#hojas = 4
Martes 15 a 18
7

MATEMÁTICA DISCRETA
PARCIAL-01/11/2014

1 Sea la ecuacuón de recurrencia: $a_{n+2} + ka_{n+1} + 9a_n = 2^n \qquad 0 \leq n$

a) Hallar $k \in \mathbb{R}$ para que $(n3^n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ sea solución de la ecuación homogénea asociada.

b) Hallar la solución general de la ecuación dada.

c) Hallar una solución que verifique: $a_o = 1$ y $a_1 = 0$. ¿Es única?

B

2 Sean x, y y z elementos de un álgebra de Boole $\mathcal{B}$.

a) Probar que: $((x+y)z \leq x) \Longrightarrow ((y \leq x) \wedge (z \leq x))$

b) Refutar: $x \leq (y+z) \Longleftrightarrow ((x \leq y) \wedge (x \leq z))$

c) Probar que: $x \leq y \Longleftrightarrow \overline{y} \leq \overline{x}$

R

3 Sea $\mathcal{A}$ el conjunto formado por todas las letras del alfabeto latino, se excluyen las dobles. Para cada elemento $\omega \in \mathcal{A}$ se define

$$\sharp(\omega) = \text{cantidad de letras del nombre en castellano de } \omega$$

B-

En $\mathcal{A}$ se define la siguiente relación

$$\omega_1 \ T \ \omega_2 \quad \text{si y sólo si} \quad \omega_1 = \omega_2 \quad \text{o} \quad \sharp(\omega_1) < \sharp(\omega_2)$$

a) Probar que T es una relación de orden. ¿Es total ?

b) Hallar los elementos particulares del conjunto formado por las letras de la palabra "SUPREMO".

c) ¿Existen en $\mathcal{A}$ elementos minimales o maximales?

4 Se define en $\mathbb{R}^2$ la siguiente relación:

$$(x,y)T(z,w) \Leftrightarrow |x^2 - y^2| = |z^2 - w^2|$$

R

Demuestre que T es una relación de equivalencia y encuentre el conjunto cociente.

5 Probar, utilizando el principio de inducción, que para todo $n \in \mathbb{N}$ se satisface: $n \geq 2$

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{n^2} < 2 - \frac{1}{n}$$

B-

Justifique todos los pasos realizados

1) a) $a_{n+2} + k\, a_{n+1} + 9 a_n = 0 \rightarrow$ Ec. homog.

$\rightsquigarrow$ propongo $a_n = C \cdot r^n \neq 0$

$$C r^{n+2} + k\, C r^{n+1} + 9\, C r^n = 0$$

$$\underbrace{C r^n}_{\neq 0} \underbrace{\left(r^2 + k r + 9 \right)}_{=0} = 0$$

$\rightsquigarrow$ Como $a_n^h = n\, 3^n \Rightarrow$ la raíz que verifica la ec. característica es 3 y además es doble (por la forma de a_n^h).

$$\Rightarrow 3^2 + k \cdot 3 + 9 = 0 \Rightarrow \underline{k = -6}$$

b) Propongo como $a_n^p = A \cdot 2^n$ y por ser soluc. debe verificar la ec. de recurrencia dada:

$$A 2^{n+2} - 6 A 2^{n+1} + 9 \cdot A 2^n = 2^n$$

$$4 A 2^n - 12 A 2^n + 9 A 2^n = 1 \cdot 2^n$$

$$\Rightarrow 4A - 12A + 9A = 1 \Rightarrow \underline{A = 1}$$

$$\underline{a_n^{general} = a_n^h + a_n^p = n 3^n + 2^n}$$

(c) $\begin{cases} K \cdot 0 \cdot 3^0 + 2^0 = 1 \checkmark \text{ igualdad} \\ K \cdot 1 \cdot 3^1 + 2^1 = 0 \rightarrow \underline{K = -2/3} \end{cases}$

→ solución pedida: $\underline{a_{n_{(c)}} = -2/3 \; n \; 3^n + 2^n} \quad n \geq 0$ ✓

↳ es único pues no hay otro valor de $K \; (\neq -2/3)$ que verifique: $K \cdot 3 + 2 = 0$

(5) Reescribo en forma de sumatoria: $\displaystyle\sum_{K=1}^{n} \frac{1}{K^2} < 2 - \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N} \text{ y } n \geq 2$

→ pruebo el caso base: $n_0 = 2$

$$\sum_{K=1}^{2} \frac{1}{K^2} \overset{?}{<} 2 - \frac{1}{2}$$

$$1 + \frac{1}{4} \overset{?}{<} \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{5}{4} < \frac{3}{2} \checkmark$$

→ Hip. Inductiva: supongo V la prop. para algún $n > 2$

→ pruebo para $n+1$

$$P(n+1): \sum_{K=1}^{n+1} \frac{1}{K^2} < 2 - \frac{1}{n+1}$$

→ analizo su valor de verdad

$$\underbrace{\sum_{K=1}^{n} \frac{1}{K^2}}_{2 - \frac{1}{n} \text{ por mi hip. Ind.}} + \frac{1}{(n+1)^2} \overset{?}{<} 2 - \frac{1}{n+1}$$

$$2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^2} \overset{?}{<} 2 - \frac{1}{n+1}$$

$$2 + \left[\frac{-(n+1)^2 + n}{n \cdot (n+1)^2}\right] \overset{?}{<} 2 - \frac{1}{n+1}$$

$$2 + \left[\frac{-n^2 - 2n - 1 \cancel{+n}}{n \cdot (n+1)^2}\right] \overset{?}{<} 2 - \frac{1}{n+1}$$

$$2 - \underbrace{\left[\frac{n^2 + n + 1}{n \cdot (n+1)^2}\right]}_{\circledast} \overset{?}{<} 2 - \underbrace{\frac{1}{n+1}}_{\boxtimes}$$

es fácil ver que $\circledast > \boxtimes$ $\forall n$ definido en el enunciado.

$\boxed{\text{Como esto se cumple entonces 2 − algo mayor será seguro menor que 2 − algo menor. Verificándose así la propiedad.}}$

④ $\cdot$ Reflex: $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$: $(a,b) R (a,b)$

$(a,b) T (a,b) \Longleftrightarrow |a^2-b^2| = |a^2-b^2|$ ✓ por reflex. de la igualdad

$\cdot$ Simet: $\forall (a,b),(c,d) \in \mathbb{R}^2$: $(a,b) R (c,d) \Rightarrow (c,d) R (a,b)$

$(ab) T (cd) \Longleftrightarrow |a^2-b^2| = |c^2-d^2|$ ✓ se cumple por hip

¿$(cd) T (ab)$? $|c^2-d^2| = |a^2-b^2|$ ✓ por simetría de la igualdad

$\cdot$ Transit: $\forall (ab),(cd)(ef) \in \mathbb{R}^2$: $(ab) R (cd) \wedge (cd) R (ef) \Rightarrow (ab) R (ef)$

$(ab) T (cd) \wedge (cd) T (ef)$ ✓ se cumplen por hip.

¿$(ab) T (ef)$? como $|a^2-b^2| = |c^2-d^2|$

y $|c^2-d^2| = |e^2-f^2| \Longrightarrow |a^2-b^2| = |e^2-f^2|$ ✓

$\therefore$ queda demostrado que T es una R_{eq}

⇝ para hallar el conj. coc. hago un estudio previo de las clases

$cl((0,0)) = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 / (x,y) T (0,0) \}$

$$|x^2 - y^2| = |0^2 - 0^2| = 0$$

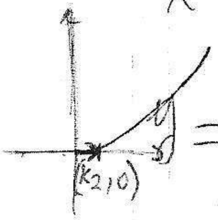
$$\underbrace{x^2 - y^2 = 0 \quad ó \quad -(x^2 - y^2) = 0}_{y = \pm x}$$

→ rectas con pendiente $\oplus$ y $\ominus$ que pasa por el origen

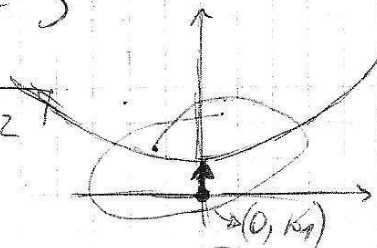
$$cl((1,2)) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, (x,y)\, T\, (1,2)\}$$

$$|x^2 - y^2| = |1^2 - 2^2| = 3$$

$$x^2 - y^2 = 3 \quad ó \quad -(x^2 - y^2) = 3$$



$$y = \sqrt{-3 + x^2} \quad ó \quad y = \sqrt{3 + x^2}$$



→ podemos ir viendo que se desprenden dos casos siempre

$$\mathbb{R}^2/_T = \{ cl((0, K_1)) \,;\, cl((K_2, 0)) \}$$ NO

Con $K_1 \in \mathbb{R}_0^+$ y $K_2 \in \mathbb{R}^+ \,/\, K_2 \geq \sqrt{|z^2 - w^2|}$

③ $A = \{a, b, c, d, e, f, \dots, z\}$

ⓐ <u>Reflex</u>: ¿$w_1 \, T \, w_1$? $\quad w_1 = w_1 \lor \#w_1 < \#w_1$

V por reflex de la igualdad } con ver este ya basta ✓

• <u>AntiS</u>: $\forall w_1, w_2 \in A: \underbrace{w_1 T w_2}_{(w_1 = w_2 \lor \#w_1 < \#w_2)} \land \underbrace{w_2 T w_1}_{(w_2 = w_1 \lor \#w_2 < \#w_1)} \Rightarrow w_1 = w_2$

HIP

Caso posible que hace V mi HIP

V	F	V	F	⊗

⊗ $w_1 = w_2$ ✓ ; luego los casos $\#w_1 < \#w_2 \land \#w_2 < \#w_1$ solo verifican con $w_1 = w_2$ ✓

• <u>Transit</u>: $\forall w_1, w_2, w_3 \in A: \underbrace{w_1 T w_2}_{(w_1 = w_2 \lor \#w_1 < \#w_2)} \land \underbrace{w_2 T w_3}_{(w_2 = w_3 \lor \#w_2 < \#w_3)} \Rightarrow w_1 T w_3$

HIP

Si $w_1 = w_2 \land w_2 = w_3 \Rightarrow w_1 = w_3 \Rightarrow w_1 T w_3$ ✓

Si $\#w_1 < \#w_2 \land \#w_2 < \#w_3 \Rightarrow \#w_1 < \#w_3 \Rightarrow w_1 T w_3$ ✓

Si $\#w_1 < \#w_2 \land \#w_2 \not< \#w_3$ pero con $w_2 = w_3 \Rightarrow \#w_1 < \#w_3$ ✓

↳ idem $\#w_2 < \#w_3$

∴ q. d. que T es una R ord

↳ de orden total pues

$\nexists \, w_1, w_2 \in A \,/\, w_1 \not T w_2 \land w_2 \not T w_1$

$$\text{(b)}\quad B = \{ \overset{\#=3}{S},\ \overset{\#=1}{U},\ \overset{\#=2}{\tilde{P}},\ \overset{\#=4}{R},\ \overset{\#=1}{E},\ \overset{\#=2}{M},\ \overset{\#=1}{O} \}$$

Cot. Sup $B = \{ w \in A \ / \ 4 < \# w \}$, supremo $= R$, $R \in B \Rightarrow$ es MAX

Cot Inf $B = \{ w \in A / \# w < 1 \}$, infimo $= U$, $U \in B \Rightarrow$ es MIN

$\downarrow \emptyset$

(c) Si. Maximales $= \{ y ; w \}$

minimales $= \{ a, e, i, o, u \}$

(2) (c) $x \leq y \Leftrightarrow \bar{y} \leq \bar{x}$

$$\underbrace{\underbrace{x \leq y \Rightarrow \bar{y} \leq x}_{V} \ \wedge \ \underbrace{\bar{y} \leq \bar{x} \Rightarrow x \leq y}_{V}}$$

Por $a\, x \leq a$? no demostró ?