y $A = \{a_1, \dots, a_m\}$. Se define la matriz de adyacencia de G a una matriz booleana de $n \times m$ tal que:

$$M_I(G) = m_{ij} \text{ tal que } m_{ij} \begin{cases} 1 & \text{si } a_i \text{ es incidente a } v_j \\ 0 & \text{si } a_i \text{ NO es incidente a } v_j \end{cases}$$

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
v_1	1	0	0	0	0	1
v_2	1	2	1	0	0	0
v_3	0	0	0	1	1	1
v_4	0	0	1	1	1	0
v_5	0	0	0	0	0	0

← $gr(v_1)$

||
2

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si } a_i \text{ es incidente en } v_i \\ 0 \text{ si } a_i \text{ no es incidente en } v_i \\ 2 \text{ si } a_j \text{ es lazo de } v_i \end{cases}$$

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
v_1	1	0	0	0	0	-1
v_2	-1	±1	1	0	0	0
v_3	0	0	0	-1	-1	1
v_4	0	0	-1	1	1	0
v_5	0	0	0	0	0	0

← $gr^+(v_1)=\Sigma a_{ij},(a_{ij}>0)$
$gr^-(v_1)=\Sigma a_{ij},(a_{ij}<0)$

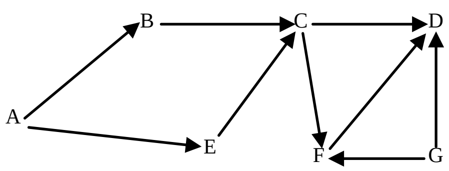
||
0

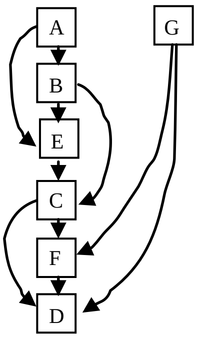
$$a_{ij} = \begin{cases} -1 \text{ si } v_i \text{ es E.I de } a_i \\ 1 \text{ si } v_i \text{ es E.F de } a_i \\ \pm 1 \text{ si } a_i \text{ es lazo de } v_i \\ 0 \text{ si } a_j \text{ no incide en } v_i \end{cases}$$

<u>Niveles de un digrafo:</u> Un conjunto vértices N constituye o está en nivel superior a otro conjunto de vértices K si ningún vértice de N es alcanzable desde algún vértice de K.

```
Dibujar MA
i = 1
while MA:
      Nivel i = MA – {columnas y filas que sean nulas}
      MA = MA – {columnas y filas que sean nulas}
      i = i + 1
```

Nivel 1: A,G
Nivel 2: B
Nivel 3: E
Nivel 4: C
Nivel 5: F
Nivel 6: D





6. Algoritmos de camino mínimo

Objetivo: Hallar el camino mínimo de S a L:

- `λ(v)` es la etiqueta del vértice v.
- `i` es un contador.

<u>Algoritmo de Moore o BFS (*Breadth First Search*)</u>

- Dado un grafo con aristas de igual peso (≥ 0), calcula la distancia entre dos vértices.

```
λ(S) = 0
i = 0
while (vértices adyacentes a los etiquetados con i no etiquetados):
      λ(v) = i+1
      if (L == etiquetado): break
      i = i+1
```

<u>Algoritmo de Dijkstra</u>

- Dado un grafo o digrafo con pesos no negativos, calcula caminos mínimos del vértice a todos los vértices.

```
λ(S) = 0
for v in V:
      λ(v) = ∞
```

```
T = V
while (L ∈ T):
      Elijo v ∈ T con mínimo λ(v) adyacente al último etiquetado
      ∀x / x adyacente v:
            λ(x) = min{λ(x), λ(v) + a(v,x)}
      T = T - {v}
```

Algoritmo de Ford

- Solo para digrafos, acepta pesos negativos y detecta circuitos negativos.

```
λ(S) = 0
for v in V:
      λ(v) = ∞
j = 1
while ( j ≠ |V|):
      T ={v ∈ V / v sea adyacente al último etiquetado}
      ∀x ∈ V, ∀v ∈ T :
            λ(v) = min{λ(x), λ(v) + a(v,x)}
      Si no hubo cambios: break
      Else: j = j + 1
return T
```

Unidad 7: Árboles

1. Definiciones

Árbol: G=(V,A) es un árbol ⇔ ∀ u,v ∈ V (u = v ∨ ∃! camino simple de u a v)

Teorema 1: dado un grafo G=(V,A). Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

a) G es conexo y acíclico
b) G es acíclico y si se le agrega una artista deja de serlo
c) G es conexo y si se le elimina una arista deja de serlo
d) G es árbol

Teorema 2: dado un grafo G=(V,A). Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

a) G es conexo y acíclico
b) G es conexo y $|\boldsymbol{A}| = |\boldsymbol{V}| - \mathbf{1}$
c) G es acíclico y $|\boldsymbol{A}| = |\boldsymbol{V}| - \mathbf{1}$

Propiedad: si G es un árbol con #V ≥ 2 ⇒ hay al menos 2 vértices de grado 1.

Bosque: un grafo G=(V,A) es bosque ⇔ G es acíclico.

- ✓ Los bosques son grafos no conexos cuyas componentes conexas son árboles.
- ✓ |A| = |V| – t, siendo *t* la cantidad de árboles del bosque.

Arboles con raíz: G=(V,A) digrafo conexo es un árbol con raíz ⇔ $\begin{cases} \exists\ r \in V: gr^{+}(r) = 0 \rightarrow (r = raiz) \\ \forall\ v \in V\ (v\ \neq r): gr^{+}(v) = 1 \end{cases}$

Hoja / terminal: Vértice sin hijos.
Vértice interno: Vértice con hijos.
Árbol n-ario: todos los nodos tienen a lo sumo *n* hijos.
Árbol n-ario completo: todos los nodos tienen 0 o *n* hijos.
Nivel de un vértice: número de aristas que le separan de la raíz. La raíz tiene nivel 0.
Altura de un árbol: máximo nivel de sus vértices.
Árbol equilibrado: las hojas llegan al mismo nivel.

Teorema: Si T = (V, A) es una árbol binario completo con *i* vértices internos entonces: $\begin{cases} \text{Hojas} = i + 1 \\ \#V = 2i + 1 \end{cases}$

2. Árboles generadores

<u>Árbol generador</u>: T=(V_T, A_T) es un árbol generador de G=(V_G, A_G) $\Leftrightarrow \begin{cases} T \text{ es árbol} \\ V_T = V_G \\ A_T \subseteq A_G \end{cases}$

<u>Árbol generador minimal</u>: es un árbol generador, de peso mínimo. No es único.

Teorema: Si G es un grafo no dirigido, entonces G es conexo ⇔ G tiene árbol recubridor.

3. Algoritmos para hallar un árbol generador mínimo

Sea G = (V, A) un grafo conexo ponderado. Existen dos algoritmos para hallar un árbol generador mínimo de G.

<u>Algoritmo de Prim</u>

```
v = vértice cualquiera de G
T = {v}
while (|T| ≠ |V|):
      a = arista de mínimo peso incidente en un v ∈ T y un w ∉ T
      T = T + {w}
return T
```

<u>Algoritmo de Kruskal</u>

```
a = arista de mínimo peso
T = {a}
while (|T| < |V|-1):
      b = arista de mínimo peso tal que b ∉ T  y T + {b} es acíclico
      T = T + {b}
return T
```

Unidad 8: Redes de transporte

1. Definiciones

<u>Red de transporte</u>: sea G = (V, A) un digrafo conexo y sin lazos. G es una red de transporte si se verifican:

1) *Vértice Fuente*: ∃! vértice *f* ∈ V / $gr^+(f) = 0$ (no llegan flechas)
2) *Vértice Sumidero*: ∃! vértice *s* ∈ V / $gr^-(s) = 0$ (no salen fleches)
3) *Capacidad de la Arista*: ∃ una función $C: A \rightarrow N_0$ / si a = (v_i, v_j) ∈ A, C(a) = C_{ij}

<u>Flujo de una red</u>: Si G = (V, A) es una red de transporte se llama *flujo de G* a una función F: A → N_0 tal que:

1) ∀a ∈ A: F(a) ≤ C(a) (Si F(a) = C(a) se dice que la arista está *saturada*)
2) ∀v ∈ V / v ≠ *f* , v ≠ *s* se tiene que $\sum_{w \in V} F(w, v) = \sum_{w \in V} F(v, w)$ (Flujo entrante = Flujo saliente)

Teorema 1: Si F es el flujo asociado a una red de transporte se cumple que $\sum_{w \in V} F(f, w) = \sum_{w \in V} F(w, s)$ (Todo lo que sale de la fuente llega al sumidero)

<u>Valor del flujo:</u> suma de los flujos de todas las aristas que salen del vértice fuente: $\mathrm{val(F)} = \sum_{v \in V} \mathrm{F(f, v)}$

Corte de una red: Un corte (P, $\bar{P}$) en una red de transporte G = (V, A) es un conjunto P tal que: $\begin{cases} P \subset V \\ P \cup \bar{P} = V \\ f \in P, s \in \bar{P} \end{cases}$

Capacidad de un corte: Se llama capacidad de un corte (P, $\bar{P}$) al número: C(P, $\bar{P}$) = $\sum_{v\in P}\sum_{w\in \bar{P}} C(v,w)$. Es la suma de todas las aristas incidentes en v y w tal que v ∈ P y w ∈ $\bar{P}$. (Las aristas por donde pasa el corte).

Teorema 2: Sea F un flujo de la red G = (V, A) y sea (P, $\bar{P}$) un corte de G. Entonces: C(P, $\bar{P}$) ≥ val(F)

Teorema 3 (del flujo Máximo y Corte Minimal): Si C(P,$\bar{P}$) = val(F) ⇒ el flujo es máximo y el corte es minimal.

Teorema 4: C(P, $\bar{P}$) = val(F) ⇔ $\begin{cases} F(x,v) = C(x,v) & \forall x \in P, v \in \bar{P} \\ F(v,x) = 0 & \forall v \in \bar{P}, x \in P \end{cases}$

2. Algoritmo de Ford-Foulkerson

Se utiliza para hallar el flujo máximo en una red de transporte.

Dada una red de transporte G = (V, A), con *f* (fuente) y *s* (sumidero):

- λ(v) función de etiquetación de v.
- e_k capacidad residual de v_k.

1) ∀a ∈ A etiqueto F(a) = 0
2) Etiqueto la fuente con (–, ∞)
3) Para cualquier vértice *x* adyacente a *a*, etiquetamos a *x*:
   a) Si $C(a,x) - F(a,x) > 0$, etiquetamos *x* con $(a^+, C(a,x) - F(a,x))$.
   b) Si $C(a,x) - F(a,x) = 0$, no etiquetamos *x.*
4) Mientras exista (*x* ≠ *a*) en V tal que *x* esté etiquetado y exista una arista (x,y) tal que y no esté etiquetado, etiquetamos a y:
   a) Si $C(x,y) - F(x,y) > 0$, etiquetamos *y* como $(x^+, \min\{C(a,x) - F(a,x); C(x,y) - F(x,y)\})$
   b) Si $C(x,y) - F(x,y) = 0$, no etiquetamos *y*.
5) Mientras exista (*x* ≠ *a*) en V tal que *x* esté etiquetado y exista una arista (x,y) tal que y no esté etiquetado, etiquetamos a y:
   c) Si $F(x,y) > 0$, etiquetamos *y* como $(x^-, \min\{C(a,x) - F(a,x); F(x,y)\})$
   d) Si $F(x,y) = 0$, no etiquetamos *y*.